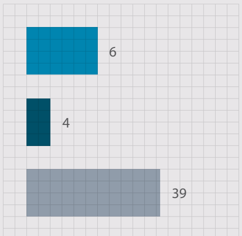
KABV WEERGAWE 1.1

GRAAD 10 WISKUNDE

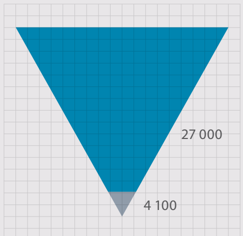
GESKRYF DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

EVERYTHING MATHS DEUR

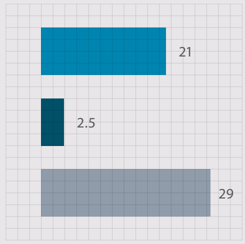
SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING



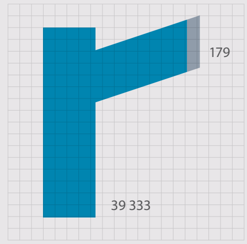
- Trigonometry exercises in this book
- Geometry exercises in this book
- Algebra exercises in this book



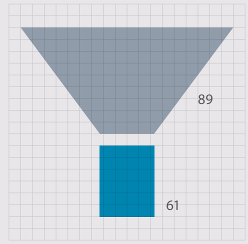
- Litres of ink used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks
- Litres of glue used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks



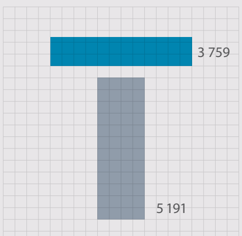
- Breadth of this book (cm)
- Depth of this book (cm)
- Height of this book (cm)



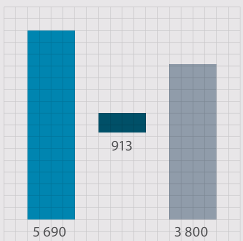
- Number of words used in this book
- Number of pages



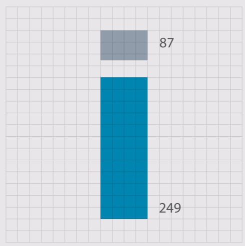
- Hours spent being taught this book
- Hours spent doing homework from this book



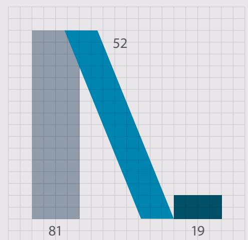
- Length of pages side by side (cm)
- Length of pages top to bottom (cm)



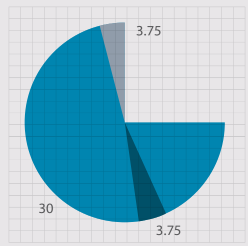
- How many times student scratches head while reading this book
- How many times student picks nose while reading this book
- How many times student clicks pen while reading this book



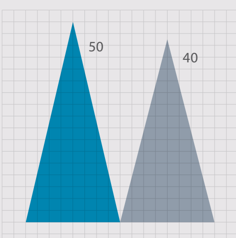
- Number of females who helped write this book
- Number of males who helped write this book



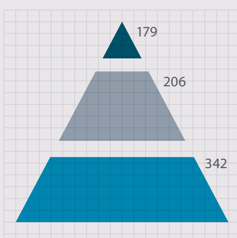
- Masters students who contributed to this book
- Honours students who contributed to this book
- Undergraduate students who contributed to this book



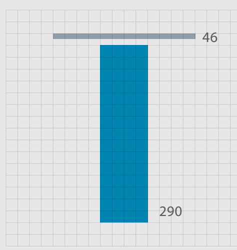
- Hours spent getting book to school per week
- Hours spent getting book home per week
- Hours spent with book in class per week



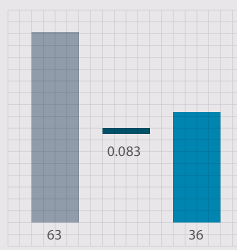
- Average size of class being taught from this book
- Average age of a maths teacher teaching from this book



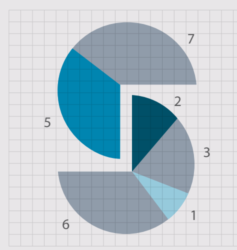
- Number of pages in Grade 12 Maths textbook
- Number of pages in Grade 11 Maths textbook
- Number of pages in Grade 10 Maths textbook



- Number of Afrikaans volunteers who helped write this book
- Number of English volunteers who helped write this book



- Number of hours spent conceptualising this cover
- Number of hours it takes to manufacture this book
- Number of hours spent designing this cover



- Weekly UCT hackathons that contributed to this book
- Small office hackathons that contributed to this book
- Afrikaans hackathons that contributed to this book
- Virtual hackathons that contributed to this book

basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

OLDMUTUAL

EVERYTHING MATHS

GRAAD 10 WISKUNDE

KABV WEERGAWE 1.1

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

KOPIEREG KENNISGEWING

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Education

Siyavula Education is a sosiale onderneming wat in 2012 gestig is met kapitaal en ondersteuning van die *PSG Group* Beperk, die *Shuttleworth Foundation* en, vanaf 2014, die *Omidyar Network*. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek:

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Luke Kannemeyer; Alison Jenkin; Marina van Zyl; Dr Carl Scheffler

Siyavula en DBE span

Heather Williams; Nkosilathi Vundla; Bridget Nash; Ewald Zietsman; William Buthane Chauke; Leonard Gumani Mudau; Sthe Khanyile; Josephine Mamaroke Phatlane

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr Mark Horner; Dr Samuel Halliday; Dr Sarah Blyth; Dr Rory Adams; Dr Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Taskeen Adam; Ross Adams; Tracey Adams; Dr Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Ismail Akhalwaya; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Bianca Bôhmer; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Katherine Barry; Dr Ilsa Basson; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Lisette de Beer; Prof Margot Berger; Jessie Bester; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Dr Thinus Booysen; Ena Bosman; Janita Botha; Pieter Botha; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Richard Burge; Christina Buys; Jan Buys; George Calder-Potts; Biddy Cameron; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; William Buthane Chauke; Faith Chaza; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Saymore Chifamba; Lizzy Chivaka; Dr Christine Chung; Dr Mareli Claasens; Brett Cocks; Zelmari Coetzee; Phillipa Colly; Roché Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Deanne Coppejans; Rocco Coppejans; Gary Coppin; Tim Craib; Dr Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Mia de; Tariq Desai; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr Dan Dwyer; Frans van Eeden; Kobus Ehlers; Alexander Ellis; Tom Ellis; Dr Anthony Essien; Charl Esterhuysen; Andrew Fisher; Dr Philip Fourie; Giovanni Franzoni; Sanette Gildenhuys; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Nicola Glenday; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr Stephanie Gould; Umeshree Govender; Dr Ilse le Grange; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne Grové; Eric Gulbis; Dr Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr Samuel Halliday; Asheena Hanuman; Dr Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Thomas Haywood; Dr William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr Fritha Hennessy; Dr Colleen Henning; Anna Herrington; Shaun Hewitson; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Malcolm Hillebrand; Gregory Hingle; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr Benne

Holwerda; Dr Mark Horner; Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Dr Belinda Huntley; Laura Huss; Prof Ed Jacobs; Prof Gerrie J Jacobs; Hester Jacobs; Kim Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Alison Jenkin; Clare Johnson; Dr Zingiswa Jojo; Francois Jooste; Dominic Jordan; Luke Jordan; Cassiem Joseph; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Clare Kampel; Herman Kamper; Dr Lutz Kampmann; Luke Kannemeyer; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Dr Setshaba D Khanye; Sthe Khanyile; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Mariola Kirova; Jannie Kirsten; Melissa Kistner; James Klatzow; Dr Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Paul van Koersveld; Bishop Komolafe; Dion Kotze; Dr Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Henri Laurie; Dr Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr Marco van Leeuwen; Dr Tom Leinster; Ingrid Lezar; Annatjie Linnenkamp; Henry Liu; Pamela Lloyd; Dr Kevin Lobb; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr Komal Maheshwari; Sello Makgakga; Dr Erica Makings; Judah Makonye; Michael Malahe; Dr Peter Malatji; Masoabi Malunga; Kosma von Maltitz; Shanaaz Manie; Masilo Mapaila; Adriana Marais; Paul Maree; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret; John Mathew; Dr Will Matthews; Chiedza Matuso; Thulani Mazolo; Stephen McBride; JoEllen McBride; Abigail McDougall; Kate McGrath; Ralf Melis; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Zalisile Mgidi; Dr Duncan Mhakure; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Talitha Mostert; Gabriel Mougoue; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Leonard Gumani Mudau; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan Naudé; Polite Nduru; Tyrone Negus; Theresa Nel; Annemarie Nelmapius; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Dr Mapula Ngoepe; Nadia Niemann; Sarah Niss; Towan Nothling; Nkululeko Nyangiwe; Tony Nzundu; Jacquin October; Thomas O'Donnell; Dr Markus Oldenburg; Marieta Oliver; Riaz Omar; Dr Bob Osano; Helena Otto; Adekunle Oyewo; Dr Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Dr Daniel Palm; Masimba Paradza; Clare Patrick; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Nicolette Pekeur; Carli Pengilly; Roseinnes Phahle; Josephine Mamaroke Phatlane; Seth Phatoli; Joan Pienaar; Petrus Pieterse; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Johan du Plessis; Tabitha du Plessis; Jaco du Plessis; Dr Craig Pournara; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Prof. Sergey Rakityansky; Kim Ramatlapana; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Trevishka Reddy; Dr Matthew Reece; Chris Reeders; Brice Reignier; Razvan Remsing; Dr Liezel Retief; Adam Reynolds; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; Dr William Robinson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr Andrew Rose; Katie Ross; Karen Roux; Dr Maritha le Roux; Jeanne-Mariè Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Farhana Motala Safi; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Rhoda van Schalkwyk; Christo van Schalkwyk; Dr Carl Scheffler; Peter Schutte; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Helen Seals; Relebohile Sefako; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Ryman Shoko; Dr James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Thaneshree Singh; Brandon Sim; Bonga Skozana; Bradley Smith; Greg Solomon; Zamekile Sondzaba; Nicholas Spaull; Margaret Spicer; Hester Spies; Dr Andrew Stacey; Dr Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Nicky Stocks; Dr Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Bianca Swart; Masixole Swartbooi; Ketan Tailor; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Dr Francois Toerien; René Toerien; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Theresa Valente; Alida Venter; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Katie Viljoen; Adele de Villiers; Daan Visage; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Nkosilathi Vundla; Dr Karen Wallace; John Walmsley; Duncan Watson; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr Dawn Webber; Michelle Wen; Dr Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Leandi van der Westhuizen; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr Alexander Wetzler; Dr Spencer Wheaton; Vivian White; Mark Whitehead; Dr Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld 'n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang.
Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met behulp van korporatiewe sosiale beleggingsfondse van die *Old Mutual Foundation*.

EVERYTHING MATHS & SCIENCE

Die ***Everything Maths and Science***-reeks dek Wiskunde, Fisiese Wetenskappe, Lewenswetenskappe en Wiskundige Geletterdheid.

Die Siyavula ***Everything Science*** handboeke

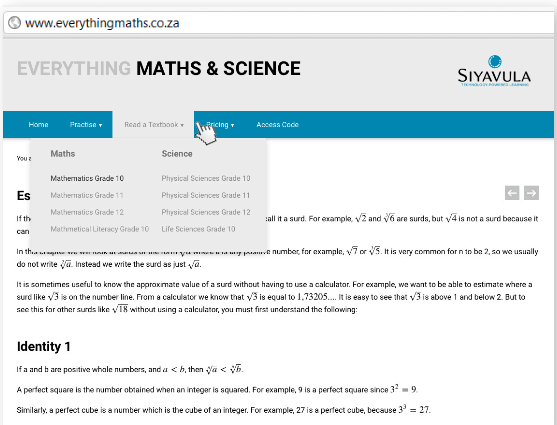
Die Siyavula ***Everything Maths*** handboeke

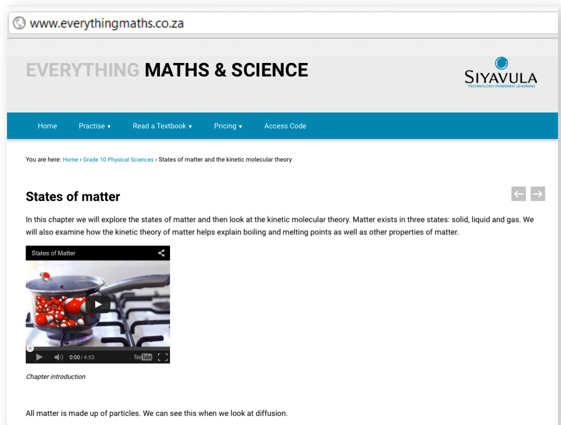
DIGITALE HANDBOEKE

LEES AANLYN

Sien hoe die handboeke lewe kry op die internet. Nie net het jy toegang tot al die inhoud van die gedrukte weergawe nie, maar die aanlynweergawe bied ook videos, voorleggings en simulasies om jou 'n meer omvattende leerervaring te gee.

www.everythingmaths.co.za

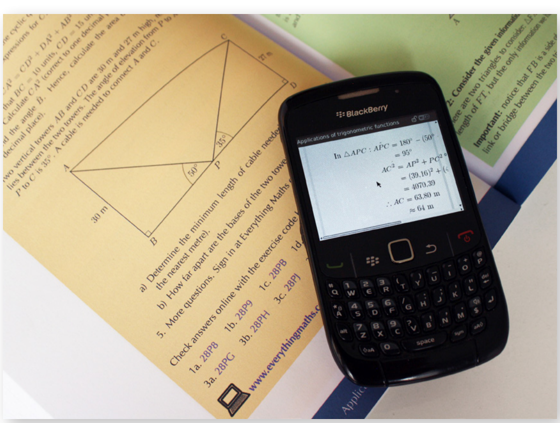


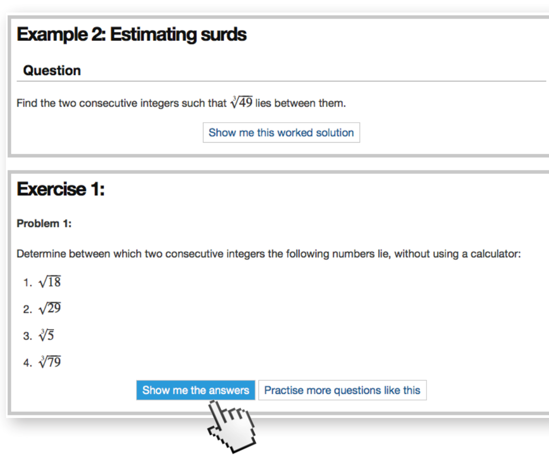


KONTROLEER JOU ANTWOORDE AANLYN OF OP JOU FOON

Op soek na die antwoorde? Jy kan die hele uitgewerkte oplossing vir enige van die vrae in die handboek vind deur sy *shortcode* ('n 4-syfer kombinasie van letters en syfers) in die soekboksie op die web- of mobi-tuiste in te tik.

www.everythingmaths.co.za or m.everythingmaths.co.za





Example 2: Estimating surds

Question

Find the two consecutive integers such that $\sqrt[3]{49}$ lies between them.

Show me this worked solution

Exercise 1:

Problem 1:

Determine between which two consecutive integers the following numbers lie, without using a calculator:

1. $\sqrt{18}$
2. $\sqrt{29}$
3. $\sqrt[3]{5}$
4. $\sqrt[3]{79}$

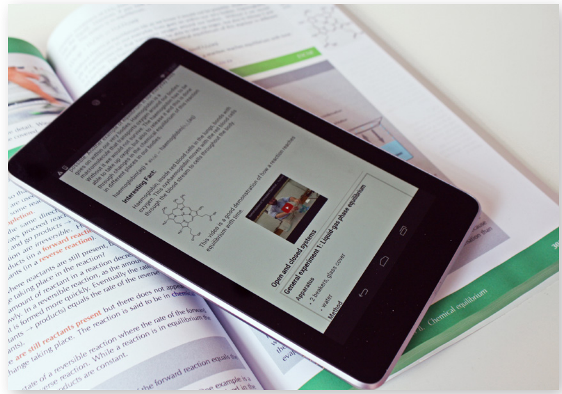
Show me the answers | Practise more questions like this

SELFOON & TABLET

RESPONSIEWE WEBWERF

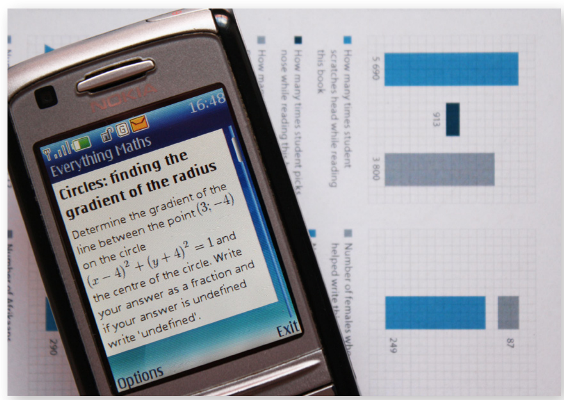
As jy `n slimfoon of tablet het, sal elke blad op ons webwerf automaties aanpas by die toestel (spesifiek die grootte, vorm, en kwaliteit van die skerm) wat jy gebruik. Geniet `n maklik leesbare teksboek terwyl jy aan die beweeg is, enige tyd, enige plek.

www.everythingmaths.co.za



MOBI

Moenie stres as jy nie `n slimfoon het nie. Jy kan hierdie teksboek op jou ouer toestel ook lees. Jy sal automaties na die mobi-webwerf geneem word. Jy kan dit ook direk lees by: ***m.everythingmaths.co.za***



LAAI AF OP JOU TABLET

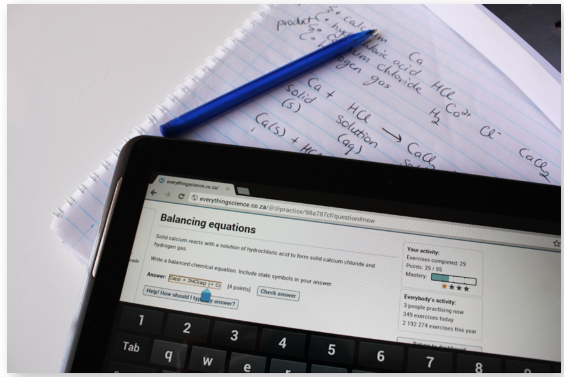
Jy kan 'n digitale PDF kopie van die ***Everything***-reeks handboeke op jou rekenaar, tablet, iPad en Kindle aflaai.

www.everythingmaths.co.za

OEFEN SLIM

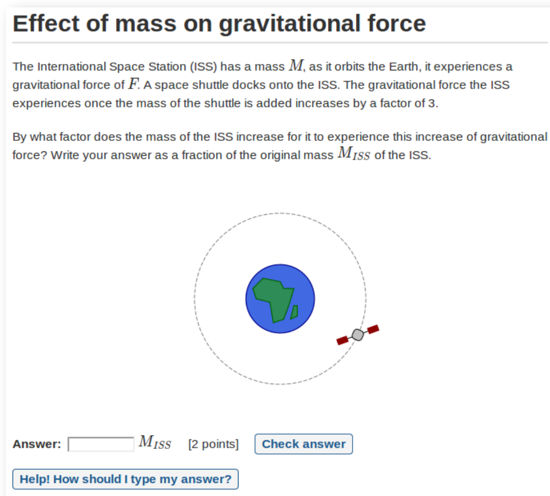
OEFEN AANLYN & OP JOU FOON VIR TOETSE EN EKSAMENS

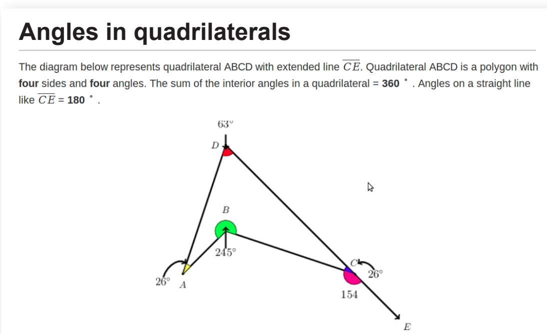
Om goed te doen in toetse en eksamens moet jy oefen, maar dit is soms moeilik om te weet waar om te begin en hoe om ou eksamenvraestelle in die hande te kry.



Intelligent Practice is 'n aanlyn Wiskunde- en Wetenskapoefendiens wat jou toelaat om vrae op die regte moeilikheidsgraad vir jou te oefen en dan die antwoorde dadelik na te gaan!

Oefen vrae soos hierdie deur te registreer by ***everythingmaths.co.za***





JOU PANEELBORD

Jou persoonlik paneelbord op Intelligent Practice help jou om rekord te hou van jou werk. Jy kan jou vordering en bemeestering van elke onderwerp in die boek dophou en dit gebruik om jou leerwerk te bestuur en jou swakpunte uit te lig. Jy kan ook jou paneelbord gebruik om jou onderwysers, ouers, universiteite of beursinstansies te wys wat jy die afgelope jaar gedoen het.

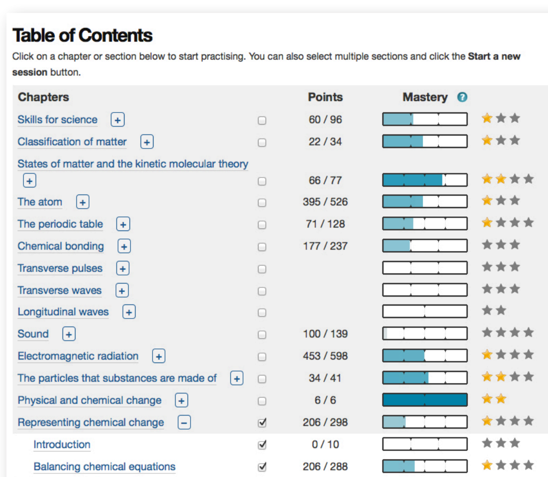


Table of Contents

Click on a chapter or section below to start practising. You can also select multiple sections and click the **Start a new session** button.

Chapters	Points	Mastery
Skills for science	60 / 96	
Classification of matter	22 / 34	
States of matter and the kinetic molecular theory	66 / 77	
The atom	395 / 526	
The periodic table	71 / 128	
Chemical bonding	177 / 237	
Transverse pulses		
Transverse waves		
Longitudinal waves		
Sound	100 / 139	
Electromagnetic radiation	453 / 598	
The particles that substances are made of	34 / 41	
Physical and chemical change	6 / 6	
Representing chemical change	206 / 298	
Introduction	0 / 10	
Balancing chemical equations	206 / 288	

Intelligent Practice is net in Engels beskikbaar.

Inhoudsopgawe

HOOFSTUK 1

Algebraïese uitdrukkings

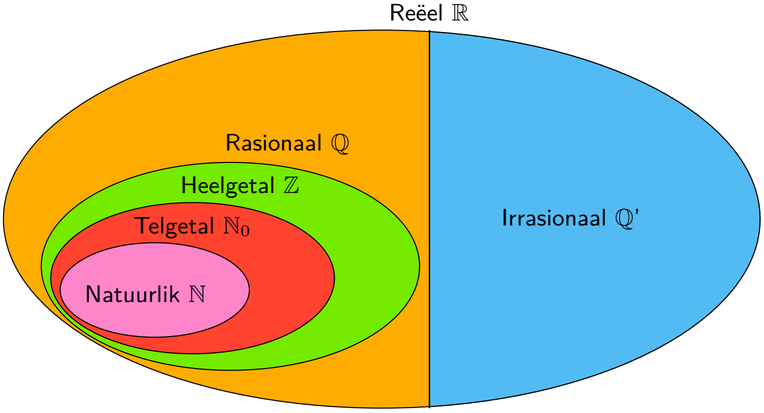
1.1 Inleiding EMD2

Deur die menslike geskiedenis het alle mense en kulture bygedra tot die veld van die wiskunde. Onderwerpe soos algebra mag nou voor die handliggend lyk, maar vir baie eeue moes wiskundiges regkom daarsonder. In die volgende drie grade sal jy meer gevorderde en abstrakte wiskunde ondersoek. Dit mag nie altyd ooglopend wees hoe hierdie wiskunde toegepas kan word in die alledaagse lewe nie, maar die waarheid is dat wiskunde vereis word vir omtrent alles wat jy eendag in die lewe gaan doen. Geniet jou wiskunde reis. Onthou daar is nie so iets soos 'n "wiskunde mens" nie. Ons kan almal wiskunde doen, dit neem net oefening.

Figuur 1.1: 'n Paar voorbeelde van vroeë kerfstok stokke. Dit is gebruik om mense te help om dinge soos die aantal dae tussen gebeure of die aantal vee wat hulle gehad het te tel.

In hierdie hoofstuk sal ons begin met die hersiening van die reële getallestelsel en dan sal ons aandag gee aan die skatting van die waardes van wortelvorme en die afronding van reële getalle. Ons sal ook ons vorige kennis van faktorisering uitbrei en aandag gee aan meer komplekse berekenings wat tweeterme en drieterme insluit.

1.2 Die reële getalstelsel EMD3



Ons gebruik die volgende definisies:

- $\mathbb{N}$: natuurlike getalle is $\{1; 2; 3; \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0$: telgetalle is $\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$: heelgetalle is $\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

BESOEK:
Die volgende video toon 'n voorbeeld van hoe ons kan vasstel in watter van bogenoemde versamelings getalle 'n spesifieke getal is.
Sien video: 2GY8 at www.everythingmaths.co.za

NOTA:
Alle getalle is nie reële getalle nie. Die vierkantswortel van 'n negatiewe getal is 'n sogenaamde nie-reële of imaginêre getal. Byvoorbeeld $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-28}$ en $\sqrt{-5}$ is almal nie-reële getalle.

1.3 Rasionale en irrasionale getalle EMD4

DEFINISIE: *Rasionale getal*

'n Rasionale getal ($\mathbb{Q}$) is enige getal wat geskryf kan word as:

$$\frac{a}{b}$$

waar a en b heelgetalle is en $b \neq 0$.

Die volgende getalle is almal rasionale getalle:

$$\frac{10}{1}\ ;\ \frac{21}{7}\ ;\ \frac{-1}{-3}\ ;\ \frac{10}{20}\ ;\ \frac{-3}{6}$$

Ons sien al die tellers en al die noemers is heelgetalle.

Dit beteken dat alle heelgetalle rasionale getalle is, want hulle kan geskryf word met 'n noemer van 1.

DEFINISIE: *Irrasionale getalle*

Irrasionale getalle ($\mathbb{Q}'$) is getalle wat nie geskryf kan word as 'n breuk met 'n teller en 'n noemer wat heelgetalle is nie.

Voorbeelde van irrasionale getalle:

$$\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ \sqrt[3]{4}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hierdie is nie rasionale getalle nie, want of die teller of die noemer is nie 'n heelgetal nie.

Desimale getalle EMD5

Alle heelgetalle en breuke met heelgetal tellers en nie-nul heelgetal noemers is rasionale getalle. Onthou dat wanneer die noemer van 'n breuk nul is, dan is die breuk ongedefinieer.

Jy kan enige rasionale getal skryf as 'n desimale getal maar nie alle desimale getalle is rasionale getalle nie. Hierdie tipes desimale getalle is rasionale getalle:

- Desimale getalle wat eindig (of termineer). Byvoorbeeld, die breuk $\frac{4}{10}$ kan geskryf word as 0,4.
- Desimale getalle met 'n enkele repeterende syfer. Byvoorbeeld, die breuk $\frac{1}{3}$ kan geskryf word as $0{,}\dot{3}$ of $0{,}\overline{3}$. Die kolletjie en balkie notasie is ekwivalent en beide dui repeterende 3'e aan, dus: $0{,}\dot{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$.
- Desimale getalle met meer as een repeterende syfer. Byvoorbeeld, die breuk $\frac{2}{11}$ kan ook geskryf word as $0{,}\overline{18}$. Die balkie of strepie stel die repeterende patroon van 1'e en 8's voor, dus $0{,}\overline{18} = 0{,}181818\ldots$.

NOTA:
Jy mag sien dat 'n punt in plaas van 'n komma gebruik word om 'n desimale getal aan te dui. So die getal 0,4 kan ook geskryf word as 0.4

Notasie: Jy kan 'n kolletjie of 'n balkie gebruik oor die herhalende syfers om aan te dui dat die desimaal 'n repeterende desimaal is. As die balkie oor meer as een syfer strek, dan is al die syfers onder die balkie repeterend.

As jy gevra word of 'n getal rasionaal of irrasionaal is, skryf heel eerste die getal in desimale vorm. As die getal eindig, dan is dit rasionaal. As die getal vir ewig voortgaan en nooit eindig nie, kyk dan vir 'n herhalende patroon van syfers. As daar geen herhalende patroon is nie, dan is die getal irrasionaal.

Wanneer jy die irrasionale getalle in desimale vorm skryf, sou jy kon aanhou om hulle te skryf met oneindig baie desimale plekke. Maar, dit is nie gerieflik nie en dit is dikwels nodig om die getalle af te rond.

NOTA:
Afronding van 'n irrasionale getal maak van die getal 'n rasionale getal wat by benadering dieselfde waarde het as die irrasionale getal.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Rasionale en irrasionale getalle

VRAAG

Watter van die volgende is nie rasionale getalle nie?

1. $\pi =$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510...
2. 1,4
3. 1,618033989...
4. 100
5. 1,7373737373...
6. $0,\overline{02}$

OPLOSSING

1. Irrasionaal, desimaal eindig nooit en het nie 'n herhalende patroon nie.
2. Rasionaal, desimaal eindig.
3. Irrasionaal, desimaal eindig nooit en het nie 'n herhalende patroon nie.
4. Rasionaal, alle heelgetalle is rasionaal.
5. Rasionaal, desimaal het herhalende patroon.
6. Rasionaal, desimaal het herhalende patroon.

Skakel eindigende desimale om na rasionale getalle EMD6

'n Desimale getal het 'n heelgetalgedeelte en 'n breukgedeelte. Byvoorbeeld, 10,589 het 'n heelgetalgedeelte van 10 en 'n breukgedeelte van 0,589 omdat $10 +$ 0,589 $=$ 10,589.

Elke syfer na die desimale punt is 'n breuk met 'n noemer in toenemende magte van 10.

Byvoorbeeld:

- 0,1 is $\frac{1}{10}$
- 0,01 is $\frac{1}{100}$
- 0,001 is $\frac{1}{1000}$

Dit beteken dat

$$\begin{aligned} 10{,}589 &= 10 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} \\ &= \frac{10\,000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{9}{1000} \\ &= \frac{10\,589}{1000} \end{aligned}$$

BESOEK:
Die volgende twee videos verduidelik hoe om desimale om te skakel na rasionale getalle.
Deel 1
Sien video: 2GY9 at www.everythingmaths.co.za
Deel 2
Sien video: 2GYB at www.everythingmaths.co.za

Skakel repeterende desimale om in rasionale getalle EMD7

Wanneer die desimaal repeterend is, is 'n bietjie meer werk nodig om die breukgedeelte van die desimale getal te skryf as 'n breuk.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Skakel desimale getalle om na breuke

VRAAG

Skryf $0{,}\dot{3}$ in die vorm $\frac{a}{b}$ (waar a en b heelgetalle is).

OPLOSSING

Stap 1: Definieer 'n vergelyking

$$\text{Let } x = 0{,}33333\ldots$$

Stap 2: Vermenigvuldig met 10 aan beide kante

$$10x = 3{,}33333\ldots$$

Stap 3: Trek die eerste vergelyking van die tweede vergelyking af

$$9x = 3$$

Stap 4: Vereenvoudig

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Skakel desimale getalle om na breuke

VRAAG

Skryf $5,\dot{4}3\dot{2}$ as 'n rasionale getal.

OPLOSSING

Stap 1: Definieer 'n vergelyking

$$x = 5{,}432432432\ldots$$

Stap 2: Vermenigvuldig met 1000 aan beide kante

$$1000x = 5432{,}432432432\ldots$$

Stap 3: Trek die eerste vergelyking van die tweede vergelyking af

$$999x = 5427$$

Stap 4: Vereenvoudig

$$x = \frac{5427}{999} = \frac{201}{37} = 5\frac{16}{37}$$

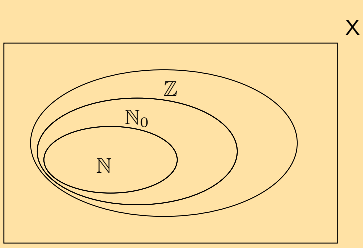
In die eerste voorbeeld is die desimaal vermenigvuldig met 10 en in die tweede voorbeeld is die desimaal vermenigvuldig met 1000. Dit is omdat daar net een repeterende syfer was (3) in die eerste voorbeeld, terwyl daar drie repeterende syfers was (432) in die tweede voorbeeld.

In die algemeen, as jy een repeterende desimaal het, vermenigvuldig dan met 10. As jy twee repeterende desimale het, vermenigvuldig dan met 100. As jy drie syfers het wat repeteer, vermenigvuldig dan met 1000 en so verder.

Nie alle desimale getalle kan geskryf word as rasionale getalle nie. Hoekom nie? Irrasionale desimale getalle soos $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ kan nie geskryf word as 'n breuk met 'n heelgetal noemer en teller nie, want hulle het nie 'n patroon van repeterende syfers nie en hulle eindig nie.

Oefening 1 – 1:

1. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



a) Waar pas die getal $-\frac{12}{3}$ in die diagram?

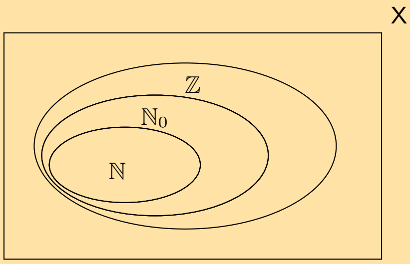
b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?

i. Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.

ii. Elke natuurlike getal is 'n telgetal.

iii. Daar is geen desimale in die telgetalle nie.

2. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



a) Waar pas die getal $-\frac{1}{2}$ in die diagram?

b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?

i. Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.

ii. Elke telgetal is 'n heelgetal.

iii. Daar is geen desimale in die telgetalle nie.

3. Sê of die volgende getalle reëel, nie-reëel of ongedefinieerd is.

a) $-\sqrt{3}$ b) $\dfrac{0}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{-9}$ d) $\dfrac{-\sqrt{7}}{0}$ e) $-\sqrt{-16}$ f) $\sqrt{2}$

4. Sê of die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is. As die getal rasionaal is, sê of dit 'n natuurlike getal, 'n telgetal of 'n heelgetal is.

a) $-\frac{1}{3}$ b) 0,651268962154862... c) $\dfrac{\sqrt{9}}{3}$

d) π^2 e) π^4 f) $\sqrt[3]{19}$

g) $\left(\sqrt[3]{1}\right)^7$ h) $\pi + 3$ i) $\pi + 0{,}858408346$

5. As a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c is irrasionaal, watter van die volgende is rasionale getalle?

a) $\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{a}{3}$ c) $\dfrac{-2}{b}$ d) $\dfrac{1}{c}$

6. Vir elk van die volgende waardes van a, sê of $\frac{a}{14}$ rasionaal of irrasionaal is.

a) 1 b) -10 c) $\sqrt{2}$ d) 2,1

7. Oorweeg die volgende lys van getalle:

$$-3\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{-1}\ ;\ -8\frac{4}{5}\ ;\ -\sqrt{8}\ ;\ \frac{22}{7}\ ;\ \frac{14}{0}\ ;\ 7\ ;\ 1{,}\overline{34}\ ;\ 3{,}3231089\ldots\ ;\ 3+\sqrt{2}\ ;\ 9\frac{7}{10}\ ;\ \pi\ ;\ 11$$

Watter van die getalle is:

a) natuurlike getalle
b) irrasionale getalle
c) nie-reële getalle
d) rasionale getalle
e) heelgetalle
f) ongedefinieerd

8. Vir elk van die volgende getalle:
   - skryf die volgende drie syfers en
   - meld of die getalle rasionaal of irrasionaal is.

   a) $1{,}1\dot{5}$ b) $2{,}121314\ldots$ c) $1{,}242244246\ldots$
   d) $3{,}324354\ldots$ e) $3{,}3243\dot{5}\dot{4}$
9. Skryf die volgende as breuke:
   a) $0{,}1$ b) $0{,}12$ c) $0{,}58$ d) $0{,}2589$
10. Skryf die volgende deur die repeterende desimale notasie te gebruik:
    a) $0{,}1111111\ldots$ b) $0{,}1212121212\ldots$
    c) $0{,}123123123123\ldots$ d) $0{,}11414541454145\ldots$
11. Skryf die volgende in desimale vorm, deur die repeterende desimale notasie te gebruik:
    a) $\frac{25}{45}$ b) $\frac{10}{18}$ c) $\frac{7}{33}$ d) $\frac{2}{3}$
    e) $1\frac{3}{11}$ f) $4\frac{5}{6}$ g) $2\frac{1}{9}$
12. Skryf die volgende desimale in breukvorm:
    a) $0{,}\dot{5}$ b) $0{,}6\dot{3}$ c) $0{,}\dot{4}$ d) $5{,}\overline{31}$ e) $4{,}\overline{93}$ f) $3{,}\overline{93}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2GYC	2. 2GYD	3a. 2GYF	3b. 2GYG	3c. 2GYH	3d. 2GYJ
3e. 2GYK	3f. 2GYM	4a. 2GYP	4b. 2GYQ	4c. 2GYS	4d. 2GYT
4e. 2GYV	4f. 2GYW	4g. 2GYX	4h. 2GYR	4i. 2GYN	5. 2GYY
6. 2GYZ	7. 2GZ2	8a. 2GZ3	8b. 2GZ4	8c. 2GZ5	8d. 2GZ6
8e. 2GZ7	9a. 2GZ8	9b. 2GZ9	9c. 2GZB	9d. 2GZC	10a. 2GZD
10b. 2GZF	10c. 2GZG	10d. 2GZH	11a. 2GZJ	11b. 2GZK	11c. 2GZM
11d. 2GZN	11e. 2GZP	11f. 2GZQ	11g. 2GZR	12a. 2GZS	12b. 2GZT
12c. 2GZV	12d. 2GZW	12e. 2GZX	12f. 2GZY		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.4 Afronding EMD8

Afronding van 'n desimale getal tot 'n verlangde aantal desimale plekke, is die vinnigste manier om 'n getal te benader. Byvoorbeeld, as jy 2,6525272 wil afrond tot drie desimale plekke, sal jy:

- drie plekke tel na die desimaal en 'n | plaas tussen die derde en die vierde getalle;
- rond die derde syfer boontoe af as die vierde syfer groter of gelyk is aan 5;
- laat die derde syfer onveranderd as die vierde syfer kleiner is as 5;
- as die derde syfer 9 is en boontoe afgerond moet word, dan word die 9 'n 0 en die tweede syfer word boontoe afgerond.

Dus, aangesien die eerste syfer na die | 'n 5, is, moet ons die syfer in die derde desimale plek boontoe afrond na 'n 3 en die finale antwoord van 2,6525272, afgerond tot drie desimale plekke, is 2,653.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik hoe om af te rond.
Sien video: 2GZZ at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Rond af

VRAAG

Rond die volgende getalle af tot die aantal desimale plekke wat aangedui is:

1. $\frac{120}{99} = 1{,}\dot{1}\dot{2}$ tot 3 desimale plekke.
2. $\pi = 3{,}141592653\ldots$ tot 4 desimale plekke.
3. $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ tot 4 desimale plekke.
4. 2,78974526 tot 3 desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1: Merk die verlangde aantal desimale plekke af

As die getal nie 'n desimaal is nie, moet jy eers die getal as 'n desimaal skryf.

1. $\frac{120}{99} = 1{,}212|121212\ldots$
2. $\pi = 3{,}1415|92653\ldots$
3. $\sqrt{3} = 1{,}7320|508\ldots$
4. $2{,}789|74526$

Stap 2: Kontroleer die volgende syfer om te sien of jy moet boontoe of ondertoe afrond

1. Die laaste syfer van $\frac{120}{99} = 1{,}212|12121\dot{1}\dot{2}$ moet ondertoe afgerond word.
2. Die laaste syfer moet $\pi = 3{,}1415|92653\ldots$ boontoe afgerond word.
3. Die laaste syfer moet $\sqrt{3} = 1{,}7320|508\ldots$ boontoe afgerond word.
4. Die laaste syfer moet $2{,}789|74526$ boontoe afgerond word.
   Aangesien dit 'n 9 is, vervang ons dieg met 'n 0 en rond die tweedelaaste syfer boontoe af.

Stap 3: Skryf die finale antwoord

1. $\frac{120}{99} = 1{,}212$ afgerond na 3 desimale plekke.
2. $\pi = 3{,}1416$ afgerond na 4 desimale plekke.
3. $\sqrt{3} = 1{,}7321$ afgerond na 4 desimale plekke.
4. 2,790

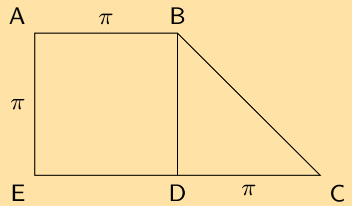
Oefening 1 – 2:

1. Rond die volgende af tot 3 desimale plekke:
   a) 12,56637061... b) 3,31662479... c) 0,2666666...
   d) 1,912931183... e) 6,32455532... f) 0,05555555...
2. Rond elk van die volgende af tot die aantal desimale plekke wat aangedui is:
   a) 345,04399906 tot 4 desimale plekke.
   b) 1361,72980445 tot 2 desimale plekke.
   c) 728,00905239 tot 6 desimale plekke.
   d) $\frac{1}{27}$ tot 4 desimale plekke.

e) $\frac{45}{99}$ tot 5 desimale plekke.

f) $\frac{1}{12}$ tot 2 desimale plekke.

3. Bestudeer die diagram hieronder



a) Bereken die area van $ABDE$ tot 2 desimale plekke.

b) Bereken die area van BCD tot 2 desimale plekke.

c) Gebruik jou antwoorde in (a) en (b) en bereken die area van $ABCDE$.

d) Sonder afronding, wat is die area van $ABCDE$?

4. Gegee $i = \frac{r}{600}$; $r = 7{,}4$; $n = 96$; $P = 200\ 000$.

a) Bereken i korrek tot 2 desimale plekke.

b) Gebruik jou antwoord van (a) en bereken A in $A = P(1 + i)^n$.

c) Bereken A sonder om jou antwoord in (a) af te rond en vergelyk hierdie antwoord met jou antwoord in (b).

5. As dit 1 persoon neem om 3 bokse te dra, hoeveel mense is nodig om 31 bokse te dra?

6. As 7 kaartjies R 35,20 kos, hoeveel kos een kaartjie?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H22 1b. 2H23 1c. 2H24 1d. 2H25 1e. 2H26 1f. 2H27 2a. 2H28 2b. 2H29
2c. 2H2B 2d. 2H2C 2e. 2H2D 2f. 2H2F 3. 2H2G 4. 2H2H 5. 2H2J 6. 2H2K

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.5 Skatting van wortelvorme EMD9

As die n^{de} wortel van 'n getal nie vereenvoudig kan word tot 'n rasionale getal nie, noem ons dit 'n wortelvorm. Byvoorbeeld, $\sqrt{2}$ en $\sqrt[3]{6}$ is wortelvorme, maar $\sqrt{4}$ is nie 'n wortelvorm nie omdat dit vereenvoudig kan word tot 'n rasionale getal 2.

In hierdie hoofstuk sal ons kyk na wortelvorme van die vorm $\sqrt[n]{a}$ waar a enige positiewe getal is, byvoorbeeld $\sqrt{7}$ of $\sqrt[3]{5}$. Dit is baie algemeen dat n gelyk is aan 2, dus skryf ons gewoonlik nie $\sqrt[2]{a}$ nie. In stede daarvan skryf ons die wortelvorm slegs as $\sqrt{a}$

Dit is soms handig om die benaderde waarde van 'n wortelvorm te weet sonder om 'n sakrekenaar te gebruik. Byvoorbeeld, ons wil in staat wees om te skat waar 'n wortelvorm soos $\sqrt{3}$ op die getallelyn lê. Met behulp van 'n sakrekenaar weet ons dat $\sqrt{3}$ gelyk is aan 1,73205.... Dit is maklik om te sien dat $\sqrt{3}$ groter is as 1 en kleiner is as 2. Maar, om dit te sien vir ander wortelvorme soos $\sqrt{18}$, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, moet jy eers die volgende verstaan:

As a en b positiewe heelgetalle is, en $a < b$, dan $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

'n Volkome vierkant is die getal wat verkry word wanneer 'n heelgetal gekwadreer word. Byvoorbeeld, 9 is 'n volkome vierkant aangesien $3^2 = 9$.

Soortgelyk, 'n volkome derdemag is 'n getal wat die derdemag is van 'n heelgetal. Byvoorbeeld, 27 is 'n volkome derdemag omdat $3^3 = 27$.

Beskou die wortelvorm $\sqrt[3]{52}$. Dit lê iewers tussen 3 en 4, omdat $\sqrt[3]{27} = 3$ en $\sqrt[3]{64} = 4$ en 52 lê tussen 27 en 64.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik hoe om 'n wortelvorm se waarde te skat.
Sien video: 2H2M at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 5: Skatting van wortelvorme

VRAAG

Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat so is dat $\sqrt{26}$ tussen hulle lê. (Onthou dat opeenvolgende heelgetalle twee heelgetalle is wat op mekaar volg op die getallelyn, byvoorbeeld, 5 en 6 of 8 en 9.)

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik volkome vierkante om die kleiner heelgetal te bepaal

$5^2 = 25$. Dus $5 < \sqrt{26}$.

Stap 2: Gebruik volkome vierkante om die groter heelgetal te skat.

$6^2 = 36$. Dus $\sqrt{26} < 6$.

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$5 < \sqrt{26} < 6$

Uitgewerkte voorbeeld 6: Skatting van wortelvorme

VRAAG

Vind twee opeenvolgende heelgetalle so dat $\sqrt[3]{49}$ tussen hulle lê.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik volkome derdemagte om die kleiner heelgetal te skat

$3^3 = 27$, dus $3 < \sqrt[3]{49}$.

Stap 2: Gebruik volkome derdemagte om die groter heelgetal te bepaal

$4^3 = 64$, dus $\sqrt[3]{49} < 4$.

Stap 3: Skryf die antwoord

$3 < \sqrt[3]{49} < 4$

Stap 4: Kontroleer die antwoord deur al die terme in die ongelykheid te verhef tot die mag drie en vereenvoudig dan

$27 < 49 < 64$. Dit is waar, dus $\sqrt[3]{49}$ lê tussen 3 en 4.

Oefening 1 – 3:

1. Bepaal tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{29}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt[3]{79}$ e) $\sqrt{155}$
   f) $\sqrt{57}$ g) $\sqrt{71}$ h) $\sqrt[3]{123}$ i) $\sqrt[3]{90}$ j) $\sqrt[3]{81}$

2. Evalueer die volgende wortelvorme tot die naaste 1 desimale plek, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{82}$ c) $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{90}$

3. Oorweeg die volgende lys van getalle:

   $\frac{27}{7}$; $\sqrt{19}$; 2π ; 0,45 ; $0{,}\overline{45}$; $-\sqrt{\frac{9}{4}}$; 6 ; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{51}$

   Orden al die getalle in toenemende grootte, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H2N 1b. 2H2P 1c. 2H2Q 1d. 2H2R 1e. 2H2S 1f. 2H2T 1g. 2H2V 1h. 2H2W
1i. 2H2X 1j. 2H2Y 2a. 2H2Z 2b. 2H32 2c. 2H33 2d. 2H34 3. 2H35

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.6 Produkte EMDB

Wiskundige uitdrukkings is net soos sinne en hulle dele het spesiale name. Jy moet bekend wees met die volgende woorde om die dele van wiskundige uitdrukkings te beskryf.

$$3x^2 + 7xy - 5^3$$

Naam	Voorbeelde
term	$3x^2$; $7xy$; -5^3
uitdrukking	$3x^2 + 7xy - 5^3$
koëffisiënt	3 ; 7
eksponent	2 ; 1 ; 3
grondtal	x ; y ; 5
konstante	3 ; 7 ; 5
veranderlike	x ; y
vergelyking	$3x^2 + 7xy - 5^3 = 0$

Vermenigvuldig 'n eenterm met 'n tweeterm EMDC

'n Eenterm is 'n uitdrukking met een term, byvoorbeeld, $3x$ of y^2. 'n Tweeterm is 'n uitdrukking met twee terme, byvoorbeeld, $ax + b$ of $cx + d$.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vereenvoudiging van hakies

VRAAG

Vereenvoudig:

$$2a(a-1) - 3\left(a^2 - 1\right)$$

OPLOSSING

$$\begin{aligned}2a\left(a-1\right)-3\left(a^2-1\right) &= 2a\left(a\right)+2a\left(-1\right)+\left(-3\right)\left(a^2\right)+\left(-3\right)\left(-1\right)\\ &= 2a^2-2a-3a^2+3\\ &= -a^2-2a+3\end{aligned}$$

Vermenigvuldig twee tweeterme met mekaar

EMDD

Hier vermenigvuldig ons twee lineêre tweeterme (of brei hulle uit):

$$(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{aligned}\left(ax+b\right)\left(cx+d\right) &= \left(ax\right)\left(cx\right)+\left(ax\right)d+b\left(cx\right)+bd\\ &= acx^2+adx+bcx+bd\\ &= acx^2+x\left(ad+bc\right)+bd\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Vermenigvuldig twee tweeterme met mekaar

VRAAG

Vind die produk: $\left(3x-2\right)\left(5x+8\right)$

OPLOSSING

$$\begin{aligned}\left(3x-2\right)\left(5x+8\right) &= \left(3x\right)\left(5x\right)+\left(3x\right)\left(8\right)+\left(-2\right)\left(5x\right)+\left(-2\right)\left(8\right)\\ &= 15x^2+24x-10x-16\\ &= 15x^2+14x-16\end{aligned}$$

Die produk van twee identiese tweeterme staan bekend as die vierkant van die tweeterm en word geskryf as:

$$\left(ax+b\right)^2 = a^2x^2+2abx+b^2$$

As die twee terme van die vorm $ax+b$ en $ax-b$ is, dan is hulle produk:

$$\left(ax+b\right)\left(ax-b\right) = a^2x^2-b^2$$

Die produk gee die verskil tussen twee vierkante.

Vermenigvuldig 'n tweeterm en 'n drieterm EMDF

'n Drieterm is 'n uitdrukking met drie terme, byvoorbeeld, $ax^2 + bx + c$. Nou kan ons leer hoe om 'n tweeterm en 'n drieterm met mekaar te vermenigvuldig.

Om die produk van 'n tweeterm met 'n drieterm te vind, vermenigvuldig die hakies uit:

$$(A + B)(C + D + E) = A(C + D + E) + B(C + D + E)$$

BESOEK:
Hierdie video toon sommige voorbeelde van die vermenigvuldiging van 'n tweeterm en 'n drieterm.
Sien video: 2H36 at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 9: Vermenigvuldig 'n tweeterm en 'n drieterm

VRAAG

Vind die produk: $(x - 1)\left(x^2 - 2x + 1\right)$

OPLOSSING

Stap 1: Brei die hakie uit

$$(x - 1)\left(x^2 - 2x + 1\right) = x\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1$$

Stap 2: Vereenvoudig

$$(x - 1)\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Oefening 1 – 4:

1. Brei die volgende produkte uit:

a) $2y(y + 4)$
b) $(y + 5)(y + 2)$
c) $(2 - t)(1 - 2t)$
d) $(x - 4)(x + 4)$
e) $-(4 - x)(x + 4)$
f) $-(a + b)(b - a)$
g) $(2p + 9)(3p + 1)$
h) $(3k - 2)(k + 6)$
i) $(s + 6)^2$
j) $-(7 - x)(7 + x)$
k) $(3x - 1)(3x + 1)$
l) $(7k + 2)(3 - 2k)$
m) $(1 - 4x)^2$
n) $(-3 - y)(5 - y)$
o) $(8 - x)(8 + x)$
p) $(9 + x)^2$
q) $(-7y + 11)(-12y + 3)$
r) $(g - 5)^2$
s) $(d + 9)^2$
t) $(6d + 7)(6d - 7)$
u) $(5z + 1)(5z - 1)$
v) $(1 - 3h)(1 + 3h)$
w) $(2p + 3)(2p + 2)$
x) $(8a + 4)(a + 7)$
y) $(5r + 4)(2r + 4)$
z) $(w + 1)(w - 1)$

2. Brei die volgende produkte uit:

a) $(g+11)(g-11)$
b) $(4b-2)(2b-4)$
c) $(4b-3)(2b-1)$
d) $(6x-4)(3x+6)$
e) $(3w-2)(2w+7)$
f) $(2t-3)^2$
g) $(5p-8)^2$
h) $(4y+5)^2$
i) $(2y^6+3y^5)(-5y-12)$
j) $9(8y^2-2y+3)$
k) $(-2y^2-4y+11)(5y-12)$
l) $(7y^2-6y-8)(-2y+2)$
m) $(10y+3)(-2y^2-11y+2)$
n) $(-12y-3)(2y^2-11y+3)$
o) $(-10)(2y^2+8y+3)$
p) $(7y+3)(7y^2+3y+10)$
q) $(a+2b)(a^2+b^2+2ab)$
r) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$
s) $3m(9m^2+2)+5m^2(5m+6)$
t) $4x^2(10x^3+4)+4x^3(2x^2+6)$
u) $3k^3(k^2+3)+2k^2(6k^3+7)$
v) $(3x+2)(3x-2)(9x^2-4)$
w) $(-6y^4+11y^2+3y)(y+4)(y-4)$
x) $(x+2)(x-3)(x^2+2x-3)$
y) $(a+2)^2-(2a-4)^2$

3. Brei die volgende produkte uit:

a) $(2x+3)^2-(x-2)^2$
b) $(2a^2-a-1)(a^2+3a+2)$
c) $(y^2+4y-1)(1-4y-y^2)$
d) $2(x-2y)(x^2+xy+y^2)$
e) $3(a-3b)(a^2+3ab-b^2)$
f) $(2a-b)(2a+b)(2a^2-3ab+b^2)$
g) $2(3x+y)(3x-y)-(3x-y)^2$
h) $(x+y)(x-3y)+(2x-y)^2$
i) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)$
j) $\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$
k) $\frac{1}{2}(10x-12y)+\frac{1}{3}(15x-18y)$
l) $\frac{1}{2}a(4a+6b)+\frac{1}{4}(8a+12b)$

4. Wat is die waarde van b, in $(x+b)(x-1)=x^2+3x-4$
5. Wat is die waarde van g, in $(x-2)(x+g)=x^2-6x+8$
6. In $(x-4)(x+k)=x^2+bx+c$:

a) Vir watter van hierdie waardes van k sal b positief wees?
$-3; -1; 0; 3; 5$
b) Vir watter van hierdie waardes van k sal c positief wees?
$-3; -1; 0; 3; 5$
c) Vir watter reële waardes van k sal c positief wees?
d) Vir watter waardes van k sal b positief wees?

7. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2$ uit.
b) Gegee dat $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2=14$, bepaal die waarde van $x^2+\frac{16}{x^2}$ sonder om x op te los.

8. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ uit.
b) Gegee dat $\left(a+\frac{1}{a}\right)=3$, bepaal die waarde van $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ sonder om a op te los.

c) Gegee dat $\left(a - \frac{1}{a}\right) = 3$, bepaal die waarde van $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ sonder om a op te los.

9. Antwoord die volgende:

   a) Brei $\left(3y + \frac{1}{2y}\right)^2$ uit.

   b) Gegee dat $3y + \frac{1}{2y} = 4$, bepaal die waarde van $\left(3y + \frac{1}{2y}\right)^2$ sonder om y op te los.

10. Antwoord die volgende:

    a) Brei $\left(a + \frac{1}{3a}\right)^2$ uit.

    b) Brei $\left(a + \frac{1}{3a}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9a^2}\right)$ uit.

    c) Gegee dat $a + \frac{1}{3a} = 2$, bepaal die waarde van $a^3 + \frac{1}{27a^3}$ sonder om a op te los.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H37	1b. 2H38	1c. 2H39	1d. 2H3B	1e. 2H3C	1f. 2H3D	1g. 2H3F
1h. 2H3G	1i. 2H3H	1j. 2H3J	1k. 2H3K	1l. 2H3M	1m. 2H3N	1n. 2H3P
1o. 2H3Q	1p. 2H3R	1q. 2H3T	1r. 2H3V	1s. 2H3W	1t. 2H3X	1u. 2H3Y
1v. 2H3Z	1w. 2H42	1x. 2H43	1y. 2H44	1z. 2H45	2a. 2H46	2b. 2H48
2c. 2H49	2d. 2H4B	2e. 2H4C	2f. 2H4D	2g. 2H4F	2h. 2H4G	2i. 2H3S
2j. 2H4H	2k. 2H4J	2l. 2H4K	2m. 2H4M	2n. 2H4N	2o. 2H4P	2p. 2H4Q
2q. 2H4R	2r. 2H4S	2s. 2H4T	2t. 2H4V	2u. 2H4W	2v. 2H4X	2w. 2H4Y
2x. 2H4Z	2y. 2H52	3a. 2H53	3b. 2H54	3c. 2H55	3d. 2H56	3e. 2H57
3f. 2H58	3g. 2H59	3h. 2H5B	3i. 2H5C	3j. 2H5D	3k. 2H5F	3l. 2H5G
4. 2H5H	5. 2H5J	6. 2H5K	7. 2H5M	8. 2H5N	9. 2H5P	10. 2H5Q

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.7 Faktorisering EMDG

Faktorisering is die omgekeerde proses van die uitbreiding van hakies. Byvoorbeeld, uitbreiding van hakies sal vereis dat $2(x + 1)$ geskryf word as $2x + 2$. Faktorisering sal wees om te begin met $2x + 2$ en te eindig met $2(x + 1)$.

$$\begin{tikzcd} 2(x+1) \arrow[r, bend right, "\text{uitbreiding}"'] & 2x+2 \arrow[l, bend right, "\text{faktorisering}"'] \end{tikzcd}$$

Die twee uitdrukkings, $2(x + 1)$ en $2x + 2$, is ekwivalent, dus het hulle dieselfde waarde vir alle waardes van x.

In vorige grade het ons gefaktoriseer deur die uithaal van 'n gemeenskaplike faktor en deur die gebruik van die verskil tussen vierkante.

Gemeenskaplike, of gemene, faktore

EMDH

Faktorisering, gebaseer op gemene faktore, berus daarop dat daar faktore is wat gemeenskaplik is aan al die terme.

Byvoorbeeld, $2x - 6x^2$ kan as volg gefaktoriseer word:

$$2x - 6x^2 = 2x(1 - 3x)$$

En $2(x - 1) - a(x - 1)$ kan as volg gefaktoriseer word:

$$(x - 1)(2 - a)$$

BESOEK:
Die volgende video toon 'n voorbeeld van faktorisering deur die uithaal van 'n gemene faktor.
Sien video: 2H5R at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 10: Faktorisering deur die gebruik van omruiling in die hakies

VRAAG

Faktoriseer:

$$5(a - 2) - b(2 - a)$$

OPLOSSING

Gebruik die "omruilings strategie" om die gemeenskaplike faktor te vind.

Toon aan dat $2 - a = -(a - 2)$

$$\begin{aligned} 5(a - 2) - b(2 - a) &= 5(a - 2) - [-b(a - 2)] \\ &= 5(a - 2) + b(a - 2) \\ &= (a - 2)(5 + b) \end{aligned}$$

Oefening 1 – 5:

Faktoriseer:

1. $12x + 32y$
2. $-2ab^2 - 4a^2b$
3. $18ab - 3bc$
4. $12kj + 18kq$
5. $-12a + 24a^3$
6. $-2ab - 8a$
7. $24kj - 16k^2j$
8. $-a^2b - b^2a$
9. $72b^2q - 18b^3q^2$
10. $125x^6 - 5y^2$
11. $6x^2 + 2x + 10x^3$
12. $2xy^2 + xy^2z + 3xy$
13. $12k^2j + 24k^2j^2$
14. $3a^2 + 6a - 18$
15. $7a + 4$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H5S 2. 2H5T 3. 2H5V 4. 2H5W 5. 2H5X 6. 2H5Y 7. 2H5Z 8. 2H62
9. 2H63 10. 2H64 11. 2H65 12. 2H66 13. 2H67 14. 2H68 15. 2H69

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Verskil van twee vierkante

EMDJ

Ons het gesien dat $(ax+b)(ax-b)$ uitgebrei kan word na $a^2x^2 - b^2$.

Dus $a^2x^2 - b^2$ kan gefaktoriseer word as $(ax+b)(ax-b)$.

Byvoorbeeld, $x^2 - 16$ kan geskryf word as $x^2 - 4^2$, wat die verskil is tussen twee vierkante. Dus, die faktore van $x^2 - 16$ is $(x-4)$ en $(x+4)$.

Om 'n verskil tussen twee vierkante raak te sien, kyk vir uitdrukkings:

- wat uit twee terme bestaan;
- wat terme het met verskillende tekens (een positief, een negatief);
- wat terme bevat wat beide volkome vierkante is.

Byvoorbeeld: $a^2 - 1$; $4x^2 - y^2$; $-49 + p^4$.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik die faktorisering van die verskil tussen twee vierkante.
Sien video: 2H6B at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 11: Die verskil tussen twee vierkante

VRAAG

Faktoriseer: $3a(a^2-4) - 7(a^2-4)$.

OPLOSSING

Stap 1: Haal die gemeenskaplike faktor (a^2-4) uit

$$3a(a^2-4) - 7(a^2-4) = (a^2-4)(3a-7)$$

Stap 2: Faktoriseer die verskil tussen twee vierkante (a^2-4)

$$(a^2-4)(3a-7) = (a-2)(a+2)(3a-7)$$

Oefening 1 – 6:

Faktoriseer:

1. $4(y-3) + k(3-y)$
2. $a^2(a-1) - 25(a-1)$
3. $bm(b+4) - 6m(b+4)$
4. $a^2(a+7) + 9(a+7)$
5. $3b(b-4) - 7(4-b)$
6. $3g(z+6) + 2(6+z)$
7. $4b(y+2) + 5(2+y)$
8. $3d(r+5) + 14(5+r)$
9. $(6x+y)^2 - 9$
10. $4x^2 - (4x-3y)^2$
11. $16a^2 - (3b+4c)^2$
12. $(b-4)^2 - 9(b-5)^2$

13. $4(a-3)^2 - 49(4a-5)$

14. $16k^2 - 4$

15. $a^2b^2c^2 - 1$

16. $\frac{1}{9}a^2 - 4b^2$

17. $\frac{1}{2}x^2 - 2$

18. $y^2 - 8$

19. $y^2 - 13$

20. $a^2(a - 2ab - 15b^2) - 9b^2(a^2 - 2ab - 15b^2)$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H6C 2. 2H6D 3. 2H6F 4. 2H6G 5. 2H6H 6. 2H6J
7. 2H6K 8. 2H6M 9. 2H6N 10. 2H6P 11. 2H6Q 12. 2H6R
13. 2H6S 14. 2H6T 15. 2H6V 16. 2H6W 17. 2H6X 18. 2H6Y
19. 2H6Z 20. 2H72

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Faktorisering deur groepering in pare EMDK

Die uithaal van gemene faktore is die vertrekpunt van alle faktoriseringsprobleme. Ons weet die faktore van $3x + 3$ is 3 en $(x + 1)$. Soortgelyk, die faktore van $2x^2 + 2x$ is $2x$ en $(x + 1)$. Dus, as ons 'n uitdrukking het:

$$2x^2 + 2x + 3x + 3$$

dan is daar geen gemene faktor van al vier die terme nie, maar ons kan as volg faktoriseer:

$$\left(2x^2 + 2x\right) + (3x + 3) = 2x\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$$

Ons kan sien daar is 'n ander gemene faktor $(x + 1)$. Dus, ons kan skryf:

$$(x + 1)\,(2x + 3)$$

Ons kry dit deur die $(x + 1)$ uit te haal en te sien wat oorbly. Ons het $2x$ van die eerste term en $+3$ van die tweede term. Dit word genoem faktorisering deur groepering.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Faktorisering deur groepering in pare

VRAAG

Vind die faktore van $7x + 14y + bx + 2by$.

OPLOSSING

Stap 1: Daar is geen faktore gemeenskaplik aan al die terme nie

Stap 2: Groepeer terme met gemene faktore bymekaar

7 is 'n gemeenskaplike faktor van die eerste twee terme en b is 'n gemeenskaplike faktor van die laaste twee terme. Ons sien dat die ratio of verhouding van die koëffisiënte $7 : 14$ dieselfde is as $b : 2b$.

$$\begin{aligned} 7x + 14y + bx + 2by &= (7x + 14y) + (bx + 2by) \\ &= 7\,(x + 2y) + b\,(x + 2y) \end{aligned}$$

Stap 3: Haal die gemeenskaplike faktor $(x + 2y)$ uit

$$7(x + 2y) + b(x + 2y) = (x + 2y)(7 + b)$$

OF

Stap 4: Groepeer terme met gemene faktore bymekaar

x is 'n gemeenskaplike faktor van die eerste en die derde terme en $2y$ is 'n gemeenskaplike faktor van die tweede en vierde terme $(7 : b = 14 : 2b)$.

Stap 5: Herrangskik die uitdrukking met die gegroepeerde terme saam

$$\begin{aligned} 7x + 14y + bx + 2by &= (7x + bx) + (14y + 2by) \\ &= x(7 + b) + 2y(7 + b) \end{aligned}$$

Stap 6: Haal die gemeenskaplike faktor $(7 + b)$ uit

$$x(7 + b) + 2y(7 + b) = (7 + b)(x + 2y)$$

Stap 7: Skryf die finale antwoord

Die faktore van $7x + 14y + bx + 2by$ is $(7 + b)$ en $(x + 2y)$.

Oefening 1 – 7:

Faktoriseer die volgende:

1. $6d - 9r + 2t^5d - 3t^5r$
2. $9z - 18m + b^3z - 2b^3m$
3. $35z - 10y + 7c^5z - 2c^5y$
4. $6x + a + 2ax + 3$
5. $x^2 - 6x + 5x - 30$
6. $5x + 10y - ax - 2ay$
7. $a^2 - 2a - ax + 2x$
8. $5xy - 3y + 10x - 6$
9. $ab - a^2 - a + b$
10. $14m - 4n + 7jm - 2jn$
11. $28r - 20x + 7gr - 5gx$
12. $25d - 15m + 5yd - 3ym$
13. $45q - 18z + 5cq - 2cz$
14. $6j - 15v + 2yj - 5yv$
15. $16a - 40k + 2za - 5zk$
16. $ax - bx + ay - by + 2a - 2b$
17. $3ax + bx - 3ay - by - 9a - 3b$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H73	2. 2H74	3. 2H75	4. 2H76	5. 2H77	6. 2H78
7. 2H79	8. 2H7B	9. 2H7C	10. 2H7D	11. 2H7F	12. 2H7G
13. 2H7H	14. 2H7J	15. 2H7K	16. 2H7M	17. 2H7N	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Faktorisering is die omgekeerde van die berekening van die produk van faktore. Ten einde 'n volkome vierkant te faktoriseer, moet ons die faktore vind wat, wanneer hulle saam vermenigvuldig word, gelyk is aan die oorspronklike kwadraat.

Oorweeg 'n kwadratiese uitdrukking van die vorm $ax^2 + bx$. Ons sien hier dat x 'n gemene faktor is in beide terme. Dus $ax^2 + bx$ faktoriseer as $x(ax + b)$. Byvoorbeeld, $8y^2 + 4y$ faktoriseer as $4y(2y + 1)$.

'n Ander tipe vierkant is saamgestel uit die verskil tussen twee vierkante. Ons weet dat:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

So, $a^2 - b^2$ kan in gefaktoriseerde vorm geskryf word as $(a + b)(a - b)$.

Dit beteken dat wanneer ons te doen kry met 'n vierkant wat bestaan uit die verskil tussen vierkante, kan ons onmiddellik die faktore neerskryf. Hierdie tipe vierkante is baie eenvoudig om te faktoriseer. Maar, baie vierkante val nie in hierdie kategorieë nie en ons het 'n meer algemene metode nodig om kwadratiese uitdrukkings te faktoriseer.

Ons kan leer oor die faktorisering van kwadrate deur te kyk na die teenoorgestelde proses waar twee tweeterme vermenigvuldig word om 'n kwadratiese uitdrukking te vorm.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

Ons sien die x^2 term in die kwadratiese uitdrukking is die produk van die x-terme in elke hakie. Soortgelyk, die 6 in die kwadratiese drieterm is die produk van die 2 en 3 in die hakies. Uiteindelik is die middelterm die som van twee terme.

Dus, hoe gebruik ons hierdie inligting om die kwadratiese uitdrukking te faktoriseer?

Laat ons begin om $x^2 + 5x + 6$ te faktoriseer en kyk of ons op sekere algemene riglyne kan besluit. Eerstens, skryf twee hakies neer met 'n x in elke hakie en spasie vir die oorblywende terme.

$$(x \qquad)(x \qquad)$$

Vervolgens, besluit op die faktore van 6. Aangesien 6 positief is, is moontlike kombinasies: 1 en 6, 2 en 3, -1 en -6 of -2 en -3.

Dus het ons vier moontlikhede:

Opsie 1	**Opsie 2**	**Opsie 3**	**Opsie 4**
$(x + 1)(x + 6)$	$(x - 1)(x - 6)$	$(x + 2)(x + 3)$	$(x - 2)(x - 3)$

Vervolgens brei ons elke stel hakies uit om te sien watter opsie gee vir ons die korrekte middelterm.

Opsie 1	**Opsie 2**	**Opsie 3**	**Opsie 4**
$(x + 1)(x + 6)$	$(x - 1)(x - 6)$	$(x + 2)(x + 3)$	$(x - 2)(x - 3)$
$x^2 + 7x + 6$	$x^2 - 7x + 6$	$\underline{x^2 + 5x + 6}$	$x^2 - 5x + 6$

Ons sien dat Opsie 3, $(x + 2)(x + 3)$, die korrekte oplossing is.

Die proses van faktorisering van 'n kwadratiese drieterm is meestal probeer en tref maar daar is sommige strategieë wat ons kan gebruik om die proses te vergemaklik.

Algemene prosedure vir die faktorisering van 'n drieterm EMDN

1. Haal alle gemene faktore in die koëffisiënte uit ten einde 'n uitdrukking te kry van die vorm $ax^2 + bx + c$ waar a, b en c geen gemene faktore het nie en a positief is.
2. Skryf twee hakies neer met 'n x in elke hakie en spasie vir die oorblywende terme:

$$(x \quad)(x \quad)$$

3. Skryf 'n stel faktore neer vir a en c.
4. Skryf nou 'n stel opsies neer vir die moontlike faktore van die kwadratiese drieterm deur die gebruik van die faktore van a en c.
5. Brei alle opsies uit om te sien watter een gee die korrekte middelterm bx.

BELANGRIK!

As c positief is, dan moet die faktore van c albei positief of albei negatief wees. As c negatief is, beteken dit slegs een van die faktore van c is negatief, en die ander een is positief. Wanneer jy 'n antwoord gekry het, vermenigvuldig altyd jou hakies weer uit om seker te maak dat dit regtig werk.

BESOEK:
Die volgende video som op hoe om uitdrukkings te faktoriseer en wys 'n aantal voorbeelde.
Sien video: 2H7P at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 13: Faktoriseer 'n kwadratiese drieterm

VRAAG

Faktoriseer: $3x^2 + 2x - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Kontroleer dat die kwadratiese drieterm in die verlangde formaat is $ax^2 + bx + c$

Stap 2: Skryf 'n stel faktore neer vir a en c

$$(x \quad)(x \quad)$$

Die moontlike faktore vir a is: 1 en 3

Die moontlike faktore vir c is: −1 en 1

Skryf 'n stel opsies neer vir die moontlike faktore van die kwadratiese drieterm deur die gebruik van die faktore van a en c. Dus, daar is twee moontlike opsies.

Opsie 1	Opsie 2
$(x-1)(3x+1)$	$(x+1)(3x-1)$
$3x^2 - 2x - 1$	$\underline{3x^2 + 2x - 1}$

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing korrek is deur die vermenigvuldiging van die faktore

$$\begin{aligned}(x+1)(3x-1) &= 3x^2 - x + 3x - 1 \\ &= 3x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$

Oefening 1 – 8:

Faktoriseer die volgende:

1. $x^2 + 8x + 15$	2. $x^2 + 9x + 8$	3. $x^2 + 12x + 36$
4. $2h^2 + 5h - 3$	5. $3x^2 + 4x + 1$	6. $3s^2 + s - 10$
7. $x^2 - 2x - 15$	8. $x^2 + 2x - 3$	9. $x^2 + x - 20$
10. $x^2 - x - 20$	11. $2x^2 - 22x + 20$	12. $6a^2 + 14a + 8$
13. $6v^2 - 27v + 27$	14. $6g^2 - 15g - 9$	15. $3x^2 + 19x + 6$
16. $3x^2 + 17x - 6$	17. $7x^2 - 6x - 1$	18. $6x^2 - 15x - 9$
19. $a^2 - 7ab + 12b$	20. $3a^2 + 5ab - 12b^2$	21. $98x^4 + 14x^2 - 4$
22. $(x-2)^2 - 7(x-2) + 12$	23. $(a-2)^2 - 4(a-2) - 5$	24. $(y+3)^2 - 3(y+3) - 18$
25. $3(b^2 + 5b) + 12$	26. $6(a^2 + 3a) - 168$	

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H7Q	2. 2H7R	3. 2H7S	4. 2H7T	5. 2H7V	6. 2H7W
7. 2H7X	8. 2H7Y	9. 2H7Z	10. 2H82	11. 2H83	12. 2H84
13. 2H85	14. 2H86	15. 2H87	16. 2H88	17. 2H89	18. 2H8B
19. 2H8C	20. 2H8D	21. 2H8F	22. 2H8G	23. 2H8H	24. 2H8J
25. 2H8K	26. 2H8M				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Som en verskil van twee derdemagte EMDP

Ons kyk nou twee spesiale resultate wat verkry word deur die vermenigvuldiging van 'n tweeterm en 'n drieterm:

Som van twee derdemagte:

$$\begin{aligned}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) &= x\left(x^2-xy+y^2\right)+y\left(x^2-xy+y^2\right)\\ &= \left[x\left(x^2\right)+x\left(-xy\right)+x\left(y^2\right)\right]+\left[y\left(x^2\right)+y\left(-xy\right)+y\left(y^2\right)\right]\\ &= x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3\end{aligned}$$

Verskil van twee derdemagte:

$$\begin{aligned}(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) &= x\left(x^2+xy+y^2\right)-y\left(x^2+xy+y^2\right)\\ &= \left[x\left(x^2\right)+x\left(xy\right)+x\left(y^2\right)\right]-\left[y\left(x^2\right)+y\left(xy\right)+y\left(y^2\right)\right]\\ &= x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3\end{aligned}$$

Dus het ons gesien dat:

$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\\ x^3-y^3 &= (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)\end{aligned}$$

Ons gebruik hierdie twee basiese identiteite om die meer komplekse voorbeelde te faktoriseer.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Faktoriseer die verskil van twee derdemagte

VRAAG

Faktoriseer: $a^3 - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Neem die derdemagswortels van die terme wat volkome derdemagte is

Ons werk met die verskil tussen twee derdemagte. Ons weet $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$, dus moet ons x en y identifiseer.

Ons begin deur op te let $\sqrt[3]{a^3} = a$ en $\sqrt[3]{1} = 1$. Hierdie gee die terme in die eerste hakie. Dit vertel ook vir ons dat $x = a$ en $y = 1$.

Stap 2: Vind die drie terme in die tweede hakie

Ons kan x en y vervang in die gefaktoriseerde vorm van die uitdrukking vir die verskil tussen twee derdemagte met a en 1. Deur dit te doen, kry ons die tweede hakie:

$$\left(a^3 - 1\right) = (a - 1)\left(a^2 + a + 1\right)$$

Stap 3: Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking korrek gefaktoriseer is

$$\begin{aligned}(a - 1)\left(a^2 + a + 1\right) &= a\left(a^2 + a + 1\right) - 1\left(a^2 + a + 1\right)\\ &= a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1\\ &= a^3 - 1\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 15: Faktoriseer die som van twee derdemagte

VRAAG

Faktoriseer: $x^3 + 8$.

OPLOSSING

Stap 1: Neem die derdemagswortels van die terme wat volkome derdemagte is

Ons werk met die som van twee derdemagte. Ons weet dat $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$, dus moet ons x en y identifiseer.

Ons begin deur op te let $\sqrt[3]{x^3} = x$ en $\sqrt[3]{8} = 2$. Hierdie gee die terme in die eerste hakie. Dit vertel ook vir ons dat $x = x$ en $y = 2$.

Stap 2: Vind die drie terme in die tweede hakie

Ons kan x en y vervang in die gefaktoriseerde vorm van die uitdrukking vir die som van twee derdemagte met x en 2. Deur dit te doen, kry ons die tweede hakie:

$$\left(x^3 + 8\right) = (x + 2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$$

Stap 3: Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking korrek gefaktoriseer is

$$\begin{aligned}(x+2)\left(x^2-2x+4\right) &= x\left(x^2-2x+4\right)+2\left(x^2-2x+4\right)\\ &= x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8\\ &= x^3+8\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 16: Faktoriseer die verskil van twee derdemagte

VRAAG

Faktoriseer: $16y^3-432$.

OPLOSSING

Stap 1: Haal die gemene faktor van 16 uit

$$16y^3-432 = 16\left(y^3-27\right)$$

Stap 2: Neem die derdemagswortels van die terme wat volkome derdemagte is

Ons werk met die verskil tussen twee derdemagte. Ons weet $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$, dus moet ons x en y identifiseer.

Ons begin deur op te let $\sqrt[3]{y^3}=y$ en $\sqrt[3]{27}=3$. Hierdie gee die terme in die eerste hakie. Dit vertel ook vir ons dat $x=y$ en $y=3$.

Stap 3: Vind die drie terme in die tweede hakie

Ons kan x en y vervang in die gefaktoriseerde vorm van die uitdrukking vir die verskil tussen twee derdemagte met y en 3. Deur dit te doen, kry ons die tweede hakie:

$$16\left(y^3-27\right) = 16(y-3)\left(y^2+3y+9\right)$$

Stap 4: Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking korrek gefaktoriseer is

$$\begin{aligned}16(y-3)(y^2+3y+9) &= 16[(y(y^2+3y+9)-3(y^2+3y+9)]\\ &= 16[y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27]\\ &= 16y^3-432\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Faktoriseer die som van twee derdemagte

VRAAG

Faktoriseer: $8t^3+125p^3$.

OPLOSSING

Stap 1: Neem die derdemagswortels van die terme wat volkome derdemagte is

Ons werk met die som van twee derdemagte. Ons weet dat $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$, dus moet ons x en y identifiseer.

Ons begin deur op te let $\sqrt[3]{8t^3} = 2t$ en $\sqrt[3]{125p^3} = 5p$. Hierdie gee die terme in die eerste hakie. Dit vertel ook vir ons dat $x = 2t$ en $y = 5p$.

Stap 2: Vind die drie terme in die tweede hakie

Ons kan x en y in die gefaktoriseerde vorm van die uitdrukking vir die verskil tussen twee derdemagte vervang met $2t$ en $5p$. Deur dit te doen, kry ons die tweede hakie:

$$\begin{aligned}\left(8t^3 + 125p^3\right) &= (2t + 5p)\left[(2t)^2 - (2t)(5p) + (5p)^2\right] \\ &= (2t + 5p)\left(4t^2 - 10tp + 25p^2\right)\end{aligned}$$

Stap 3: Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking korrek gefaktoriseer is

$$\begin{aligned}(2t + 5p)\left(4t^2 - 10tp + 25p^2\right) &= 2t\left(4t^2 - 10tp + 25p^2\right) + 5p\left(4t^2 - 10tp + 25p^2\right) \\ &= 8t^3 - 20pt^2 + 50p^2t + 20pt^2 - 50p^2t + 125p^3 \\ &= 8t^3 + 125p^3\end{aligned}$$

Oefening 1 – 9:

Faktoriseer:

1. $w^3 - 8$
2. $g^3 + 64$
3. $h^3 + 1$
4. $x^3 + 8$
5. $27 - m^3$
6. $2x^3 - 2y^3$
7. $3k^3 + 81q^3$
8. $64t^3 - 1$
9. $64x^2 - 1$
10. $125x^3 + 1$
11. $25x^3 + 1$
12. $z - 125z^4$
13. $8m^6 + n^9$
14. $216n^3 - k^3$
15. $125s^3 + d^3$
16. $8k^3 + r^3$
17. $8j^3k^3l^3 - b^3$
18. $27x^3y^3 + w^3$
19. $128m^3 + 2f^3$
20. $p^{15} - \dfrac{1}{8}y^{12}$
21. $\dfrac{27}{t^3} - s^3$
22. $\dfrac{1}{64q^3} - h^3$
23. $72g^3 + \dfrac{1}{3}v^3$
24. $1 - (x - y)^3$
25. $h^4(8g^6 + h^3) - (8g^6 + h^3)$
26. $x(125w^3 - h^3) + y(125w^3 - h^3)$

27. $x^2(27p^3 + w^3) - 5x(27p^3 + w^3) - 6(27p^3 + w^3)$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H8N	2. 2H8P	3. 2H8Q	4. 2H8R	5. 2H8S	6. 2H8T	7. 2H8V	8. 2H8W
9. 2H8X	10. 2H8Y	11. 2H8Z	12. 2H92	13. 2H93	14. 2H94	15. 2H95	16. 2H96
17. 2H97	18. 2H98	19. 2H99	20. 2H9B	21. 2H9C	22. 2H9D	23. 2H9F	24. 2H9G
25. 2H9H	26. 2H9J	27. 2H9K					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.8 Vereenvoudiging van breuke EMDQ

Ons het prosedures vir bewerkings met breuke in vorige grade bestudeer.

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (b \neq 0; d \neq 0)$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (b \neq 0)$
3. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad (b \neq 0; c \neq 0; d \neq 0)$

Nota: deling deur 'n breuk is dieselfde as vermenigvuldiging met die resiprook van die breuk.

In sommige gevalle van die vereenvoudiging van 'n algebraïese uitdrukking, sal die uitdrukking 'n breuk wees. Byvoorbeeld,

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 3}$$

het 'n kwadratiese tweeterm in die teller en 'n lineêre tweeterm in die noemer. Ons moet die verskillende faktoriseringsmetodes toepas ten einde die teller en die noemer te faktoriseer voor ons die uitdrukking kan vereenvoudig.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{x + 3} &= \frac{x(x+3)}{x+3} \\ &= x \qquad (x \neq -3) \end{aligned}$$

As $x = -3$ dan is die noemer, $x + 3 = 0$ en die breuk is ongedefinieerd.

BESOEK:
Hierdie video toon sommige voorbeelde van die vereenvoudiging van breuke.
Sien video: 2H9M at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 18: Vereenvoudiging van breuke

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{ax - b + x - ab}{ax^2 - abx}, \quad (x \neq 0; x \neq b)$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik groepering om die teller te faktoriseer en haal die gemeenskaplike faktor ax in die noemer uit

$$\frac{(ax - ab) + (x - b)}{ax^2 - abx} = \frac{a(x - b) + (x - b)}{ax(x - b)}$$

Stap 2: Haal die gemene faktor $(x - b)$ in die teller uit

$$= \frac{(x - b)(a + 1)}{ax(x - b)}$$

Stap 3: Kanselleer die gemene faktor in die teller en die noemer om die finale antwoord te gee

$$= \frac{a + 1}{ax}$$

Uitgewerkte voorbeeld 19: Vereenvoudiging van breuke

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \div \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x}, \quad (x \neq 0; x \neq \pm 2)$$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die teller en die noemer

$$= \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \div \frac{x(x + 1)}{x(x + 2)}$$

Stap 2: Verander die deelteken en vermenigvuldig met die resiprook

$$= \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \times \frac{x(x + 2)}{x(x + 1)}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$= 1$$

Uitgewerkte voorbeeld 20: Vereenvoudiging van breuke

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{x - 2}{x^2 - 4} + \frac{x^2}{x - 2} - \frac{x^3 + x - 4}{x^2 - 4}, \quad (x \neq \pm 2)$$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die noemers

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x^2}{x-2}-\frac{x^3+x-4}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 2: Maak al die noemers dieselfde sodat ons die breuke kan optel of aftrek

Die kleinste gemene noemer is $(x-2)(x+2)$.

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{\left(x^2\right)(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^3+x-4}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 3: Skryf as een breuk

$$\frac{x-2+\left(x^2\right)(x+2)-\left(x^3+x-4\right)}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 4: Vereenvoudig

$$\frac{x-2+x^3+2x^2-x^3-x+4}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x^2+2}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 5: Haal die gemene faktor uit en skryf die finale antwoord

$$\frac{2\left(x^2+1\right)}{(x+2)(x-2)}$$

Uitgewerkte voorbeeld 21: Vereenvoudiging van breuke

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{2}{x^2-x}+\frac{x^2+x+1}{x^3-1}-\frac{x}{x^2-1}, \quad (x\neq 0; x\neq \pm 1)$$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die teller en die noemer

$$\frac{2}{x(x-1)}+\frac{\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}-\frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Stap 2: Vereenvoudig en vind die gemene noemer

$$\frac{2(x+1)+x(x+1)-x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$\frac{2x+2+x^2+x-x^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3x+2}{x(x-1)(x+1)}$$

Oefening 1 – 10:

1. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul)

a) $\frac{3a}{15}$
b) $\frac{2a+10}{4}$
c) $\frac{5a+20}{a+4}$
d) $\frac{a^2-4a}{a-4}$
e) $\frac{3a^2-9a}{2a-6}$
f) $\frac{9a+27}{9a+18}$
g) $\frac{6ab+2a}{2b}$
h) $\frac{16x^2y-8xy}{12x-6}$
i) $\frac{4xyp-8xp}{12xy}$
j) $\frac{9x^2-16}{6x-8}$
k) $\frac{b^2-81a^2}{18a-2b}$
l) $\frac{t^2-s^2}{s^2-2st+t^2}$
m) $\frac{x^2-2x-15}{5x-25}$
n) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$
o) $\frac{x^2-x-6}{x^3-27}$
p) $\frac{a^2+6a-16}{a^3-8}$
q) $\frac{a^2-4ab-12b^2}{a^2+4ab+4b^2}$
r) $\frac{6a^2-7a-3}{3ab+b}$
s) $\frac{2x^2-x-1}{x^3-x}$
t) $\frac{qz+qr+16z+16r}{z+r}$
u) $\frac{pz-pq+5z-5q}{z-q}$
v) $\frac{hx-hg+13x-13g}{x-g}$
w) $\frac{f^2a-fa^2}{f-a}$

2. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul).

a) $\frac{b^2+10b+21}{3(b^2-9)} \div \frac{2b^2+14b}{30b^2-90b}$
b) $\frac{x^2+17x+70}{5(x^2-100)} \div \frac{3x^2+21x}{45x^2-450x}$
c) $\frac{z^2+17z+66}{3(z^2-121)} \div \frac{2z^2+12z}{24z^2-264z}$
d) $\frac{3a+9}{14} \div \frac{7a+21}{a+3}$
e) $\frac{a^2-5a}{2a+10} \times \frac{4a}{3a+15}$
f) $\frac{3xp+4p}{8p} \div \frac{12p^2}{3x+4}$
g) $\frac{24a-8}{12} \div \frac{9a-3}{6}$
h) $\frac{a^2+2a}{5} \div \frac{2a+4}{20}$
i) $\frac{p^2+pq}{7p} \times \frac{21q}{8p+8q}$
j) $\frac{5ab-15b}{4a-12} \div \frac{6b^2}{a+b}$
k) $\frac{16-x^2}{x^2-x-12} \times \frac{x+3}{x+4}$
l) $\frac{a^3+b^3}{a^3} \times \frac{5a+5b}{a^2+2ab+b^2}$
m) $\frac{a-4}{a+5a+4} \times \frac{a^2+2a+1}{a^2-3a-4}$
n) $\frac{3x+2}{x^2-6x+8} \times \frac{x-2}{3x^2+8x+4}$
o) $\frac{a^2-2a+8}{a^2+6a+8} \times \frac{a^2+a-12}{3} - \frac{3}{2}$
p) $\frac{4x^2-1}{3x^2+10x+3} \div \frac{6x^2+5x+1}{4x^2+7x-3} \times \frac{9x^2+6x+1}{8x^2-6x+1}$
q) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-2}{2}$
r) $\frac{p^3+q^3}{p^2} \times \frac{3p-3q}{p^2-q^2}$

3. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul).

a) $\frac{x-3}{3} - \frac{x+5}{4}$
b) $\frac{2x-4}{9} - \frac{x-3}{4} + 1$
c) $1 + \frac{3x-4}{4} - \frac{x+2}{3}$
d) $\frac{11}{a+11} + \frac{8}{a-8}$
e) $\frac{12}{x-12} - \frac{6}{x-6}$
f) $\frac{12}{r+12} + \frac{8}{r-8}$
g) $\frac{2}{xy} + \frac{4}{xz} + \frac{3}{yz}$
h) $\frac{5}{t-2} - \frac{1}{t-3}$
i) $\frac{k+2}{k^2+2} - \frac{1}{k+2}$
j) $\frac{t+2}{3q} + \frac{t+1}{2q}$

k) $\dfrac{3}{p^2-4} + \dfrac{2}{(p-2)^2}$

l) $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{x^2}{y^2-x^2}$

m) $\dfrac{1}{m+n} + \dfrac{3mn}{m^3+n^3}$

n) $\dfrac{h}{h^3-f^3} - \dfrac{1}{h^2+hf+f^2}$

o) $\dfrac{x^2-1}{3} \times \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}$

p) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} - \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$

q) $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2x}{x^3-1}$

r) $\dfrac{t^2+2t-8}{t^2+t-6} + \dfrac{1}{t^2-9} + \dfrac{t+1}{t-3}$

s) $\dfrac{x^2-3x+9}{x^3+27} + \dfrac{x-2}{x^2+4x+3} - \dfrac{1}{x-2}$

t) $\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2} + \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3-8b^3} - \dfrac{1}{a^2-4b^2}$

4. Wat is die beperkings in die volgende:

a) $\dfrac{1}{x-2}$

b) $\dfrac{3x-9}{4x+4}$

c) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2-1}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H9N	1b. 2H9P	1c. 2H9Q	1d. 2H9R	1e. 2H9S	1f. 2H9T
1g. 2H9V	1h. 2H9W	1i. 2H9X	1j. 2H9Y	1k. 2H9Z	1l. 2HB2
1m. 2HB3	1n. 2HB4	1o. 2HB5	1p. 2HB6	1q. 2HB7	1r. 2HB8
1s. 2HB9	1t. 2HBB	1u. 2HBC	1v. 2HBD	1w. 2HBF	2a. 2HBG
2b. 2HBH	2c. 2HBJ	2d. 2HBK	2e. 2HBM	2f. 2HBN	2g. 2HBP
2h. 2HBQ	2i. 2HBR	2j. 2HBS	2k. 2HBT	2l. 2HBV	2m. 2HBW
2n. 2HBX	2o. 2HBY	2p. 2HBZ	2q. 2HC2	2r. 2HC3	3a. 2HC4
3b. 2HC5	3c. 2HC6	3d. 2HC7	3e. 2HC8	3f. 2HC9	3g. 2HCB
3h. 2HCC	3i. 2HCD	3j. 2HCF	3k. 2HCG	3l. 2HCH	3m. 2HCJ
3n. 2HCK	3o. 2HCM	3p. 2HCN	3q. 2HCP	3r. 2HCQ	3s. 2HCR
3t. 2HCS	4a. 2HCT	4b. 2HCV	4c. 2HCW		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.9 Hoofstuk opsomming EMDR

Sien aanbieding: 2HCX at www.everythingmaths.co.za

-
  - $\mathbb{N}$: natuurlike getalle is $\{1; 2; 3; \ldots\}$
  - $\mathbb{N}_0$: telgetalle is $\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
  - $\mathbb{Z}$: heelgetalle is $\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$
- 'n Rasionale getal is enige getal wat geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b heelgetalle is en $b \neq 0$.
- Die volgende is rasionale getalle:
  - Breuke met beide die teller en die noemer as heelgetalle.
  - Heelgetalle.
  - Desimale getalle wat eindig.
  - Desimale getalle wat herhaal (repeterend is).
- Irrasionale getalle is getalle wat nie geskryf kan word as 'n breuk met die teller en die noemer as heelgetalle nie.

- As die n^{de} wortel van 'n getal nie vereenvoudig kan word na 'n rasionale getal nie, word dit 'n wortelvorm genoem.
- As a en b positiewe heelgetalle is, en $a < b$, dan is $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
- 'n Tweeterm is 'n uitdrukking met twee terme.
- Die produk van twee identiese tweeterme is die kwadraat van die tweeterm.
- Ons kry die verskil van twee vierkante wanneer ons $(ax + b)(ax - b)$ vermenigvuldig.
- Faktorisering is die omgekeerde proses van die uitbreiding van hakies.
- Die produk van 'n tweeterm en 'n drieterm is:

$$(A + B)(C + D + E) = A(C + D + E) + B(C + D + E)$$

- Die uithaal van 'n gemene faktor is die basiese metode vir faktorisering.
- Ons moet dikwels groepering gebruik om polinome te faktoriseer.
- Om 'n volkome vierkant te faktoriseer, moet ons die twee tweeterme vind wat met mekaar vermenigvuldig is om die volkome kwadraat te gee.
- Die som van twee derdemagte kan gefaktoriseer word as:

$$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

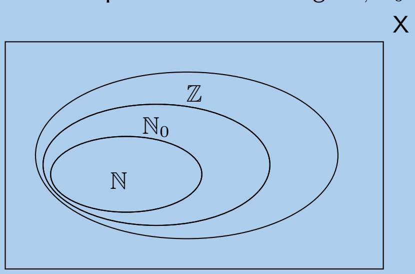
- Die verskil van twee derdemagte kan gefaktoriseer word as:

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

- Ons kan breuke vereenvoudig deur die toepassing van die metodes wat ons geleer het vir die faktorisering van uitdrukkings.
- Slegs faktore kan uitgekanselleer word in breuke, nooit terme nie.
- Die noemers van al die breuke moet dieselfde wees om breuke op te tel of af te trek.

End of chapter Exercise 1 – 11:

1. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



   a) Waar hoort die getal 2,13 in die diagram?
   b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?
      - Elke natuurlike getal is 'n heelgetal.
      - Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.
      - Daar is breuke in die heelgetalle.

2. Meld of die volgende getalle reëel, nie-reëel of ongedefinieerd is.

   a) $-\sqrt{-5}$ b) $\frac{\sqrt{8}}{0}$ c) $-\sqrt{15}$ d) $-\sqrt{7}$ e) $\sqrt{-1}$ f) $\sqrt{2}$

3. Meld of elk van die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is.

a) $\sqrt[3]{4}$ b) 45π c) $\sqrt{9}$ d) $\sqrt[3]{8}$

4. As a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c is irrasionaal, watter van die volgende is rasionale getalle?

a) $\frac{-b}{a}$ b) $c \div c$ c) $\frac{a}{c}$ d) $\frac{1}{c}$

5. Oorweeg die volgende lys van getalle:

$$\sqrt[3]{26}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \sqrt{-24}\ ;\ \sqrt{39}\ ;\ 7{,}\dot{1}\dot{1}\ ;\ \pi^2\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ 7{,}12\ ;\ -\sqrt{24}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{0}\ ;\ 3\pi\ ;\ \sqrt{78}\ ;\ 9\ ;\ \pi$$

a) Watter van die getalle is nie-reële getalle?
b) Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, orden al die reële getalle in 'n orde van toenemende grootte.
c) Watter van die getalle is irrasionale getalle?
d) Watter van die getalle is rasionale getalle?
e) Watter van die getalle is heelgetalle?
f) Watter van die getalle is ongedefinieerd?

6. Skryf elke desimaal as 'n eenvoudige breuk.

a) $0{,}12$ b) $0{,}006$ c) $4{,}\overline{14}$ d) $1{,}59$
e) $12{,}27\dot{7}$ f) $0{,}8\dot{2}$ g) $7{,}\overline{36}$

7. Toon dat die desimaal $3{,}21\dot{1}\dot{8}$ 'n rasionale getal is.

8. Skryf die volgende breuke as desimale getalle:

a) $\frac{1}{18}$
b) $1\frac{1}{2}$

9. Druk $0{,}\overline{78}$ uit as 'n breuk $\frac{a}{b}$ waar $a, b \in \mathbb{Z}$ (toon al jou bewerkings).

10. Vir elk van die volgende getalle:

- skryf die volgende drie syfers;
- meld of die getal rasionaal of irrasionaal is.

a) 1,11235...
b) $1{,}\dot{1}$

11. Skryf die volgende rasionale getalle tot 2 desimale plekke.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $0{,}11111\bar{1}$ d) $0{,}99999\bar{1}$

12. Rond die volgende irrasionale getalle af tot 3 desimale plekke.

a) 3,141592654... b) 1,618033989... c) 1,41421356...
d) 2,71828182845904523536...

13. Rond die getal 1523,00195593 af tot 4 desimale plekke.

14. Rond die getal 1982,94028996 af tot 6 desimale plekke.

15. Rond die getal 101,52378984 af tot 4 desimale plekke.

16. Gebruik jou sakrekenaar en skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$

17. Gebruik jou sakrekenaar (waar nodig) en skryf die volgende getalle tot 5 desimale plekke. Meld of die getalle irrasionaal of rasionaal is.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{768}$ c) $\sqrt{0{,}49}$ d) $\sqrt{0{,}0016}$ e) $\sqrt{0{,}25}$
f) $\sqrt{36}$ g) $\sqrt{1960}$ h) $\sqrt{0{,}0036}$ i) $-8\sqrt{0{,}04}$ j) $5\sqrt{80}$

18. Rond af:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tot die naaste 2 desimale plekke.
b) $\sqrt{14}$ tot die naaste 3 desimale plekke.

19. Skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke en skryf dan elkeen as 'n rasionale getal om 'n benadering te kry van die irrasionale getal.

a) 3,141592654...
b) 1,618033989...
c) 1,41421356...
d) 2,71828182845904523536...

20. Bepaal tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende irrasionale getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt{20}$
d) $\sqrt{30}$
e) $\sqrt[3]{5}$
f) $\sqrt[3]{10}$
g) $\sqrt[3]{20}$
h) $\sqrt[3]{30}$
i) $\sqrt{90}$
j) $\sqrt{72}$
k) $\sqrt[3]{58}$
l) $\sqrt[3]{118}$

21. Skat die volgende wortelvorme tot die naaste 1 desimale plek, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $\sqrt{14}$
b) $\sqrt{110}$
c) $\sqrt{48}$
d) $\sqrt{57}$

22. Brei die volgende produkte uit:

a) $(a+5)^2$
b) $(n+12)^2$
c) $(d-4)^2$
d) $(7w+2)(7w-2)$
e) $(12q+1)(12q-1)$
f) $-(-x-2)(x+2)$
g) $(5k-4)(5k+4)$
h) $(5f+4)(2f+2)$
i) $(3n+6)(6n+5)$
j) $(2g+6)(g+6)$
k) $(4y+1)(4y+8)$
l) $(d-3)(7d+2)$
m) $(6z-4)(z-2)$
n) $(5w-11)^2$
o) $(5s-1)^2$
p) $(3d-8)^2$
q) $5f^2(3f+5)+7f(3f^2+7)$
r) $8d(4d^3+2)+6d^2(7d^2+4)$
s) $5x^2(2x+2)+7x(7x^2+7)$

23. Brei die volgende uit:

a) $(y^4+3y^2+y)(y+1)(y-2)$
b) $(x+1)^2-(x-1)^2$
c) $(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$
d) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$
e) $2(x+3y)(x^2-xy-y^2)$
f) $(3a-5b)(3a+5b)(a^2+ab-b^2)$
g) $\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$
h) $\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)$
i) $\frac{1}{3}(12x-9y)+\frac{1}{6}(12x+18y)$
j) $(x+2)(x-2)-(x+2)^2$

24. Wat is die waarde van e in $(x-4)(x+e)=x^2-16$?

25. In $(x+2)(x+k)=x^2+bx+c$:

a) Vir watter van hierdie waardes van k sal b positief wees?
$-6\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 6$
b) Vir watter van hierdie waardes van k sal c positief wees?
$-6\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 6$
c) Vir watter waardes van k sal c positief wees?
d) Vir watter waardes van k sal b positief wees?

26. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(3a-\frac{1}{2a}\right)^2$ uit.
b) Brei $\left(3a-\frac{1}{2a}\right)\left(9a^2+\frac{3}{2}+\frac{1}{4a^2}\right)$ uit.
c) Gegee dat $3a-\frac{1}{2a}=7$, bepaal die waarde van $27a^3-\frac{1}{8a^3}$ sonder om a op te los.

27. Los op deur faktorisering:
    a) $17^2 - 15^2$ b) $13^2 - 12^2$ c) $120045^2 - 120035^2$ d) $26^2 - 24^2$
28. Stel die volgende voor as die produk van sy priemfaktore:
    a) 143 b) 168 c) 899 d) 99 e) 1599
29. Faktoriseer:
    a) $a^2 - 9$
    b) $9b^2 - 81$
    c) $m^2 - \frac{1}{9}$
    d) $5 - 5a^2b^6$
    e) $16ba^4 - 81b$
    f) $a^2 - 10a + 25$
    g) $16b^2 + 56b + 49$
    h) $-4b^2 - 144b^8 + 48b^5$
    i) $16 - x^4$
    j) $7x^2 - 14x + 7xy - 14y$
    k) $y^2 - 7y - 30$
    l) $1 - x - x^2 + x^3$
    m) $-3(1 - p^2) + p + 1$
    n) $x^2 - 2x + 1 - y^4$
    o) $4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3)$
    p) $3m(v - 7) + 19(-7 + v)$
    q) $3f(z + 3) + 19(3 + z)$
    r) $3p^3 - \frac{1}{9}$
    s) $8x^6 - 125y^9$
    t) $(2 + p)^3 - 8(p + 1)^3$
    u) $\frac{1}{3}a^3 - a^2b + 2a^2b - 6ab^2 + 3ab^2 - 9b^3$
    v) $6a^2 - 17a + 5$
    w) $s^2 + 2s - 15$
    x) $16v + 24h + 2j^5v + 3j^5h$
    y) $18h - 45g + 2m^3h - 5m^3g$
    z) $63d - 18s + 7u^2d - 2u^2s$

30. Faktoriseer die volgende:
    a) $6a^2 + 14a + 8$
    b) $6g^2 - 15g - 9$
    c) $125g^3 - r^3$
    d) $8r^3 + z^3$
    e) $14m - 4n + 7jm - 2jn$
    f) $25d - 15m + 5yd - 3ym$
    g) $g^3 - 27$
    h) $z^2 + 125$
    i) $b^2 - (3a - 2b)^2$
    j) $9y^2 - (4x + 2y)^2$
    k) $16x^6 - 3y^8$
    l) $\frac{1}{6}a^2 - 24b^4$
    m) $4(a - 3) - 81x^2(a - 3)$
    n) $(2 + b)^2 - 11(2 + b) - 12$
    o) $2x^2 + 7xy + 5y^2$
    p) $x^2 - 2xy - 15y^2$
    q) $4x^4 + 11x^2 + 6$
    r) $6x^4 - 38x^2 + 40$

s) $9a^2x + 9a^2y + 27a^2 - b^2x - b^2y - 3b^2$

t) $2(2y^2 - 5y) - 24$

u) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x - 2x^2 + 18$

v) $27r^3s^3 - 1$

w) $\frac{1}{125h^3} + r^3$

x) $j(64n^3 - b^3) + k(64n^3 - b^3)$

31. Vereenvoudig die volgende:

a) $(a-2)^2 - a(a+4)$

b) $(5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2)$

c) $(2m-3)(4m^2+9)(2m+3)$

d) $(a + 2b - c)(a + 2b + c)$

e) $\frac{m^2 + 11m + 18}{4(m^2-4)} \div \frac{3m^2 + 27m}{24m^2 - 48m}$

f) $\frac{t^2 + 9t + 18}{5(t^2 - 9)} \div \frac{4t^2 + 24t}{100t^2 - 300t}$

g) $\frac{4 - b^2}{3b - 6}$

h) $\frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$

i) $\frac{x^2 - 5x - 14}{3x + 6}$

j) $\frac{d^2 + 23d + 132}{5(d^2 - 121)} \div \frac{4d^2 + 48d}{100d^2 - 1100d}$

k) $\frac{a-2}{a^2 + 4a + 3} \div \frac{(a-1)(a+1)}{a-1} \times \frac{a^2 - 2a - 15}{a-2}$

l) $\frac{a+6}{a^2 + 12a + 11} \times \frac{a^2 + 14a + 33}{a+3} \div \frac{a^3 + 216}{a+1}$

m) $2 \div \frac{a+b}{a+2b} \times \frac{b^2 - ba - 6a^2}{a^2 - 4b^2} \times \frac{a^2 - b - 2b^2}{3a - b}$

n) $\frac{st + sb + 31t + 31b}{t + b}$

o) $\frac{ny + nq + 8y + 8q}{y + q}$

p) $\frac{p^2 - q^2}{p} \div \frac{p+q}{p^2 - pq}$

q) $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3}$

r) $\frac{1}{a+7} - \frac{a+7}{a^2 - 49}$

s) $\frac{x+2}{2x^3} + 16$

t) $\frac{1-2a}{4a^2 - 1} - \frac{a-1}{2a^2 - 3a + 1} - \frac{1}{1-a}$

u) $\frac{1}{2}x + \frac{x-2}{3} + 4$

v) $\frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{4x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

w) $\frac{b^2 + 6b + 9}{b^2 - 9} + \frac{b^2 - 6b + 8}{(b-2)(b+3)} + \frac{1}{b+3}$

x) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 6} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

y) $\frac{12}{z + 12} + \frac{5}{z - 5}$

z) $\frac{11}{w - 11} - \frac{4}{w - 4}$

32. Wys dat $(2x-1)^2 - (x-3)^2$ vereenvoudig kan word tot $(x+2)(3x-4)$.

33. Wat moet by $x^2 - x + 4$ gevoeg word om dit gelyk te maak aan $(x+2)^2$?

34. Evalueer $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$ as $x = 7{,}85$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Toon al jou stappe

35. Met watter uitdrukking moet $(a - 2b)$ vermenigvuldig word om 'n produk te kry van $(a^3 - 8b^3)$?

36. Met watter uitdrukking moet $27x^3 + 1$ gedeel word om 'n kwosiënt te kry van $3x + 1$?

37. Wat is die beperkings op die volgende?

a) $\frac{4}{3x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{a}{3(b-a) + ab - a^2}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HCY	2a. 2HCZ	2b. 2HD2	2c. 2HD3	2d. 2HD4	2e. 2HD5
2f. 2HD6	3a. 2HD7	3b. 2HD8	3c. 2HD9	3d. 2HDB	4. 2HDC
5. 2HDD	6a. 2HDF	6b. 2HDG	6c. 2HDH	6d. 2HDJ	6e. 2HDK
6f. 2HDM	6g. 2HDN	7. 2HDP	8a. 2HDQ	8b. 2HDR	9. 2HDS
10a. 2HDT	10b. 2HDV	11a. 2HDW	11b. 2HDX	11c. 2HDY	11d. 2HDZ

12a. 2HF2	12b. 2HF3	12c. 2HF4	12d. 2HF5	13. 2HF6	14. 2HF7
15. 2HF8	16a. 2HF9	16b. 2HFB	16c. 2HFC	16d. 2HFD	17a. 2HFF
17b. 2HFG	17c. 2HFH	17d. 2HFJ	17e. 2HFK	17f. 2HFM	17g. 2HFN
17h. 2HFP	17i. 2HFQ	17j. 2HFR	18a. 2HFS	18b. 2HFT	19a. 2HFV
19b. 2HFW	19c. 2HFX	19d. 2HFY	20a. 2HFZ	20b. 2HG2	20c. 2HG3
20d. 2HG4	20e. 2HG5	20f. 2HG6	20g. 2HG7	20h. 2HG8	20i. 2HG9
20j. 2HGB	20k. 2HGC	20l. 2HGD	21a. 2HGF	21b. 2HGG	21c. 2HGH
21d. 2HGJ	22a. 2HGK	22b. 2HGN	22c. 2HGP	22d. 2HGQ	22e. 2HGR
22f. 2HGS	22g. 2HGT	22h. 2HGV	22i. 2HGW	22j. 2HGX	22k. 2HGY
22l. 2HGZ	22m. 2HH2	22n. 2HH3	22o. 2HH4	22p. 2HH5	22q. 2HH6
22r. 2HH7	22s. 2HH8	23a. 2HH9	23b. 2HHB	23c. 2HHC	23d. 2HHD
23e. 2HHF	23f. 2HHG	23g. 2HHH	23h. 2HHJ	23i. 2HHK	23j. 2HHM
24. 2HHN	25. 2HHP	26. 2HHQ	27a. 2HHR	27b. 2HHS	27c. 2HHT
27d. 2HHV	28a. 2HHW	28b. 2HHX	28c. 2HHY	28d. 2HHZ	28e. 2HJ2
29a. 2HJ3	29b. 2HJ4	29c. 2HJ5	29d. 2HJ6	29e. 2HJ7	29f. 2HJ8
29g. 2HJ9	29h. 2HJB	29i. 2HJC	29j. 2HJD	29k. 2HJF	29l. 2HJG
29m. 2HJH	29n. 2HJJ	29o. 2HJK	29p. 2HJM	29q. 2HJN	29r. 2HJP
29s. 2HJQ	29t. 2HJR	29u. 2HJS	29v. 2HJT	29w. 2HJV	29x. 2HJW
29y. 2HJX	29z. 2HJY	30a. 2HJZ	30b. 2HK2	30c. 2HK3	30d. 2HK4
30e. 2HK5	30f. 2HK6	30g. 2HK7	30h. 2HK8	30i. 2HK9	30j. 2HKB
30k. 2HKC	30l. 2HKD	30m. 2HKF	30n. 2HKG	30o. 2HKH	30p. 2HKJ
30q. 2HKK	30r. 2HKM	30s. 2HKN	30t. 2HKP	30u. 2HKQ	30v. 2HKR
30w. 2HKS	30x. 2HKT	31a. 2HKV	31b. 2HKW	31c. 2HKX	31d. 2HKY
31e. 2HKZ	31f. 2HM2	31g. 2HM3	31h. 2HM4	31i. 2HM5	31j. 2HM6
31k. 2HM7	31l. 2HM8	31m. 2HM9	31n. 2HMB	31o. 2HMC	31p. 2HMD
31q. 2HMF	31r. 2HMG	31s. 2HMH	31t. 2HMJ	31u. 2HMK	31v. 2HMM
31w. 2HMN	31x. 2HMP	31y. 2HMQ	31z. 2HMR	32. 2HMS	33. 2HMT
34. 2HMV	35. 2HMW	36. 2HMX	37a. 2HMY	37b. 2HMZ	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

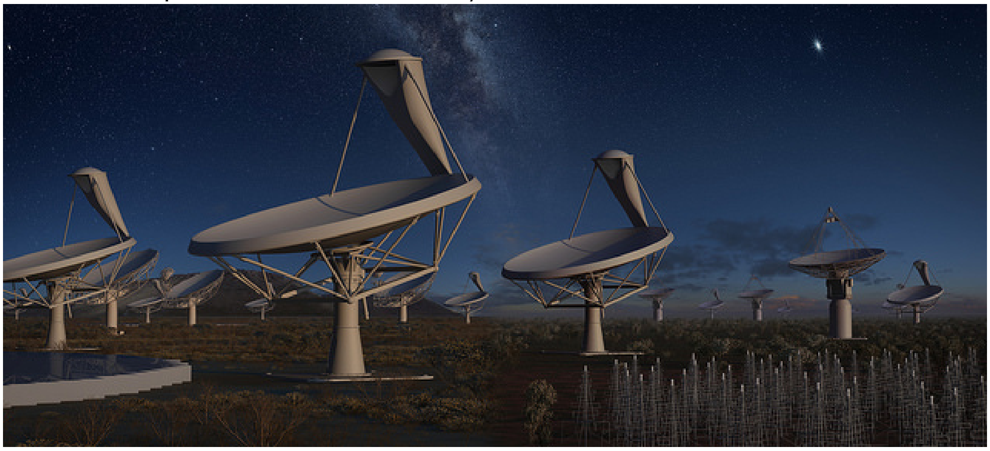
HOOFSTUK 2

Eksponente

2.1 Inleiding

EMDS

Eksponensiële notasie is 'n kort manier om aan te dui dat dieselfde getal 'n aantal kere met homself vermenigvuldig word. Dit is baie handig in die alledaagse lewe. Jy het seker al gehoor dat iemand die oppervlakte van 'n area beskryf in *vierkante* meter of *vierkante* kilometer. Byvoorbeeld, die grootste radioteleskoop in die wêreld word in Suid-Afrika gebou. Die teleskoop word die *vierkante kilometer opstelling*, of SKA, genoem. Dit is omdat die teleskoop 'n area van 1 kilometer by 1 kilometer of 1 vierkante kilometer sal beslaan.



Figuur 2.1: Antennas van die SKA (kunstenaarsvoorstelling).

Eksponente is ook baie handig om baie groot en baie klein getalle mee uit te druk. Byvoorbeeld, die SKA sal ongelooflike swak seine optel van voorwerpe wat so ver weg is dat dit totaal onprakties sou wees om die sterkte van die sein of die afstand, in kilometers, uit te skryf. Benewens in die astronomie, word eksponente gebruik deur mense soos rekenaarprogrammeerders, ingenieurs, ekonome, finansiële analiste, bioloë en demograwe.

BESOEK:
As jy meer wil weet oor hoe eksponente gebruik word, gaan kyk na die volgende aanbieding.
Sien aanbieding: 2HN2 at www.everythingmaths.co.za

Jy is reeds in vorige grade bekend gestel aan eksponente en eksponentwette. Onthou dat eksponente ook indekse of magte genoem kan word. Eksponentnotasie is as volg:

$$\text{grondtal} \leftarrow a^{n} \rightarrow \text{eksponent of indeks}$$

Vir enige reële getal a en natuurlike getal n, kan ons a n aantal kere vermenigvuldig met homself, skryf as: a^n.

Onthou die volgende identiteite:

1. $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ keer}) \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
2. $a^0 = 1 \quad (a \neq 0 \text{ omdat } 0^0 \text{ ongedefineer is})$
3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad \left(a \neq 0 \text{ omdat } \dfrac{1}{0} \text{ ongedefineer is}\right)$
4. Net so, $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

BESOEK:
Is jy geïnteresseerd daarin om uit te vind hoekom enige reële getal verhef tot die mag nul gelyk is aan een? Probeer om dit vir jouself uit te werk. As jy vashaak, kan jy by die volgende skakel 'n voorbeeld sien om te wys dat dit waar is.
Sien video: 2HN3 at www.everythingmaths.co.za

Kyk na die volgende voorbeelde en sien hoe hierdie identiteite werk:

1. $3 \times 3 = 3^2 = 9$
2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$
3. $p \times p \times p = p^3$
4. $(3^x)^0 = 1$
5. $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
6. $\frac{1}{5^{-x}} = 5^x$

NOTA:
As dit makliker is om jou finale antwoord uit te werk sonder 'n sakrekenaar, skryf dit volledig uit - nie in eksponensiële notasie nie - soos in voorbeelde 1 en 5.

NOTA:
Dit is die konvensie om jou finale antwoord met positiewe eksponente te skryf.

In hierdie hoofstuk sal ons die eksponentwette hersien en hierdie wette gebruik om meer komplekse uitdrukkings te vereenvoudig en meer ingewikkelde vergelykings op te los.

BESOEK:
Kyk die volgende video om eksponente te hersien.
Sien video: 2HN4 at www.everythingmaths.co.za

2.2 Hersiening van eksponentwette EMDT

Daar is verskeie wette wat ons kan gebruik om bewerkings met eksponensiële getalle te vergemaklik. Sommige van hierdie wette is moontlik behandel in vorige grade, maar ons gee 'n volledige lys van al die wette vir maklike verwysing:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

waar $a > 0$, $b > 0$ en $m, n \in \mathbb{R}$

BESOEK:
Die volgende twee videos verduidelike die eksponentwette.
Deel 1:
Sien video: 2HN5 at www.everythingmaths.co.za
Deel 2:
Sien video: 2HN6 at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Toepassing van die eksponentwette

VRAAG

Vereenvoudig:

1. $2^{3x} \times 2^{4x}$
2. $\dfrac{4x^3}{2x^5}$
3. $\dfrac{12p^2t^5}{3pt^3}$
4. $(3x)^2$
5. $\left(3^4 5^2\right)^3$
6. $6p^0 \times (7p)^0$
7. $\left(\dfrac{2xp}{6x^2}\right)^3$
8. $\left(2^{-2}\right)^{2x+1}$

OPLOSSING

1. $2^{3x} \times 2^{4x} = 2^{3x+4x} = 2^{7x}$
2. $\dfrac{4x^3}{2x^5} = 2x^{3-5} = 2x^{-2} = \dfrac{2}{x^2}$
3. $\dfrac{12p^2t^5}{3pt^3} = 4p^{(2-1)}t^{(5-3)} = 4pt^2$
4. $(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$
5. $\left(3^4 \times 5^2\right)^3 = 3^{(4\times 3)} \times 5^{(2\times 3)} = 3^{12} \times 5^6$
6. $6p^0 \times (7p)^0 = 6(1) \times 1 = 6$
7. $\left(\dfrac{2xp}{6x^2}\right)^3 = \left(\dfrac{p}{3x}\right)^3 = \dfrac{p^3}{27x^3}$
8. $\left(2^{-2}\right)^{2x+1} = 2^{-2(2x+1)} = 2^{-4x-2}$

NOTA:
Wanneer jy ’n breuk het van een term oor ’n ander term, gebruik die metode om priem-grondtalle te vind - met ander woorde, gebruik priemfaktorisering op die grondtalle.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Eksponensiële uitdrukkings

VRAAG

Vereenvoudig: $\dfrac{2^{2n} \times 4^n \times 2}{16^n}$

OPLOSSING

Stap 1: Verander die grondtalle na priemgetalle

Met die eerste oogopslag lyk dit nie asof ons hierdie uitdrukking kan vereenvoudig nie, maar, as ons die grondtalle reduseer tot priemgetalle, kan ons die eksponentwette toepas.

$$\frac{2^{2n} \times 4^n \times 2}{16^n} = \frac{2^{2n} \times \left(2^2\right)^n \times 2^1}{\left(2^4\right)^n}$$

Stap 2: Vereenvoudig die eksponente

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{2n} \times 2^{2n} \times 2^{1}}{2^{4n}} \\
&= \frac{2^{2n+2n+1}}{2^{4n}} \\
&= \frac{2^{4n+1}}{2^{4n}} \\
&= 2^{4n+1-(4n)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Eksponensiële uitdrukkings

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{5^{2x-1} \cdot 9^{x-2}}{15^{2x-3}}$$

OPLOSSING

Stap 1: Verander die grondtalle na priemgetalle

$$\begin{aligned}
\frac{5^{2x-1} \cdot 9^{x-2}}{15^{2x-3}} &= \frac{5^{2x-1} \cdot \left(3^{2}\right)^{x-2}}{(5 \times 3)^{2x-3}} \\
&= \frac{5^{2x-1} \cdot 3^{2x-4}}{5^{2x-3} \cdot 3^{2x-3}}
\end{aligned}$$

Stap 2: Trek die eksponente af (dieselfde grondtal)

$$\begin{aligned}
&= 5^{(2x-1)-(2x-3)} \times 3^{(2x-4)-(2x-3)} \\
&= 5^{2x-1-2x+3} \times 3^{2x-4-2x+3} \\
&= 5^{2} \times 3^{-1}
\end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die antwoord as 'n breuk

$$\begin{aligned}
&= \frac{5^{2}}{3} \\
&= \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

NOTA:
Wanneer jy met eksponente werk, geld al die berekeningswette van algebra nog steeds.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vereenvoudig deur die gemene faktor uit te haal

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{2^t - 2^{t-2}}{3 \, . \, 2^t - 2^t}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig tot 'n faktoriseerbare vorm

Vir elke eksponentwet kan ons die wet "terugwerk" - met ander woorde ons kan in die teenoorgestelde rigting werk. Vir hierdie uitdrukking kan ons die vermenigvuldigingswet omkeer om te skryf 2^{t-2} as $2^t \, . \, 2^{-2}$.

$$\frac{2^t - 2^{t-2}}{3 \, . \, 2^t - 2^t} = \frac{2^t - \left(2^t \, . \, 2^{-2}\right)}{3 \, . \, 2^t - 2^t}$$

Stap 2: Haal 'n gemeenskaplike faktor uit

$$= \frac{2^t \left(1 - 2^{-2}\right)}{2^t \left(3 - 1\right)}$$

Stap 3: Kanselleer die gemeenskaplike faktor en vereenvoudig

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 2^{-2}}{3 - 1} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

NOTA:
Wanneer jy 'n breuk het met meer as een term in die teller of in die noemer, verander na priem-grondtalle wanneer nodig, en faktoriseer dan.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Vereenvoudig deur die verskil tussen twee vierkante te gebruik

VRAAG

Vereenvoudig:

$$\frac{9^x - 1}{3^x + 1}$$

OPLOSSING

Stap 1: Verander die grondtalle na priemgetalle

$$\begin{aligned}\frac{9^x - 1}{3^x + 1} &= \frac{\left(3^2\right)^x - 1}{3^x + 1} \\ &= \frac{3^{2x} - 1}{3^x + 1} \qquad \text{Herken dat } 3^{2x} = \left(3^x\right)^2\end{aligned}$$

Stap 2: Faktoriseer deur die verskil tussen vierkante te gebruik

$$= \frac{\left(3^x - 1\right)\left(3^x + 1\right)}{3^x + 1}$$

Stap 3: Kanselleer die gemeenskaplike faktor en vereenvoudig

$$= 3^x - 1$$

Oefening 2 – 1:

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. 16^0
2. $16a^0$
3. $11^{9x} \times 11^{2x}$
4. $10^{6x} \times 10^{2x}$
5. $(6c)^3$
6. $(5n)^3$
7. $\dfrac{2^{-2}}{3^2}$
8. $\dfrac{5}{2^{-3}}$
9. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$
10. $\dfrac{a^2}{a^{-1}}$
11. $\dfrac{xy^{-3}}{x^4 y}$
12. $x^2 x^{3t+1}$
13. $3 \times 3^{2a} \times 3^2$
14. $\dfrac{2^{m+20}}{2^{m+20}}$
15. $\dfrac{2^{x+4}}{2^{x+3}}$
16. $(2a^4)(3ab^2)$
17. $(7m^4n)(8m^6n^8)$
18. $2(-a^7b^8)(-4a^3b^6)(-9a^6b^2)$
19. $(-9x^3y^6)\left(\dfrac{1}{9}x^8y^7\right)\left(\dfrac{1}{5}x^3y^6\right)$
20. $\dfrac{a^{3x}}{a^x}$
21. $\dfrac{20x^{10}a^4}{4x^9a^3}$
22. $\dfrac{18c^{10}p^8}{9c^6p^5}$
23. $\dfrac{6m^8a^{10}}{2m^3a^5}$
24. $3^{12} \div 3^9$
25. $\dfrac{7(a^3)^3}{a^7}$
26. $\dfrac{9(ab^4)^8}{a^3b^5}$
27. $\dfrac{2^2}{6^2}$
28. $\left(\dfrac{a^6}{b^7}\right)^5$
29. $\left(2t^4\right)^3$
30. $\left(3^{n+3}\right)^2$
31. $\dfrac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$
32. $\dfrac{13^c + 13^{c+2}}{3 \times 13^c - 13^c}$
33. $\dfrac{3^{5x} \times 81^{5x} \times 3^3}{9^{8x}}$

34. $\dfrac{16^x - 144^b}{4^x - 12^b}$

35. $\dfrac{5^{2y-3}2^{4y+4}}{10^{-5y+5}}$

36. $\dfrac{6^4 \times 12^3 \times 4^5}{30^3 \times 3^6}$

37. $\dfrac{9^3 \times 20^2}{4 \times 5^2 \times 3^5}$

38. $\dfrac{7^b + 7^{b-2}}{4 \times 7^b + 3 \times 7^b}$

39. $\dfrac{12^y - 96^y}{3^y + 6^y}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HN7	2. 2HN8	3. 2HN9	4. 2HNB	5. 2HNC	6. 2HND	7. 2HNF	8. 2HNG
9. 2HNH	10. 2HNJ	11. 2HNK	12. 2HNM	13. 2HNN	14. 2HNP	15. 2HNQ	16. 2HNR
17. 2HNS	18. 2HNT	19. 2HNV	20. 2HNW	21. 2HNX	22. 2HNY	23. 2HNZ	24. 2HP2
25. 2HP3	26. 2HP4	27. 2HP5	28. 2HP6	29. 2HP7	30. 2HP8	31. 2HP9	32. 2HPB
33. 2HPC	34. 2HPD	35. 2HPF	36. 2HPG	37. 2HPH	38. 2HPJ	39. 2HPK	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.3 Rasionale eksponente EMDV

Ons kan ook die eksponentwette toepas op uitdrukkings met rasionale eksponente.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vereenvoudiging van rasionale eksponente

VRAAG

Vereenvoudig:

$$2x^{\frac{1}{2}} \times 4x^{-\frac{1}{2}}$$

OPLOSSING

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{1}{2}} \times 4x^{-\frac{1}{2}} &= 8x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= 8x^0 \\ &= 8\,(1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vereenvoudiging van rasionale eksponente

VRAAG

Vereenvoudig:

$$(0{,}008)^{\frac{1}{3}}$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf as 'n breuk en vereenvoudig

$$\begin{aligned}(0{,}008)^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{8}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1^{\frac{1}{3}}}{5^{\left(3\,\cdot\,\frac{1}{3}\right)}} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

BESOEK:
Uitbreiding: die volgende video gee 'n opsomming van al die eksponentwette en rasionale eksponente.
Sien video: 2HPM at www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 2:

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}}$
2. $\dfrac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}}$
3. $(0{,}25)^{\frac{1}{2}}$
4. $(27)^{-\frac{1}{3}}$
5. $\left(3p^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(3p^4\right)^{\frac{1}{2}}$
6. $12\left(a^4b^8\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(512a^3b^3\right)^{\frac{1}{3}}$
7. $\left((-2)^4a^6b^2\right)^{\frac{1}{2}}$
8. $\left(a^{-2}b^6\right)^{\frac{1}{2}}$
9. $\left(16x^{12}b^6\right)^{\frac{1}{3}}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HPN 2. 2HPP 3. 2HPQ 4. 2HPR 5. 2HPS 6. 2HPT
7. 2HPV 8. 2HPW 9. 2HPX

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.4 Eksponensiële vergelykings

EMDW

In eksponensiële vergelykings is die onbekende veranderlike in die eksponent. Hier is enkele voorbeelde:

$$3^{x+1} = 9$$
$$5^t + 3 \times 5^{t-1} = 400$$

As ons 'n enkele term met dieselfde grondtal aan elke kant van die vergelyking kan skryf, dan kan ons die eksponente gelykstel. Dit is een manier waarop ons eksponensiële vergelykings kan oplos.

Belangrik: as $a > 0$ en $a \neq 1$ dan:

$$a^x = a^y$$
$$\text{dan is } x = y \text{ (dieselfde grondtal)}$$

Let ook op dat as $a = 1$, dan kan x en y verskillend wees.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Stel eksponente gelyk

VRAAG

Los op vir x: $3^{x+1} = 9$.

OPLOSSING

Stap 1: Verander die grondtalle na priemgetalle

$$3^{x+1} = 3^2$$

Stap 2: Die grondtalle is dieselfde, dus kan ons die eksponente gelykstel

$$x + 1 = 2$$
$$\therefore x = 1$$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Stel eksponente gelyk

VRAAG

Los op vir t: $3^t = 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Los op vir t

Vanaf die eksponent identiteite, weet ons dat $a^0 = 1$, dus:

$$3^t = 1$$
$$3^t = 3^0$$
$$\therefore t = 0$$

Uitgewerkte voorbeeld 10: Los vergelykings op deur die uithaal van 'n gemeenskaplike faktor

VRAAG

Los op vir t: $5^t + 3\ .\ 5^{t+1} = 400$.

OPLOSSING

Stap 1: Herskryf die uitdrukking

$$5^t + 3\left(5^t\ .\ 5\right) = 400$$

Stap 2: Haal 'n gemeenskaplike faktor uit

$$\begin{aligned} 5^t\left(1 + 3\ .\ 5\right) &= 400 \\ 5^t\left(1 + 15\right) &= 400 \end{aligned}$$

Stap 3: Vereenvoudig

$$\begin{aligned} 5^t\left(16\right) &= 400 \\ 5^t &= 25 \end{aligned}$$

Stap 4: Verander die grondtalle na priemgetalle

$$5^t = 5^2$$

Stap 5: Die grondtalle is dieselfde, dus kan ons die eksponente gelykstel

$$\therefore t = 2$$

Uitgewerkte voorbeeld 11: Los vergelykings op deur die faktorisering van 'n drieterm

VRAAG

Los op vir x:

$$3^{2x} - 80\ .\ 3^x - 81 = 0$$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die drieterm

$$(3^x - 81)(3^x + 1) = 0$$

Stap 2: Los op vir x

$3^x = 81$ of $3^x = -1$. Maar $3^x = -1$ is ongedefineer, dus:

$$3^x = 81$$
$$3^x = 3^4$$
$$x = 4$$

Dus $x = 4$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Los vergelykings op deur die faktorisering van 'n drieterm

VRAAG

Los op vir p:

$$p - 13p^{\frac{1}{2}} + 36 = 0$$

OPLOSSING

Stap 1: Herskryf die vergelyking

Ons let op dat $\left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 = p$, dus kan ons die vergelyking herskryf as:

$$\left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 13p^{\frac{1}{2}} + 36 = 0$$

Stap 2: Faktoriseer as 'n drieterm

$$\left(p^{\frac{1}{2}} - 9\right)\left(p^{\frac{1}{2}} - 4\right) = 0$$

Stap 3: Los op om beide wortels te vind

$$\begin{aligned} p^{\frac{1}{2}} - 9 &= 0 \\ p^{\frac{1}{2}} &= 9 \\ \left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= (9)^2 \\ p &= 81 \end{aligned} \qquad \text{of} \qquad \begin{aligned} p^{\frac{1}{2}} - 4 &= 0 \\ p^{\frac{1}{2}} &= 4 \\ \left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= (4)^2 \\ p &= 16 \end{aligned}$$

Dus $p = 81$ of $p = 16$.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Oplos van vergelykings deur faktorisering

VRAAG

Los op vir x:

$$2^x - 2^{4-x} = 0$$

OPLOSSING

Stap 1: Herskryf die vergelyking

Ten einde die vergelyking in 'n faktoriseerbare vorm te kry, moet ons die vergelyking herskryf:

$$\begin{aligned} 2^x - 2^{4-x} &= 0 \\ 2^x - 2^4 \,.\, 2^{-x} &= 0 \\ 2^x - \frac{2^4}{2^x} &= 0 \end{aligned}$$

Elimineer nou die breuk deur weerskante te vermenigvuldig met die noemer, 2^x.

$$\begin{aligned} \left(2^x - \frac{2^4}{2^x}\right) \times 2^x &= 0 \times 2^x \\ 2^{2x} - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Stap 2: Faktoriseer die vergelyking

Nadat ons die vergelyking herrangskik het, kan ons sien dat ons nou 'n verskil tussen twee vierkante het. Dus:

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 16 &= 0 \\ (2^x - 4)(2^x + 4) &= 0 \\ 2^x &= 4 \qquad 2^x \neq -4 \quad \text{('n positiewe heelgetal met 'n eksponent, is altyd positief)} \\ 2^x = 2^2 &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Dus $x = 2$.

Oefening 2 – 3:

1. Los die veranderlike op:

a) $2^{x+5} = 32$

b) $5^{2x+2} = \frac{1}{125}$

c) $64^{y+1} = 16^{2y+5}$

d) $3^{9x-2} = 27$

e) $25 = 5^{z-4}$

f) $-\frac{1}{2} \,.\, 6^{\frac{m}{2}+3} = -18$

g) $81^{k+2} = 27^{k+4}$

h) $25^{1-2x} - 5^4 = 0$

i) $27^x \times 9^{x-2} = 1$

j) $2^t + 2^{t+2} = 40$

k) $(7^x - 49)(3^x - 27) = 0$

l) $(2 \,.\, 2^x - 16)(3^{x+1} - 9) = 0$

m) $(10^x - 1)(3^x - 81) = 0$

n) $2 \times 5^{2-x} = 5 + 5^x$

o) $9^m + 3^{3-2m} = 28$

p) $y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$

q) $4^{x+3} = 0{,}5$

r) $2^a = 0{,}125$

s) $10^x = 0{,}001$

t) $2^{x^2-2x-3} = 1$

u) $\dfrac{8^x - 1}{2^x - 1} = 8.2^x + 9$

v) $\dfrac{27^x - 1}{9^x + 3^x + 1} = -\dfrac{8}{9}$

2. Die groei van alge kan gemodelleer word met die funksie $f(t) = 2^t$. Vind die waarde van t sodat $f(t) = 128$.
3. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $2^x = 7$
4. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $5^x = 11$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HPY 1b. 2HPZ 1c. 2HQ2 1d. 2HQ3 1e. 2HQ4 1f. 2HQ5
1g. 2HQ6 1h. 2HQ7 1i. 2HQ8 1j. 2HQ9 1k. 2HQB 1l. 2HQC
1m. 2HQD 1n. 2HQF 1o. 2HQG 1p. 2HQH 1q. 2HQJ 1r. 2HQK
1s. 2HQM 1t. 2HQN 1u. 2HQP 1v. 2HQQ 2. 2HQR 3. 2HQS
4. 2HQT

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.5 Opsomming EMDW

Sien aanbieding: 2HQV at www.everythingmaths.co.za

- Eksponensiële notasie beteken om 'n getal te skryf as a^n waar n 'n heelgetal is en a enige reële getal kan wees.
- a is die grondtal en n is die eksponent of indeks.
- Definisie:
  - $a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad (n$ keer)
  - $a^0 = 1$, as $a \neq 0$
  - $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, as $a \neq 0$
  - $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$, as $a \neq 0$
- Die eksponentwette:
  - $a^m \times a^n = a^{m+n}$
  - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - $(ab)^n = a^n b^n$
  - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
  - $(a^m)^n = a^{mn}$
- Wanneer uitdrukkings met eksponente vereenvoudig moet word, kan ons die grondtalle verander na priem-grondtalle of faktoriseer.
- Wanneer ons vergelykings met eksponente oplos, kan ons die reël toepas dat as $a^x = a^y$ dan is $x = y$; of ons kan die uitdrukkings faktoriseer.

End of chapter Exercise 2 – 4:

1. Vereenvoudig:

a) $(8x)^3$
b) $t^3 \times 2t^0$
c) $5^{2x+y} \times 5^{3(x+z)}$
d) $15^{3x} \times 15^{12x}$
e) $\frac{7^{y+7}}{7^{y+6}}$
f) $3(d^4)(7d^3)$
g) $(\frac{1}{7}a^2b^9)(6a^6b^2)(-3a^7b)$
h) $\left(b^{k+1}\right)^k$
i) $\frac{24c^8m^7}{6c^2m^5}$
j) $\frac{2(x^4)^3}{x^{12}}$
k) $\frac{a^6b^5}{7(a^8b^3)^2}$
l) $\left(\frac{a^7}{b^4}\right)^2$
m) $\frac{6^{5p}}{9^p}$
n) $m^{-2t} \times \left(3m^t\right)^3$
o) $\frac{3x^{-3}}{(3x)^2}$
p) $\frac{5^{b-3}}{5^{b+1}}$
q) $\frac{2^{a-2}3^{a+3}}{6^a}$
r) $\frac{3^n9^{n-3}}{27^{n-1}}$
s) $\frac{3^3}{9^3}$
t) $\frac{x^{-1}}{x^4y^{-2}}$
u) $\frac{(-1)^4}{(-2)^{-3}}$
v) $\left(\frac{2x^{2a}}{y^{-b}}\right)^3$
w) $\frac{2^{3x-1}8^{x+1}}{4^{2x-2}}$
x) $\frac{6^{2x}11^{2x}}{22^{2x-1}3^{2x}}$
y) $\frac{(-3)^{-3}(-3)^2}{(-3)^{-4}}$
z) $\left(3^{-1}+2^{-1}\right)^{-1}$

2. Vereenvoudig:

a) $\frac{9^{n-1}.27^{3-2n}}{81^{2-n}}$
b) $\frac{2^{3n+2} \,.\, 8^{n-3}}{4^{3n-2}}$
c) $\frac{3^{t+3}+3^t}{2 \times 3^t}$
d) $\frac{2^{3p}+1}{2^p+1}$
e) $\left(a^{10}b^6\right)^{\frac{1}{2}}$
f) $\left(9x^8y^4\right)^{\frac{1}{2}}$
g) $\frac{13^a+13^{a+2}}{6 \times 13^a - 13^a}$
h) $\frac{3^{8z} \times 27^{8z} \times 3^2}{9^{6z}}$
i) $\frac{121^b - 16^p}{11^b + 4^p}$
j) $\frac{11^{-4c-4}4^{4c-3}}{22^{-6c-2}}$
k) $\frac{12^4 \times 2^4}{16^6 \times 10}$
l) $\frac{5^6 \times 3^{16} \times 2^7}{10^8 \times 9^6}$
m) $(0{,}81)^{\frac{1}{2}}$
n) $12\left(a^{10}b^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(729a^{12}b^{15}\right)^{\frac{1}{3}}$
o) $2\left(p^{30}q^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(1331p^{12}q^6\right)^{\frac{1}{3}}$
p) $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a-b}$
q) $\left(\left(x^{36}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y} \,.\, \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y}$
s) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

3. Los op:

a) $3^x = \frac{1}{27}$
b) $121 = 11^{m-1}$
c) $5^{t-1} = 1$
d) $2 \times 7^{3x} = 98$
e) $-\frac{64}{3} = -\frac{4}{3}2^{-\frac{c}{3}+1}$
f) $-\frac{1}{2}6^{-n-3} = -18$
g) $2^{m+1} = (0{,}5)^{m-2}$
h) $3^{y+1} = 5^{y+1}$
i) $z^{\frac{3}{2}} = 64$
j) $16x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$
k) $m^0 + m^{-1} = 0$
l) $t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$
m) $3^p + 3^p + 3^p = 27$
n) $k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 = 0$

o) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 18 = 0$

p) $\dfrac{16^x - 1}{4^2x + 1} = 3$

q) $(2^x - 8)(3^x - 9) = 0$

r) $(6^x - 36)(16 - 4^x) = 0$

s) $5.2^{x^2+1} = 20$

t) $27^{x-2} = 9^{2x+1}$

u) $\dfrac{8^x - 1}{2^x - 1} = 7$

v) $\dfrac{35^x}{5^x} = \dfrac{1}{7}$

w) $\dfrac{a^{3x} \ . \ a^{\frac{1}{x}}}{a^{-4}} = 1$

x) $2x^{\frac{1}{2}} + 1 = -x$

4. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $4^x = 44$
5. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $3^x = 30$
6. Verduidelik waarom die volgende bewerings vals is:
   a) $\dfrac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = a + b$
   b) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
   c) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
   d) $2.3^x = 6^x$
   e) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{-x^{\frac{1}{2}}}$
   f) $(3x^4y^2)^3 = 3x^{12}y^6$
7. As $2^{2013}.5^{2015}$ voluit geskryf word, uit hoeveel syfers sal dit bestaan?
8. Bewys dat $\dfrac{2^{n+1} + 2^n}{2^n - 2^{n-1}} = \dfrac{3^{n+1} + 3^n}{3^n - 3^{n-1}}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HQW	1b. 2HQX	1c. 2HQY	1d. 2HQZ	1e. 2HR2	1f. 2HR3
1g. 2HR4	1h. 2HR5	1i. 2HR6	1j. 2HR7	1k. 2HR8	1l. 2HR9
1m. 2HRB	1n. 2HRC	1o. 2HRD	1p. 2HRF	1q. 2HRG	1r. 2HRH
1s. 2HRJ	1t. 2HRK	1u. 2HRM	1v. 2HRN	1w. 2HRP	1x. 2HRQ
1y. 2HRR	1z. 2HRS	2a. 2HRT	2b. 2HRV	2c. 2HRW	2d. 2HRX
2e. 2HRY	2f. 2HRZ	2g. 2HS2	2h. 2HS3	2i. 2HS4	2j. 2HS5
2k. 2HS6	2l. 2HS7	2m. 2HS8	2n. 2HS9	2o. 2HSB	2p. 2HSC
2q. 2HSD	2r. 2HSF	2s. 2HSG	3a. 2HSH	3b. 2HSJ	3c. 2HSK
3d. 2HSM	3e. 2HSN	3f. 2HSP	3g. 2HSQ	3h. 2HSR	3i. 2HSS
3j. 2HST	3k. 2HSV	3l. 2HSW	3m. 2HSX	3n. 2HSY	3o. 2HSZ
3p. 2HT2	3q. 2HT3	3r. 2HT4	3s. 2HT5	3t. 2HT6	3u. 2HT7
3v. 2HT8	3w. 2HT9	3x. 2HTB	4. 2HTC	5. 2HTD	6a. 2HTF
6b. 2HTG	6c. 2HTH	6d. 2HTJ	6e. 2HTK	6f. 2HTM	7. 2HTN
8. 2HTP					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 3

Getalpatrone

3.1 Inleiding EMDX

In vorige grade het jy patrone gesien in die vorm van prentjies en getalle. In hierdie hoofstuk leer ons meer oor die wiskunde van patrone. Patrone is herhalende sekwensies of rye wat ons vind in die natuur, in vorme, gebeure, versamelings van getalle en omtrent enige plek waar mens kyk. Byvoorbeeld, die sade van ’n sonneblom, sneeuvlokkies, meetkundige ontwerpe op laslappiekomberse of teëls, of rye getalle $0; 4; 8; 12; 16; \ldots$

Figuur 3.1: Die patroon van die sade in ’n sonneblom volg die Fibonacci ry, of $1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; \ldots$

BESOEK:
Is jy geïnteresseerd om meer te leer oor die verband tussen Fibonacci getalle en sonneblomme?
Sien video: 2HTQ at www.everythingmaths.co.za

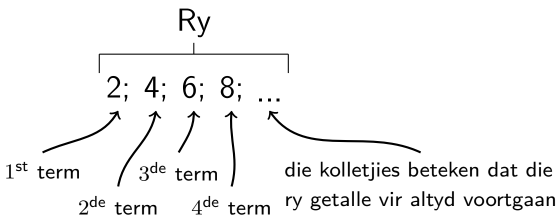
Probeer om op jou eie patrone raak te sien in die volgende rye:

1. $2; 4; 6; 8; 10; \ldots$
2. $1; 2; 4; 7; 11; \ldots$
3. $1; 4; 9; 16; 25; \ldots$
4. $5; 10; 20; 40; 80; \ldots$

BESOEK:
Identifisering van patrone in rye.
Sien video: 2HTR at www.everythingmaths.co.za

3.2 Beskrywing van rye EMDY

’n Ry is ’n geordende lys van items, meestal getalle. Elke item wat die ry vorm, word ’n “term” genoem.



Rye kan interessante patrone vorm. Ons ondersoek nou sekere tipes patrone en hoe hulle gevorm word.

Voorbeelde:

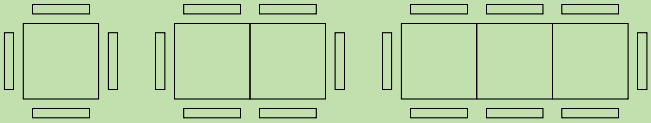
1. $1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; \ldots$
   Daar is 'n verskil van 3 tussen opeenvolgende terme.
   Die patroon word voortgesit deur 3 by die vorige term te tel.
2. $13; 8; 3; -2; -7; -12; -17; -22; \ldots$
   Daar is 'n verskil van -5 tussen opeenvolgende terme.
   Die patroon word voortgesit deur -5 by te tel by (dit is om 5 af te trek van) die vorige term.
3. $2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; \ldots$
   Hierdie ry het 'n faktor van 2 tussen opeenvolgende terme.
   Die patroon word voortgesit deur die vorige term met 2 te vermenigvuldig.
4. $3; -9; 27; -81; 243; -729; 2187; \ldots$
   Hierdie ry het 'n faktor van -3 tussen opeenvolgende terme.
   Die patroon word voortgesit deur die vorige term te vermenigvuldig met -3.
5. $9; 3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \ldots$
   Hierdie ry het 'n faktor van $\frac{1}{3}$ tussen opeenvolgende terme.
   Die patroon word voorgesit deur die vorige term met $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldig, wat ekwivalent is daaraan om die vorige term met 3 te deel.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Studietabel

VRAAG

Jy en 3 vriende besluit om te studeer vir Wiskunde en julle sit saam om 'n vierkantige tafel. 'n Paar minute later kom nog 2 vriende daar aan en hulle wil ook by jou tafel sit. Jy skuif 'n ander tafel langs joune sodat 6 mense kan sit. Nog 2 vriende wil ook by julle groep aansluit, dus neem jy 'n derde tafel en las dit by die bestaande tafels. Nou kan 8 mense saam sit.

Ondersoek hoe die aantal mense wat kan sit, verband hou met die aantal tafels. Is daar 'n patroon?



Figuur 3.2: Vir elke tafel wat bygevoeg word, kan twee ekstra persone plaasneem.

OPLOSSING

Stap 1: Voltooi 'n tabel om te sien of 'n patroon vorm

Aantal tafels, n	Aantal mense wat kan sit
1	$4 = 4$
2	$4 + 2 = 6$
3	$4 + 2 + 2 = 8$
4	$4 + 2 + 2 + 2 = 10$
$\vdots$	$\vdots$
n	$4 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2$

Stap 2: Beskryf die patroon

Ons sien dat met 3 tafels, kan 8 mense sit, met 4 tafels, kan 10 mense sit, ensovoorts. Ons het begin met 4 mense en het elke keer twee bygevoeg. Dus, vir elke tafel wat bygevoeg word, vermeerder die aantal mense met 2.

Dus is die patroon wat gevorm word $4; 6; 8; 10; \ldots$.

Ons gebruik die volgende notasie om die terme in 'n getalpatroon mee te beskryf:

Die eerste term van 'n ry is T_1.

Die vierde term van 'n ry is T_4.

Die tiende term van 'n ry is T_{10}.

Die algemene term word dikwels uitgedruk as die n^{de} term en word geskryf as T_n.

'n Ry hoef nie noodwendig 'n patroon te volg nie, maar wanneer dit wel doen, kan ons 'n algemene formule neerskryf waarmee ons enige term kan bereken. Byvoorbeeld, beskou die volgende lineêre ry: $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$

Die n^{de} term word gegee deur die algemene formule: $T_n = 2n - 1$

Jy kan dit kontroleer deur waardes in die formule te stel:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2(1) - 1 = 1 \\
T_2 &= 2(2) - 1 = 3 \\
T_3 &= 2(3) - 1 = 5 \\
T_4 &= 2(4) - 1 = 7 \\
T_5 &= 2(5) - 1 = 9
\end{aligned}$$

As ons die verband tussen die posisie van 'n term en sy waarde vind, kan ons 'n algemene formule opstel wat by die patroon pas en enige term van die ry vind.

Gemene verskil EMDZ

Beskou die volgende ry:

$$6; 1; -4; -9; \ldots$$

Ons kan sien dat elke term met 5 afneem, maar hoe bepaal ons die algemene formule vir die n^{de} term? Laat ons dit probeer doen met 'n tabel.

Nommer van term	T_1	T_2	T_3	T_4	T_n
Term	6	1	-4	-9	T_n
Formule	$6 - 0 \times 5$	$6 - 1 \times 5$	$6 - 2 \times 5$	$6 - 3 \times 5$	$6 - (n-1) \times 5$

Jy kan sien dat die verskil tussen twee opeenvolgende terme altyd die koëffisiënt van n in die formule is. Dit word 'n **gemene verskil** genoem.

Dus, vir rye met 'n gemene verskil, sal die algemene formule altyd van die vorm: $T_n = dn + c$ wees, waar d die verskil is tussen enige twee opeenvolgende terme en c 'n konstante is.

NOTA:
Rye met 'n gemene verskil, word lineêre rye genoem.

DEFINISIE: *Gemene verskil*

Die gemene verskil is die verskil tussen enige term en die voorafgaande term. Die gemene verskil word aangedui deur d.

Byvoorbeeld, beskou die ry $10; 7; 4; 1; \ldots$

Om die gemene verskil te bereken, moet ons die verskil vind tussen enige term en die vorige term.

Laat ons die verskil vind tussen die eerste twee terme.

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 7 - 10 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Kom ons kontroleer twee ander terme:

$$\begin{aligned} d &= T_4 - T_3 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ons sien dat d konstant is.

In die algemeen, $d = T_n - T_{n-1}$

BELANGRIK!

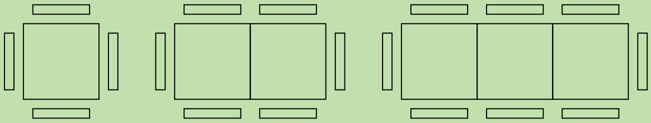
$d \neq T(n-1) - T_n$ byvoorbeeld, $d = T_2 - T_1$, nie $T_1 - T_2$.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Studie tabel, vervolg

VRAAG

Soos vantevore, studeer jy en jou 3 vriende vir Wiskunde en julle sit saam by 'n vierkantige tafel. 'n Paar minute later kom 2 ander vriende daar aan en jy skuif nog 'n tafel langs julle s'n. Nou kan 6 mense by die tafel sit. Nog 2 vriende sluit by julle groep aan; jy neem 'n derde tafel en las dit by die bestaande twee tafels. Nou kan 8 mense saam sit soos hier onder aangetoon.

1. Vind 'n uitdrukking vir die aantal mense wat by n tafels kan sit.
2. Gebruik hierdie algemene formule om te bepaal hoeveel mense om 12 tafels kan sit.
3. Hoeveel tafels word benodig om 20 mense sitplek te gee?



Figuur 3.3: Twee ekstra mense kan sit vir elke tafel wat bygelas word.

OPLOSSING

Stap 1: Stel 'n tabel op om die patroon te sien.

Aantal tafels, n	Aantal mense wat kan sit	Patroon
1	$4 = 4$	$= 4 + 2\,(0)$
2	$4 + 2 = 6$	$= 4 + 2\,(1)$
3	$4 + 2 + 2 = 8$	$= 4 + 2\,(2)$
4	$4 + 2 + 2 + 2 = 10$	$= 4 + 2\,(3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$4 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2$	$= 4 + 2\,(n-1)$

Nota: Daar mag variasies wees in die manier waarop jy dink oor die patroon in hierdie probleem. Byvoorbeeld, jy mag hierdie probleem beskou asof die persoon aan die een punt vas is, twee mense sit regoor mekaar per tafel en een persoon op die ander punt is vas. Die resultaat hiervan is $1 + 2n + 1 = 2n + 2$. Jou formule vir T_n sal steeds reg wees.

Stap 2: Beskryf die patroon

Die aantal mense wat by n tafels sit, is $T_n = 4 + 2(n-1)$

Stap 3: Bereken die twaalfde term, met ander woorde, vind T_n as $n = 12$

$$\begin{aligned} T_{12} &= 4 + 2(12-1) \\ &= 4 + 2(11) \\ &= 4 + 22 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Dus kan 26 mense by 12 tafels sit.

Stap 4: Bereken die aantal tafels wat benodig word om 20 mense sitplek te gee, met ander woorde vind n as $T_n = 20$

$$\begin{aligned} T_n &= 4 + 2(n-1) \\ 20 &= 4 + 2(n-1) \\ 20 &= 4 + 2n - 2 \\ 20 - 4 + 2 &= 2n \\ 18 &= 2n \\ \frac{18}{2} &= n \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Dus word 9 tafels benodig vir 20 mense.

Dit is belangrik om die verskil raak te sien tussen n en T_n. n kan vergelyk word met 'n plekhouer wat die posisie van die term in die ry aandui, terwyl T_n die waarde is van die n^{de} term. In die voorbeeld hierbo, het die eerste tafel plek vir 4 mense. Dus vir $n = 1$, is die waarde van $T_1 = 4$ ensovoorts:

n	1	2	3	4	...
T_n	4	6	8	10	...

Uitgewerkte voorbeeld 3: Dataplanne

VRAAG

Raymond teken in vir 'n beperkte dataplan van Vodacell. Die beperkte dataplan kos R 120 vir 1 gigabyte (GB) per maand, R 135 vir 2 GB per maand en R 150 vir 3 GB per maand. Aanvaar hierdie patroon word onbeperk voortgesit.

1. Gebruik 'n tabel om die patroon van die koste van die dataplanne voor te stel.
2. Vind die algemene formule vir die ry.
3. Gebruik die algemene formule om die koste te bepaal vir 'n 30 GB dataplan.
4. Die koste van 'n onbeperkte dataplan in R 520 per maand. Bepaal die hoeveelheid data wat Raymond moet gebruik voordat dit goedkoper vir hom sal wees om in te teken op 'n onbeperkte dataplan.

OPLOSSING

Stap 1: Stel 'n tabel op om die patroon te sien.

Aantal GB (n)	1	2	3	4
Koste (in Rand)	120	135	150	165
Patroon	120	$120 + (1)(15) = 135$	$120 + (2)(15) = 150$	$120 + (3)(15) = 165$

Stap 2: Gebruik die waargenome patroon om die algemene formule te vind.

Die prys van n GB data is $T_n = 120 + 15\,(n - 1)$

Stap 3: Bepaal die koste van 30 GB van data.

Hierdie vraag verwag van ons om die waarde te bepaal van die 30ste term, met ander woorde, vind T_n as $n = 30$. Deur die gebruik van die algemene formule, kry ons:

$$\begin{aligned} T_n &= 120 + 15\,(n-1) \\ \therefore T_{30} &= 120 + 15\,(30-1) \\ &= 120 + 15\,(29) \\ &= 120 + 435 \\ &= 555 \end{aligned}$$

Dus is die koste van 'n 30 GB datapakket R 555.

Stap 4: Bepaal wanneer dit goedkoper is om die onbeperkte dataplan te koop

Die finale vraag van hierdie uitgewerkte voorbeeld verwag van ons om te bepaal wanneer dit vir Raymond goedkoper sal wees om die onbeperkte datapakket te koop in plaas van die beperkte plan. Met ander woorde, ons moet n vind waar T_n minder is as R 520.

Ons weet dat:

$$T_n = 120 + 15\,(n-1)$$

Dus as $T_n = 520 = 120 + 15\,(n-1)$

As ons n oplos, kry ons:

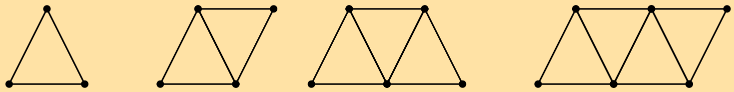
$$\begin{aligned} 520 &= 120 + 15\,(n-1) \\ 520 &= 120 + 15n - 15 \\ 520 &= 105 + 15n \\ 405 &= 15n \\ \frac{405}{15} &= n \\ n &= 27 \end{aligned}$$

Dus is dit goedkoper vir Raymond om die onbeperkte dataplan te koop indien hy meer as 27 GB per maand gebruik.

BESOEK:
Leer meer oor getalpatrone.
Sien video: 2HTS at www.everythingmaths.co.za

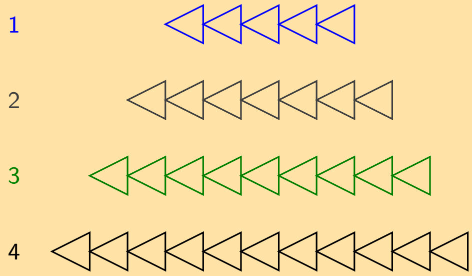
Oefening 3 – 1:

1. Gebruik die gegewe rye om die tabel hieronder te voltooi.



Nommer van figuur	1	2	3	4	n
Aantal kolletjies					
Aantal lyne					
Totaal					

2. Beskou die volgende ry getalle: -4 ; -1 ; 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; $\ldots$
   As $T_n = 2$ wat is die waarde van T_{n-1}?
3. Beskou die ry wat hier getoon word: C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J ; $\ldots$
   As $T_n = G$ wat is die waarde van T_{n-4}?
4. Vir elk van die volgende rye, bepaal die algemene verskil. As die ry nie lineêr is nie, skryf "geen gemene verskil".
   a) 9 ; -7 ; -8 ; -25 ; -34 ; $\ldots$
   b) 5 ; 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; $\ldots$
   c) 2,93 ; 1,99 ; 1,14 ; 0,35 ; $\ldots$
   d) 2,53 ; 1,88 ; 1,23 ; 0,58 ; $\ldots$
5. Skryf die volgende drie terme in elk van die volgende rye neer:
   a) 5 ; 15 ; 25 ; $\ldots$
   b) -8 ; -3 ; 2 ; $\ldots$
   c) 30 ; 27 ; 24 ; $\ldots$
   d) −13,1 ; −18,1 ; −23,1 ; $\ldots$
   e) $-9x$; $-19x$; $-29x$; $\ldots$
   f) −15,8 ; 4,2 ; 24,2 ; $\ldots$
   g) $30b$; $34b$; $38b$; $\ldots$
6. Gegee 'n patroon wat begin met die getalle: $3; 8; 13; 18; \ldots$. Bepaal die waardes van T_6 en T_9.
7. Gegee 'n ry wat begin met die letters: $C; D; E; F; \ldots$. Bepaal die waardes van T_5 en T_8.
8. Gegee 'n patroon wat begin met die getalle: $7; 11; 15; 19; \ldots$. Bepaal die waardes van T_5 en T_8.
9. Die algemene term vir elke ry hieronder, word gegee. Bereken die ontbrekende terme (elke ontbrekende term word deur ... aangedui).
   a) 0 ; 3 ; $\ldots$; 15 ; 24 $\qquad T_n = n^2 - 1$
   b) 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; $\ldots$; -2 $\qquad T_n = -n + 4$
   c) -11 ; $\ldots$; -7 ; $\ldots$; -3 $\qquad T_n = -13 + 2n$
   d) 1 ; 10 ; 19 ; $\ldots$; 37 $\qquad T_n = 9n - 8$
   e) 9 ; $\ldots$; 21 ; $\ldots$; 33 $\qquad T_n = 6n + 3$
10. Vind die algemene formule vir die volgende rye en bepaal dan T_{10}, T_{50} en T_{100}.
    a) $2; 5; 8; 11; 14; \ldots$
    b) $0; 4; 8; 12; 16; \ldots$
    c) $2; -1; -4; -7; -10; \ldots$
11. Die diagram hieronder toon prentjies wat 'n patroon vorm.



    a) Hoeveel driehoeke sal daar in die vyfde prentjie wees?

b) Bepaal 'n formule vir die n^{de} term.

c) Gebruik die formule om te bepaal hoeveel driehoeke daar in die 25^{ste} prentjie van die diagram is.

12. Bestudeer die volgende ry: $15 \; ; \; 23 \; ; \; 31 \; ; \; 39 \; ; \; \ldots$

    a) Skryf die volgende 3 terme neer.

    b) Vind die algemene formule vir die ry

    c) Vind die waarde van n as T_n 191 is.

13. Bestudeer die volgende ry: $-44 \; ; \; -14 \; ; \; 16 \; ; \; 46 \; ; \; \ldots$

    a) Skryf die volgende 3 terme neer.

    b) Vind die algemene formule vir die ry

    c) Vind die waarde van n as T_n 406 is .

14. Beskou die volgende lys:

$$-z-5 \; ; \; -4z-5 \; ; \; -6z-2 \; ; \; -8z-5 \; ; \; -10z-5 \; ; \; \ldots$$

    a) Vind die gemene verskil vir die terme van die lys. As die ry nie lineêr is nie (dus as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".

    b) As daar nou vir jou gesê word dat $z=-2$, bepaal die waardes van T_1 en T_2.

15. Beskou die volgende patroon:

$$2n+4 \; ; \; 1 \; ; \; -2n-2 \; ; \; -4n-5 \; ; \; -6n-8 \; ; \; \ldots$$

    a) Vind die gemene verskil vir die terme van die patroon. As die ry nie lineêr is nie (as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".

    b) As daar nou vir jou gesê word dat $n=-1$, bepaal die waardes van T_1 en T_3.

16. a) Bepaal die waarde van k indien die volgende terme: $\frac{k}{3}-1 \; ; \; -\frac{5k}{3}+2 \; ; \; -\frac{2k}{3}+10 \; ; \; \ldots$ 'n lineêre ry vorm. As die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord as 'n vereenvoudigde breuk.

    b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.

17. a) As die volgende terme 'n lineêre ry vorm, bepaal y:

$$y-\frac{3}{2} \; ; \; -y-\frac{7}{2} \; ; \; -7y-\frac{15}{2} \; ; \; \ldots$$

    Indien die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord in vereenvoudigde breukvorm.

    b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.

18. Wat is die 649^{ste} letter van hierdie patroon:
    PATROONPATROONPATROONPATROONPATROONPATROONPATRO.............?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HTT	2. 2HTV	3. 2HTW	4. 2HTX	5a. 2HTY	5b. 2HTZ
5c. 2HV2	5d. 2HV3	5e. 2HV4	5f. 2HV5	5g. 2HV6	6. 2HV7
7. 2HV8	8. 2HV9	9a. 2HVB	9b. 2HVC	9c. 2HVD	9d. 2HVF
9e. 2HVG	10a. 2HVH	10b. 2HVJ	10c. 2HVK	11. 2HVM	12. 2HVN
13. 2HVP	14. 2HVQ	15. 2HVR	16. 2HVS	17. 2HVT	18. 2HVV

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

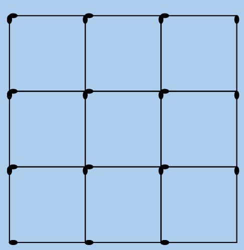
3.3 Opsomming van hoofstuk EMD32

Sien aanbieding: 2HVW at www.everythingmaths.co.za

- Die algemene term word uitgedruk as die n^{de} term en word geskryf as T_n.
- Ons definieer die gemene verskil d van 'n ry as die verskil tussen enige twee opeenvolgende terme, waar $d = T_n - T(n-1)$
- Ons kan 'n algemene formule vir elke getalpatroon uitwerk en dit gebruik om enige term in die patroon te bepaal.

End of chapter Exercise 3 – 2:

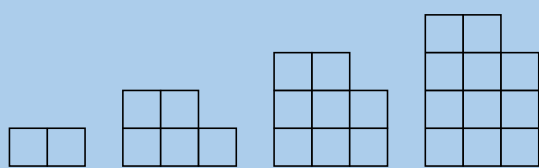
1. Analiseer die diagram en voltooi die tabel:



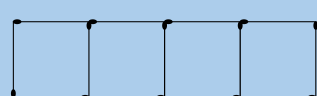
Nommer van figuur $(n \times n)$	1×1	2×2	3×3	4×4	$n \times n$
Aantal horisontale vuurhoutjies					
Aantal vertikale vuurhoutjies					
Totale aantal vuurhoutjies					

2. Gegewe 'n lys van getalle: $7\ ;\ 4\ ;\ 1\ ;\ -2\ ;\ -5\ ;\ \ldots$. Bepaal die gemene verskil vir die ry (as daar 'n gemene verskil is).
3. Bepaal die gemene verskil vir hierdie patroon: $-0{,}55$; 0,99 ; 2,49 ; 3,91 ; ....
   As die patroon nie lineêr is nie, skryf "geen gemene verskil". Andersins, gee jou antwoord as 'n desimaal.
4. Beskou die lys wat hier getoon word: $2\ ;\ 7\ ;\ 12\ ;\ 17\ ;\ 22\ ;\ 27\ ;\ 32\ ;\ 37\ ;\ \ldots$
   As $T_5 = 22$ wat is die waarde van T_{n-3}?
5. Skryf die volgende drie terme in elk van die volgende lineêre rye neer:
   a) $-10{,}2\ ;\ -29{,}2\ ;\ -48{,}2\ ;\ \ldots$
   b) $50r\ ;\ 46r\ ;\ 42r\ ;\ \ldots$
6. Gegee 'n ry wat begin met die getalle: $6\ ;\ 11\ ;\ 16\ ;\ 21\ ;\ \ldots$. Bepaal die waardes van T_6 en T_8.
7. Gegee 'n lys wat begin met die letters: $A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\ ;\ \ldots$. Bepaal die waardes van T_6 en T_{10}.
8. Vind die sesde term in elk van die volgende rye:
   a) $4\ ;\ 13\ ;\ 22\ ;\ 31\ ;\ \ldots$
   b) $5\ ;\ 2\ ;\ -1\ ;\ -4\ ;\ \ldots$
   c) 7,4 ; 9,7 ; 12 ; 14,3 ; ...
9. Vind die algemene formule vir die volgende rye en vind dan T_{10}, T_{15} en T_{30}
   a) $-18\ ;\ -22\ ;\ -26\ ;\ -30\ ;\ -34\ ;\ \ldots$
   b) $1; -6; -13; -20; -27; \ldots$
10. Die algemene term word vir elke ry hieronder gegee. Bereken die ontbrekende terme (elke ontbrekende term woord as ... aangedui).
    a) $10; \ldots; 14; \ldots; 18$ $\quad T_n = 2n + 8$
    b) $2\ ;\ -2\ ;\ -6\ ;\ \ldots\ ;\ -14$ $\quad T_n = -4n + 6$
    c) $8\ ;\ \ldots\ ;\ 38\ ;\ \ldots\ ;\ 68$ $\quad T_n = 15n - 7$

11. Vind die algemene term in elk van die volgende rye:
    a) $3\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 15\ ;\ \ldots$
    b) $-2\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ \ldots$
    c) $11\ ;\ 15\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ \ldots$
    d) $\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\ ;\ 1\frac{1}{3}\ ;\ \ldots$
12. Bestudeer die volgende ry: $-7\ ;\ -21\ ;\ -35\ ;\ \ldots$
    a) Skryf die volgende 3 terme neer.
    b) Vind die algemene formule vir die ry.
    c) Vind die waarde van n as T_n −917 is.
13. Wat is die 346^{ste} letter van die ry:
    ALGEMENEALGEMENE.............?
14. Wat is die 1000^{ste} letter van die ry:
    WISKUNDEWISKUNDEWISKUNDEWISK.............?
15. Die sitplekke van 'n sportstadion is so gerangskik dat die eerste ry 15 sitplekke het; die tweede ry het 19 sitplekke, die derde ry het 23 sitplekke, ensovoorts. Bereken hoeveel sitplekke is daar in die 25^{ste} ry.
16. Die diagram hieronder toon prentjies wat 'n patroon vorm.



    a) Hoeveel blokkies sal daar in die sesde prentjie wees?
    b) Bepaal die formule vir die n^{de} term.
    c) Gebruik die formule om te bepaal hoeveel blokkies in die 30^{ste} prentjie van die diagram is.
17. 'n Enkele vierkant word gevorm deur 4 vuurhoutjies. Twee vierkante in 'n ry benodig 7 vuurhoutjies en drie vierkante gebruik 10 vuurhoutjies.



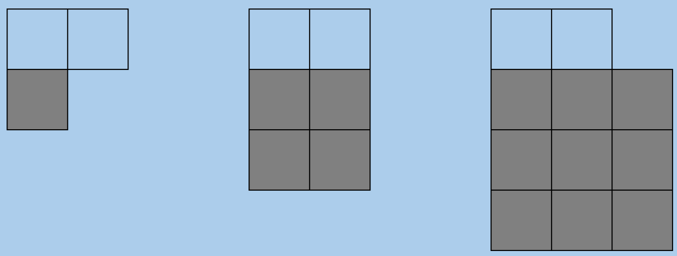
    Beantwoord die volgende vrae vir hierdie ry.
    a) Bepaal die eerste term.
    b) Bepaal die gemene verskil.
    c) Bepaal die algemene formule.
    d) 'n Ry het vyf en twintig blokkies. Hoeveel vuurhoutjies is daar in die ry?
18. Jy wil graag begin om geld te spaar, maar omdat jy nog nooit vantevore probeer het om geld te spaar nie, besluit jy om stadig te begin. Teen die einde van die eerste week, deponeer jy R 5 in jou bankrekening. Teen die einde van die tweede week, deponeer jy R 10 en teen die einde van die derde week, R 15. Na hoeveel weke sal jy R 50 moet deponeer in jou bankrekening?
19. Beskou die volgende lys:

$$-4y-3\ ;\ -y\ ;\ 2y+3\ ;\ 5y+6\ ;\ 8y+9\ ;\ \ldots$$

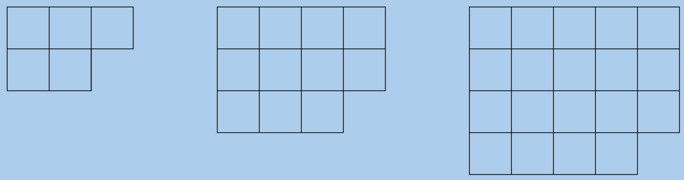
    a) Vind die gemene verskil vir die terme van die lys. As die ry nie lineêr is nie (dus as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".
    b) As daar nou vir jou gesê word dat $y = 1$, bepaal die waardes van T_1 en T_2.

20. a) Bepaal die waarde van n indien die volgende terme: $2n + \frac{1}{2}$; $3n + \frac{5}{2}$; $7n + \frac{11}{2}$; ... 'n lineêre ry vorm. As die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord as 'n vereenvoudigde breuk.
    b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.

21. Hoeveel blokkies sal daar in die 85^{ste} prentjie wees?
    (Wenk: Gebruik die grys blokkies om te help)

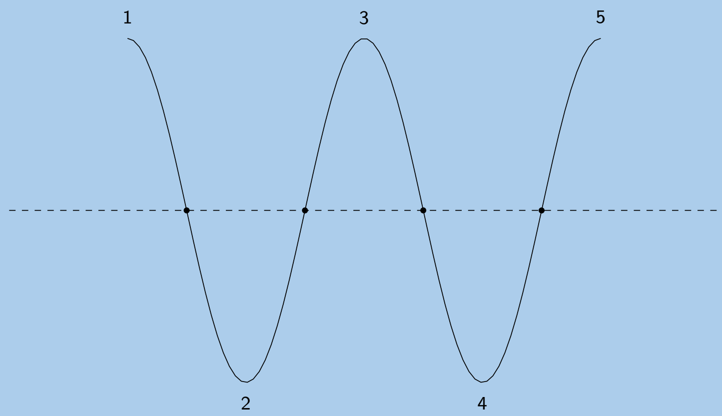


22. Analiseer die prentjie hieronder:



    a) Hoeveel blokkies is daar in die volgende prentjie?
    b) Skryf die algemene formule vir hierdie patroon neer.
    c) Hoeveel blokkies sal daar in die 14^{de} prentjie wees?

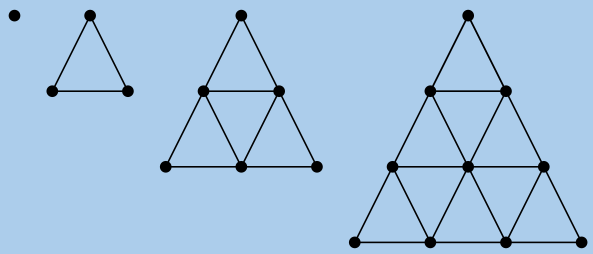
23. 'n Horisontale lyn sny 'n stuk tou by 4 punte en verdeel dit in vyf dele, soos hieronder aangetoon.



    As die stuk tou op hierdie manier gekruis word deur 19 ewewydige lyne, wat elkeen die tou by 4 punte sny, bepaal die aantal dele waarin die stuk tou verdeel word.

24. Gebruik 'n sakrekenaar om 'n ondersoek te doen en veralgemeen dan jou bevindings om die volgende te bepaal:
    a) ene-syfer van 3^{2007}
    b) tiene-syfer van 7^{2008}
    c) res wanneer 7^{250} gedeel word deur 5

25. Analiseer die diagram en voltooi die tabel.
Die kolletjies vorm 'n driehoekige patroon en die formule is $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Die algemene formule vir die lyne is $T_n = \frac{3n(n-1)}{2}$.



Nommer van figuur	1	2	3	4	5	20	n
Aantal kolletjies							
Aantal lyne							
Totaal							

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HVX 2. 2HVZ 3. 2HW2 4. 2HW3 5. 2HW4 6. 2HW5
7. 2HW6 8a. 2HW7 8b. 2HW8 8c. 2HW9 9. 2HWB 10. 2HWC
11a. 2HWD 11b. 2HWF 11c. 2HWG 11d. 2HWH 12. 2HWJ 13. 2HWK
14. 2HWM 15. 2HWN 16. 2HWP 17. 2HWQ 18. 2HWR 19. 2HWT
20. 2HWV 21. 2HWW 22. 2HWX 23. 2HWS 24a. 2HWY 24b. 2HWZ
24c. 2HX2 25. 2HVY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 4

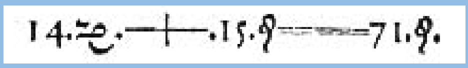
Vergelykings en ongelykhede

4.1 Inleiding EMD33

Vergelykings word algemeen gebruik om die wêreld rondom ons te beskryf. In natuurwetenskap word vergelykings gebruik om alles te beskryf van hoe ’n bal teen ’n skuinste afrol tot hoe die planete om die son beweeg.

In hierdie hoofstuk sal ons verskillende tipes vergelykings ondersoek, sowel as kyk hoe die vergelykings gebruik kan word om probleme in die regte wêreld op te los. Ons kyk ook na lineêre ongelykhede.

HET JY GEWEET?



Die eerste gebruik van ’n “is gelyk aan” - teken van *Die Whetstone van Witte* deur Robert Recorde 1557. Hierdie vergelyking verteenwoordig $14x + 15 = 71$. Recorde is ook verantwoordelik vir die infasering van die reeds betaande “plus” teken (+) in die Engelssprekende wêreld.

4.2 Oplos van lineêre vergelykings EMD34

Die eenvoudigste vergelyking om op te los is ’n lineêre vergelyking. ’n Lineêre vergelyking is ’n vergelyking waar die hoogste eksponent van die veranderlike 1 is. Die volgende is voorbeelde van lineêre vergelykings:

$$
\begin{aligned}
2x + 2 &= 1 \\
\frac{2 - x}{3x + 1} &= 2 \\
4\left(2x - 9\right) - 4x &= 4 - 6x \\
\frac{2a - 3}{3} - 3a &= \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

Om ’n vergelyking op te los, beteken om die waarde te vind van die veranderlike wat die vergelyking waar maak. Byvoorbeeld, om die eenvoudige vergelyking $x + 1 = 1$ op te los, moet ons die waarde vind van x wat die linkerkant gelyk sal maak aan die regterkant. Die oplossing is $x = 0$.

Die oplossing, ook genoem die wortel van ’n vergelyking, is die waarde van die veranderlike wat die vergelyking bevredig. Vir lineêre vergelykings is daar op die meeste een oplossing vir die vergelyking.

Om vergelykings op te los, gebruik ons algebraïese metodes wat die uitbreiding van uitdrukkings, groepering van terme en faktorisering insluit.

Byvoorbeeld:

$$
\begin{aligned}
2x + 2 &= 1 \\
2x &= 1 - 2 \quad \text{(herrangskik)} \\
2x &= -1 \quad \text{(vereenvoudig)} \\
x &= -\frac{1}{2} \quad \text{(deel elke kant deur 2)}
\end{aligned}
$$

Kontroleer die antwoord deur substitusie van $x = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{LK} &= 2x + 2 \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= -1 + 2 \\ &= 1 \\ \text{RK} &= 1\end{aligned}$$

Dus $x = -\frac{1}{2}$

BESOEK:
Die volgende video gee 'n inleiding vir die oplossing van lineêre vergelykings.
Sien video: 2HX3 at www.everythingmaths.co.za

Metode vir die oplossing van lineêre vergelykings EMD35

Die algemene stappe vir die oplos van lineêre vergelykings is:

1. Brei al die hakies uit.
2. Herrangskik die terme so dat al die terme wat die veranderlike bevat aan die een kant van die vergelyking is en al die konstante terme aan die ander kant.
3. Groepeer die terme saam en vereenvoudig.
4. Faktoriseer indien nodig.
5. Vind die oplossing en skryf die antwoord neer.
6. Kontroleer die antwoord deur die oplossing weer te substitueer in die oorspronklike vergelyking.

BELANGRIK!

'n Vergelyking moet altyd gebalanseerd wees, wat jy ook al doen aan die linkerkant, moet jy ook doen aan die regterkant.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Oplos van lineêre vergelykings

VRAAG

Los op vir x:

$$4(2x - 9) - 4x = 4 - 6x$$

OPLOSSING

Stap 1: Brei die hakies uit en vereenvoudig

$$\begin{aligned}4(2x - 9) - 4x &= 4 - 6x \\ 8x - 36 - 4x &= 4 - 6x \\ 8x - 4x + 6x &= 4 + 36 \\ 10x &= 40\end{aligned}$$

Stap 2: Deel weerskante deur 10

$$x = 4$$

Stap 3: Kontroleer die antwoord deur die oplossing weer in te stel in die oorspronklike vergelyking

$$\begin{aligned}\text{LK} &= 4[2(4)-9]-4(4)\\ &= 4(8-9)-16\\ &= 4(-1)-16\\ &= -4-16\\ &= -20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{RK} &= 4-6(4)\\ &= 4-24\\ &= -20\end{aligned}$$

$\therefore$ LK $=$ RK. Aangesien beide kant gelyk is, is die antwoord reg.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Oplos van lineêre vergelykings

VRAAG

Los op vir x:

$$\frac{2-x}{3x+1}=2$$

OPLOSSING

Stap 1: Vermenigvuldig beide kante van die vergelyking met $(3x+1)$

Deling deur 0 is ongedefinieerd, dus moet daar 'n beperking wees: $\left(x \neq -\frac{1}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{3x+1} &= 2\\ (2-x) &= 2(3x+1)\end{aligned}$$

Stap 2: Brei die hakies uit en vereenvoudig

$$\begin{aligned}2-x &= 6x+2\\ -x-6x &= 2-2\\ -7x &= 0\end{aligned}$$

Stap 3: Deel weerskante deur -7

$$\begin{aligned}x &= \frac{0}{-7}\\ x &= 0\end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer die antwoord deur die oplossing weer in te stel in die oorspronklike vergelyking

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \frac{2-(0)}{3(0)+1}\\ &= 2\\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Aangesien beide kant gelyk is, is die antwoord reg.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Oplos van lineêre vergelykings

VRAAG

Los op vir a:

$$\frac{2a-3}{3} - 3a = \frac{a}{3}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vermenigvuldig die vergelyking met die gemene noemer 3 en vereenvoudig

$$\begin{aligned} 2a - 3 - 9a &= a \\ -7a - 3 &= a \end{aligned}$$

Stap 2: Herrangskik die terme en vereenvoudig

$$\begin{aligned} -7a - a &= 3 \\ -8a &= 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Deel weerskante deur -8

$$a = -\frac{3}{8}$$

Stap 4: Kontroleer die antwoord deur die oplossing weer in te stel in die oorspronklike vergelyking

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{2\left(-\frac{3}{8}\right) - 3}{3} - 3\left(-\frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{12}{4}}{3} + \frac{9}{8} \\ &= \left[-\frac{15}{4} \times \frac{1}{3}\right] + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{10}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \\ \text{RK} &= \frac{-\frac{3}{8}}{3} \\ &= \frac{-\frac{3}{8}}{3} \\ &= -\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{8} \\ \therefore \text{LK} &= \text{RK} \end{aligned}$$

Aangesien beide kant gelyk is, is die antwoord reg.

Oefening 4 – 1:

Los die volgende vergelykings op (aanvaar geen noemer is nul nie)

1. $2y - 3 = 7$
2. $2c = c - 8$
3. $3 = 1 - 2c$
4. $4b + 5 = -7$
5. $-3y = 0$
6. $16y + 4 = -10$
7. $12y + 0 = 144$
8. $7 + 5y = 62$
9. $55 = 5x + \frac{3}{4}$
10. $5x = 2x + 45$
11. $23x - 12 = 6 + 3x$
12. $12 - 6x + 34x = 2x - 24 - 64$
13. $6x + 3x = 4 - 5(2x - 3)$
14. $18 - 2p = p + 9$
15. $\dfrac{4}{p} = \dfrac{16}{24}$
16. $-(-16 - p) = 13p - 1$
17. $3f - 10 = 10$
18. $3f + 16 = 4f - 10$
19. $10f + 5 = -2f - 3f + 80$
20. $8(f - 4) = 5(f - 4)$
21. $6 = 6(f + 7) + 5f$
22. $-7x = 8(1 - x)$
23. $5 - \dfrac{7}{b} = \dfrac{2(b+4)}{b}$
24. $\dfrac{x+2}{4} - \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{1}{2}$
25. $1 = \dfrac{3a-4}{2a+6}$
26. $\dfrac{2-5a}{3} - 6 = \dfrac{4a}{3} + 2 - a$
27. $2 - \dfrac{4}{b+5} = \dfrac{3b}{b+5}$
28. $3 - \dfrac{y-2}{4} = 4$
29. $1{,}5x + 3{,}125 = 1{,}25x$
30. $1{,}3(2{,}7x + 1) = 4{,}1 - x$
31. $6{,}5x - 4{,}15 = 7 + 4{,}25x$
32. $\frac{1}{3}P + \frac{1}{2}P - 10 = 0$
33. $1\frac{1}{4}(x - 1) - 1\frac{1}{2}(3x + 2) = 0$
34. $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{3}(x - 2) + 3$
35. $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{1}{6a} - \dfrac{3}{a} = 2$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HX4	2. 2HX5	3. 2HX6	4. 2HX7	5. 2HX8	6. 2HX9	7. 2HXB	8. 2HXC
9. 2HXD	10. 2HXF	11. 2HXG	12. 2HXH	13. 2HXJ	14. 2HXK	15. 2HXM	16. 2HXN
17. 2HXP	18. 2HXQ	19. 2HXR	20. 2HXS	21. 2HXT	22. 2HXV	23. 2HXW	24. 2HXX
25. 2HXY	26. 2HXZ	27. 2HY2	28. 2HY3	29. 2HY4	30. 2HY5	31. 2HY6	32. 2HY7
33. 2HY8	34. 2HY9	35. 2HYB					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.3 Oplos van kwadratiese vergelykings EMD36

'n Kwadratiese vergelyking is 'n vergelyking waar die eksponent van die veranderlike op die meeste 2 is. Die volgende is voorbeelde van kwadratiese vergelykings:

$$2x^2 + 2x = 1$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$0 = -2x^2 + 4x - 2$$

Kwadratiese vergelykings verskil van lineêre vergelykings daarin dat 'n lineêre vergelyking op die meeste een oplossing het, terwyl 'n kwadratiese vergelyking op die meeste twee oplossings het. Daar is egter sekere spesiale gevalle waar 'n kwadratiese vergelyking een of geen oplossings het.

Ons los kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Byvoorbeeld,om $2x^2 - x - 3 = 0$ op te los, moet ons dit skryf in sy ekwivalente gefaktoriseerde vorm as $(x + 1)(2x - 3) = 0$. Let daarop dat as $a \times b = 0$ dan $a = 0$ of $b = 0$.

BESOEK:
Die volgende video toon 'n voorbeeld van die oplos van 'n kwadratiese vergelyking deur faktorisering.
Sien video: 2HYC at www.everythingmaths.co.za

Metode vir die oplos van kwadratiese vergelykings EMD37

1. Herskryf die vergelyking in die verlangde vorm, $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Deel die hele vergelyking deur enige gemeenskaplike faktor van die koëffisiënte om 'n vergelyking te kry van die vorm $ax^2+bx+c = 0$, waar a, b en c geen gemene faktore het nie. Byvoorbeeld $2x^2+4x+2 = 0$ kan geskryf word as $x^2 + 2x + 1 = 0$.
3. Faktoriseer $ax^2 + bx + c = 0$ na die vorm $(rx + s)(ux + v) = 0$.
4. Die twee oplossings is $(rx + s) = 0$ of $(ux + v) = 0$, dus $x = -\frac{s}{r}$ of $x = -\frac{v}{u}$, onderskeidelik.
5. Kontroleer die antwoord deur substitusie in die oorspronklike vergelyking.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Oplos van kwadratiese vergelykings

VRAAG

Los op vir x:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

OPLOSSING

Stap 1: Die vergelyking is alreeds in die verlangde vorm, $ax^2 + bx + c = 0$
Stap 2: Faktoriseer

$$(x + 1)(3x - 1) = 0$$

Stap 3: Los op vir beide faktore
Ons het:

$$x + 1 = 0 \qquad \therefore x = -1$$

OF

$$3x - 1 = 0 \qquad \therefore x = \frac{1}{3}$$

Stap 4: Kontroleer beide antwoorde deur substitusie in die oorspronklike vergelyking in
Stap 5: Skryf die finale antwoord
Die oplossing van $3x^2 + 2x - 1 = 0$ is $x = -1$ of $x = \frac{1}{3}$.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Oplos van kwadratiese vergelykings

VRAAG

Bepaal die wortels:

$$0 = -2x^2 + 4x - 2$$

OPLOSSING

Stap 1: Die vergelyking is alreeds in die verlangde vorm, $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 2: Deel die vergelyking met die gemene faktor -2

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x - 2 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Stap 3: Faktoriseer

$$\begin{aligned} (x - 1)(x - 1) &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Stap 4: Die linkerkant van die vergelyking is 'n volkome vierkant

Dit is 'n voorbeeld van 'n spesiale situasie waarin daar slegs een oplossing is vir 'n kwadratiese vergelyking omdat beide faktore dieselfde is.

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

Stap 5: Kontroleer die antwoord deur substitusie terug in die oorspronklike vergelyking

Stap 6: Skryf die finale antwoord

Die oplossing van $0 = -2x^2 + 4x - 2$ is $x = 1$.

Oefening 4 – 2:

1. Skryf die volgende in standaardvorm a) $(r + 4)(5r - 4) = -16$ b) $(3r - 8)(2r - 3) = -15$ c) $(d + 5)(2d + 5) = 8$
2. Los die volgende vergelykings op:
   a) $x^2 + 2x - 15 = 0$
   b) $p^2 - 7p - 18 = 0$
   c) $9x^2 - 6x - 8 = 0$
   d) $5x^2 + 21x - 54 = 0$
   e) $4z^2 + 12z + 8 = 0$
   f) $-b^2 + 7b - 12 = 0$
   g) $-3a^2 + 27a - 54 = 0$
   h) $4y^2 - 9 = 0$

i) $4x^2 + 16x - 9 = 0$
j) $4x^2 - 12x = -9$
k) $20m + 25m^2 = 0$
l) $2x^2 - 5x - 12 = 0$
m) $-75x^2 + 290x = 240$
n) $2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3}$
o) $x^2 - 4x = -4$
p) $-x^2 + 4x - 6 = 4x^2 - 14x + 3$
q) $t^2 = 3t$
r) $x^2 - 10x = -25$
s) $x^2 = 18$
t) $p^2 - 6p = 7$
u) $4x^2 - 17x - 77 = 0$
v) $14x^2 + 5x = 6$
w) $2x^2 - 2x = 12$
x) $(2a - 3)^2 - 16 = 0$
y) $(x - 6)^2 - 24 = 1$

3. Los die volgende vergelykings op (let op die beperkings wat van toepassing is):

a) $3y = \dfrac{54}{2y}$
b) $\dfrac{10z}{3} = 1 - \dfrac{1}{3z}$
c) $x + 2 = \dfrac{18}{x} - 1$
d) $y - 3 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{y}$
e) $\dfrac{1}{2}(b - 1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{b} + 4\right)$
f) $3(y + 1) = \dfrac{4}{y} + 2$
g) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) - 15 = 0$
h) $z^4 - 1 = 0$
i) $b^4 - 13b^2 + 36 = 0$
j) $\dfrac{a + 1}{3a - 4} + \dfrac{9}{2a + 5} + \dfrac{2a + 3}{2a + 5} = 0$
k) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 0$
l) $x + 2 = \dfrac{6x - 12}{x - 2}$
m) $\dfrac{3(a^2 + 1) + 10a}{3a + 1} = 1$
n) $\dfrac{3}{9a^2 - 3a + 1} - \dfrac{3a + 4}{27a^3 + 1} = \dfrac{1}{9a^2 - 1}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HYD	1b. 2HYF	1c. 2HYG	2a. 2HYH	2b. 2HYJ	2c. 2HYK	2d. 2HYM	2e. 2HYN
2f. 2HYP	2g. 2HYQ	2h. 2HYR	2i. 2HYS	2j. 2HYT	2k. 2HYV	2l. 2HYW	2m. 2HYX
2n. 2HYY	2o. 2HYZ	2p. 2HZ2	2q. 2HZ3	2r. 2HZ4	2s. 2HZ5	2t. 2HZ6	2u. 2HZ7
2v. 2HZ8	2w. 2HZ9	2x. 2HZB	2y. 2HZC	3a. 2HZD	3b. 2HZF	3c. 2HZG	3d. 2HZH
3e. 2HZJ	3f. 2HZK	3g. 2HZM	3h. 2HZN	3i. 2HZP	3j. 2HZQ	3k. 2HZR	3l. 2HZS
3m. 2HZT	3n. 2HZV						

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.4 Oplos van gelyktydige vergelykings EMD38

Tot op hede het ons vergelykings opgelos met slegs een onbekende veranderlike. Wanneer daar twee onbekende veranderlikes gevind moet word, is twee vergelykings nodig en hierdie vergelykings staan bekend as gelyktydige vergelykings. Die oplossings is die waardes vir die onbekende veranderlikes wat beide vergelykings gelyktydig bevredig. In die algemeen, as daar n onbekende veranderlikes is, dan word n onafhanklike vergelykings benodig om 'n waarde te kry vir elk van die n veranderlikes.

ń Voorbeeld van 'n stelsel van gelyktydige vergelykings is:

$$x + y = -1$$
$$3 = y - 2x$$

Ons het twee onafhanklike vergelykings om twee onbekende veranderlikes op te los. Ons kan gelyktydige vergelykings algebraïes oplos deur substitusie en eliminasie metodes. Ons sal ook wys dat 'n stel gelyktydige vergelykings grafies opgelos kan word.

Oplos deur substitusie EMD39

- Gebruik die eenvoudigste van die twee gegewe vergelykings om een van die veranderlikes uit te druk in terme van die ander.
- Vervang in die tweede vergelyking. Deur dit te doen, verminder ons die getal vergelykings en die getal veranderlikes met een.
- Ons het nou een vergelyking met een onbekende veranderlike om op te los.
- Gebruik die oplossing en vervang terug in die eerste vergelyking om die waarde te vind van die ander onbekende veranderlike.

BESOEK:
Die volgende video toon hoe om gelyktydige vergelykings op te los met substitusie.
Sien video: 2HZW at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los op vir x en y:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \qquad \ldots (1) \\ 3 &= y - 2x \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik vergelyking (1) om x uit te druk in terme van y

$$x = y + 1$$

Stap 2: Vervang x in die vergelyking (2) en los op vir y

$$\begin{aligned} 3 &= y - 2(y + 1) \\ 3 &= y - 2y - 2 \\ 5 &= -y \\ \therefore y &= -5 \end{aligned}$$

Stap 3: Vervang y terug in die vergelyking in (1) en los op vir x

$$\begin{aligned} x &= (-5) + 1 \\ \therefore x &= -4 \end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer die oplossing deur die antwoorde terug te stel in beide die oorspronklike vergelykings

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned} x &= -4 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los die volgende stelsel van vergelykings op:

$$\begin{aligned} 4y + 3x &= 100 \qquad \ldots(1) \\ 4y - 19x &= 12 \qquad \ldots(2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik enige van die vergelykings om x uit te druk in terme van y

$$\begin{aligned} 4y + 3x &= 100 \\ 3x &= 100 - 4y \\ x &= \frac{100 - 4y}{3} \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang x in die vergelyking (2) en los op vir y

$$\begin{aligned} 4y - 19\left(\frac{100 - 4y}{3}\right) &= 12 \\ 12y - 19(100 - 4y) &= 36 \\ 12y - 1900 + 76y &= 36 \\ 88y &= 1936 \\ \therefore y &= 22 \end{aligned}$$

Stap 3: Vervang y terug in die vergelyking in (1) en los op vir x

$$\begin{aligned} x &= \frac{100 - 4(22)}{3} \\ &= \frac{100 - 88}{3} \\ &= \frac{12}{3} \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer die oplossing deur die antwoorde terug te stel in beide die oorspronklike vergelykings

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los die volgende stelsel van vergelykings op:

$$
\begin{aligned}
3x + y &= 2 \qquad \ldots (1) \\
6x - y &= 25 \qquad \ldots (2)
\end{aligned}
$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak die koëffisiënte van een van die veranderlikes dieselfde in beide vergelykings

Die koëffisiënte van y in die gegewe vergelykings is 1 en -1. Elimineer die veranderlike y deur vergelyking (1) en vergelyking (2) bymekaar te tel.

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 3x + y & = & 2 \\
+ & 6x - y & = & 25 \\
\hline
 & 9x + 0 & = & 27
\end{array}
$$

Stap 2: Vereenvoudig en los op vir x

$$
\begin{aligned}
9x &= 27 \\
\therefore x &= 3
\end{aligned}
$$

Stap 3: Vervang x terug in enige van die oorspronklike vergelykings en los op vir y

$$
\begin{aligned}
3(3) + y &= 2 \\
y &= 2 - 9 \\
\therefore y &= -7
\end{aligned}
$$

Stap 4: Toets dat die oplossing $x = 3$ en $y = -7$ beide die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$$
\begin{aligned}
x &= 3 \\
y &= -7
\end{aligned}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los die volgende gelyktydige vergelykings op:

$$\begin{aligned} 2a - 3b &= 5 \qquad \ldots (1) \\ 3a - 2b &= 20 \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak die koëffisiënte van een van die veranderlikes dieselfde in beide vergelykings

Deur vergelyking (1) te vermenigvuldig met 3 en vergelyking (2) met 2, sal beide koëffisiënte van a, gelyk wees aan 6.

$$\begin{array}{rrcr} & 6a - 9b & = & 15 \\ - & (6a - 4b & = & 40) \\ \hline & 0 - 5b & = & -25 \end{array}$$

(Wees versigtig met die tekens wanneer twee vergelykings afgetrek word.)

Stap 2: Vereenvoudig en los op vir b

$$\begin{aligned} b &= \frac{-25}{-5} \\ \therefore b &= 5 \end{aligned}$$

Stap 3: Substitueer die waarde van b terug in enige van die oorspronklike vergelykings en los op vir a

$$\begin{aligned} 2a - 3(5) &= 5 \\ 2a - 15 &= 5 \\ 2a &= 20 \\ \therefore a &= 10 \end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer dat die oplossing $a = 10$ en $b = 5$ beide die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale antwoord

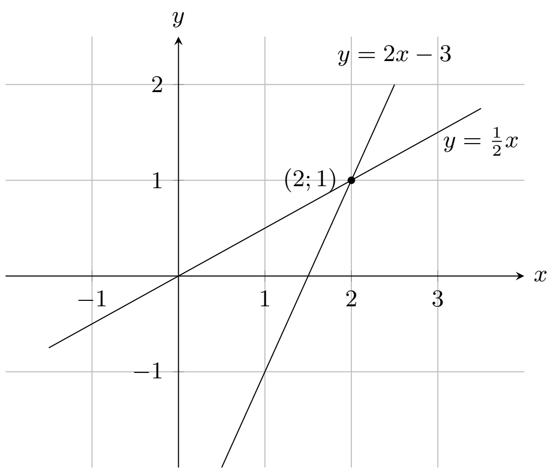
$$\begin{aligned} a &= 10 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Gelyktydige vergelykings kan ook grafies opgelos word. As die grafieke van elke lineêre vergelyking getrek word, dan is die oplossing van die stelsel van gelyktydige vergelykings die koördinate van die punt waar die twee grafieke mekaar sny.

Byvoorbeeld:

$$x = 2y \qquad \ldots(1)$$
$$y = 2x - 3 \qquad \ldots(2)$$

Die grafieke van die twee vergelykings word hieronder getoon.



Die snypunt van die twee grafieke is $(2;1)$. Dus die oplossing van die stelsel van gelyktydige vergelykings is $x = 2$ en $y = 1$. Ons kan ook die oplossing toets deur algebraïese metodes.

Substitueer vergelyking (1) in (2):

$$x = 2y$$
$$\therefore y = 2(2y) - 3$$

Los dan op vir y:

$$y - 4y = -3$$
$$-3y = -3$$
$$\therefore y = 1$$

Vervang die waarde van y terug in die vergelyking (1):

$$x = 2(1)$$
$$\therefore x = 2$$

Let op dat beide metodes dieselfde oplossing gee.

BESOEK:
Jy kan 'n aanlyn-hulpmiddel soos graphsketch gebruik om die grafieke te trek en jou oplossing te toets.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los die volgende stelsel van gelyktydige vergelykings grafies op:

$$4y + 3x = 100 \qquad \ldots(1)$$
$$4y - 19x = 12 \qquad \ldots(2)$$

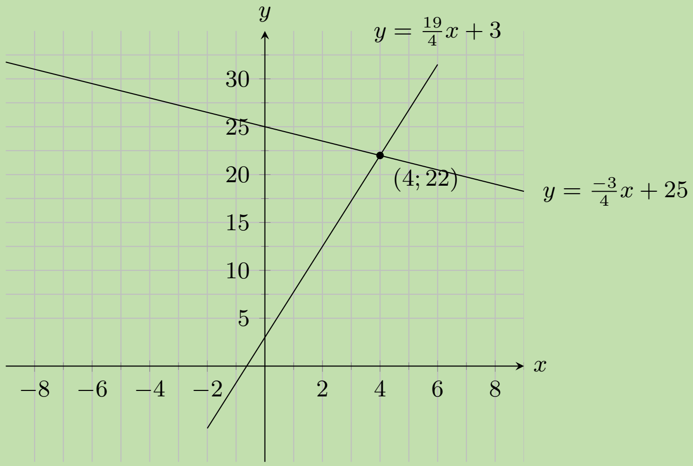
OPLOSSING

Stap 1: Skryf beide vergelykings in die vorm $y = mx + c$

$$\begin{aligned} 4y + 3x &= 100 \\ 4y &= 100 - 3x \\ y &= -\frac{3}{4}x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y - 19x &= 12 \\ 4y &= 19x + 12 \\ y &= \frac{19}{4}x + 3 \end{aligned}$$

Stap 2: Skets die grafieke op dieselfde assestelsel



Stap 3: Vind die koördinate van die snypunt

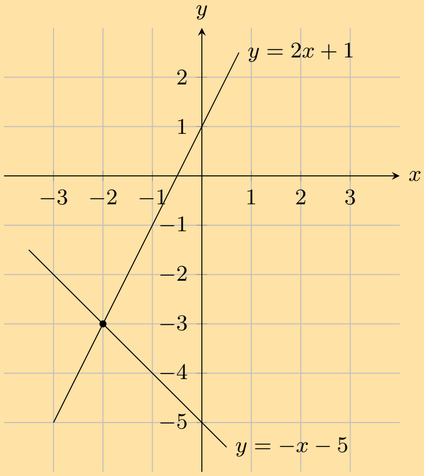
Die twee grafieke sny by $(4; 22)$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$$x = 4$$
$$y = 22$$

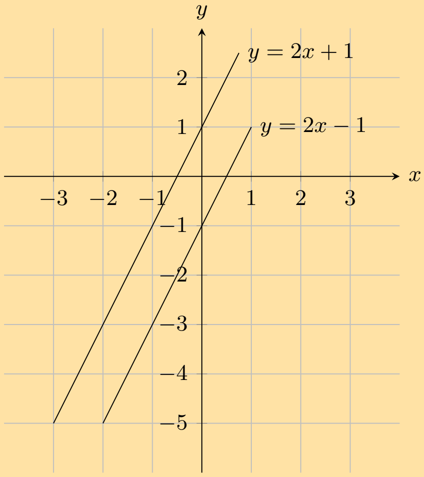
Oefening 4 – 3:

1. Kyk na die grafiek hieronder



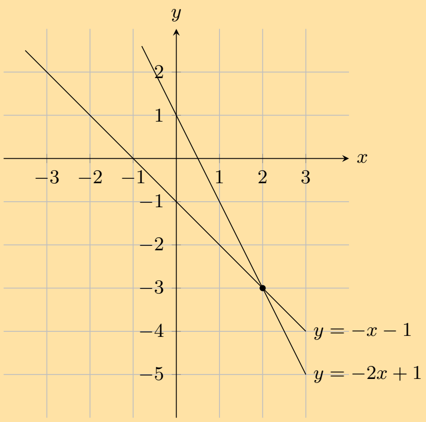
Los die vergelykings $y = 2x + 1$ en $y = -x - 5$ gelyktydig op

2. Kyk na die grafiek hieronder



Los die vergelykings $y = 2x - 1$ en $y = 2x + 1$ gelyktydig op

3. Kyk na die grafiek hieronder



Los die vergelykings $y = -2x + 1$ en $y = -x - 1$ gelyktydig op

4. Los op vir x en y:

a) $-10x = -1$ en $-4x + 10y = -9$.

b) $3x - 14y = 0$ en $x - 4y + 1 = 0$

c) $x + y = 8$ en $3x + 2y = 21$

d) $y = 2x + 1$ en $x + 2y + 3 = 0$

e) $5x - 4y = 69$ en $2x + 3y = 23$

f) $x + 3y = 26$ en $5x + 4y = 75$

g) $3x - 4y = 19$ en $2x - 8y = 2$

h) $\frac{a}{2} + b = 4$ en $\frac{a}{4} - \frac{b}{4} = 1$

i) $-10x + y = -1$ en $-10x - 2y = 5$.

j) $-10x - 10y = -2$ en $2x + 3y = 2$

k) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ en $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11$

l) $y = \frac{2(x^2+2) - 3}{x^2 + 2}$ en $y = 2 - \frac{3}{x^2+2}$

m) $3a + b = \frac{6}{2a}$ en $3a^2 = 3 - ab$

5. Los grafies op en kontroleer jou antwoord algebraïes.

a) $y + 2x = 0$ en $y - 2x - 4 = 0$

b) $x + 2y = 1$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

c) $y - 2 = 6x$ en $y - x = -3$

d) $2x + y = 5$ en $3x - 2y = 4$

e) $5 = x + y$ en $x = y - 2$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HZX 2. 2HZY 3. 2HZZ 4a. 2J2C 4b. 2J22 4c. 2J23 4d. 2J24 4e. 2J25
4f. 2J26 4g. 2J27 4h. 2J28 4i. 2J29 4j. 2J2B 4k. 2J2D 4l. 2J2F 4m. 2J2G
5a. 2J2K 5b. 2J2H 5c. 2J2M 5d. 2J2N 5e. 2J2J

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

4.5 Woordprobleme EMD3D

Om woordprobleme op te los, moet ons 'n stel vergelykings skep wat die probleem wiskundig voorstel. Die oplossing van die vergelykings is dan die antwoord van die probleem.

Probleemoplossing strategie EMD3F

1. Lees die hele vraag.
2. Wat moet ons oplos?
3. Ken 'n veranderlike toe aan die onbekende hoeveelheid, byvoorbeeld x.
4. Vertaal die woorde in algebraïese uitdrukkings deurdat jy die gegewe inligting herskryf in terme van die veranderlike.
5. Stel 'n vergelyking of 'n stelsel van vergelykings op om die veranderlike op te los.
6. Los die veranderlike algebraïes op met die gebruik van substitusie.
7. Toets die oplossing.

BESOEK:
Die volgende video toon twee voorbeelde van die hantering van woordprobleme.
Sien video: 2J2P at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 11: Los woordprobleme op

VRAAG

'n Winkel verkoop fietse en driewiele. Altesaam is daar 7 rygoed (wat beide fietse en driewiele insluit), en 19 wiele. Bepaal hoeveel van elke soort ryding daar is, as jy onthou dat 'n fiets twee wiele en 'n driewiel drie wiele het.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe aan die onbekende hoeveelhede

Gestel daar is b fietse en t driewiele.

Stap 2: Stel die vergelykings op

$$\begin{aligned} b + t &= 7 \qquad \ldots (1) \\ 2b + 3t &= 19 \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

Stap 3: Herrangskik vergelyking (1) en vervang in vergelyking (2)

$$\begin{aligned} t &= 7 - b \\ \therefore 2b + 21 - 3b &= 19 \\ -b &= -2 \\ \therefore b &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die aantal driewiele t

$$\begin{aligned} t &= 7 - b \\ &= 7 - 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Daar is 5 driewiele en 2 fietse.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Los woordprobleme op

VRAAG

Bongani en Jane is vriende. Bongani kyk na Jane se wiskundetoets en wil nie vir haar sê wat haar toetspunt is nie. Hy weet Jane hou nie van wiskunde nie en besluit om haar te terg. Hy sê: "Ek het 2 punte meer as jy en die som van ons twee se punte is gelyk aan 14. Wat is ons punte?"

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe aan die onbekende hoeveelhede

Ons het twee onbekende hoeveelhede, Bongani se punt en Jane se punt. Gestel Bongani se punt is b en Jane se punt is j.

Stap 2: Stel 'n stelsel van vergelykings op

Bongani het 2 meer punte as Jane.

$$b = j + 2 \qquad \ldots (1)$$

Beide se punte bymekaargetel is 14.

$$b + j = 14 \qquad \ldots (2)$$

Stap 3: Gebruik vergelyking (1) om b uit te druk in terme van j

$$b = j + 2$$

Stap 4: Vervang in vergelyking (2)

$$\begin{aligned} b + j &= 14 \\ (j + 2) + j &= 14 \end{aligned}$$

Stap 5: Herrangskik en los op vir j

$$\begin{aligned} 2j &= 14 - 2 \\ &= 12 \\ \therefore j &= 6 \end{aligned}$$

Stap 6: Vervang die waarde vir j terug in die vergelyking (1) en los op vir b

$$\begin{aligned} b &= j + 2 \\ &= 6 + 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Stap 7: Kontroleer dat die oplossing beide die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 8: Skryf die finale antwoord

Bongani het 8 vir sy toets gekry en Jane het 6 gekry.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Los woordprobleme op

VRAAG

'n Vrugteskommel kos R 2,00 meer as 'n sjokolade melkskommel. As 3 vrugteskommels en 5 sjokolade melkskommels R 78,00 kos, bepaal die individuele pryse.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe aan die onbekende hoeveelhede

Gestel die prys van 'n sjokolade melkskommel is x en die prys van 'n vrugteskommel is y.

Stap 2: Stel 'n stelsel van vergelykings op

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \qquad \ldots (1) \\ 3y + 5x &= 78 \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

Stap 3: Vervang vergelyking (1) in (2)

$$3(x + 2) + 5x = 78$$

Stap 4: Herrangskik en los op vir x

$$\begin{aligned} 3x + 6 + 5x &= 78 \\ 8x &= 72 \\ \therefore x &= 9 \end{aligned}$$

Stap 5: Vervang die waarde van x terug in die vergelyking (1) en los op vir y

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ &= 9 + 2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Stap 6: Kontroleer dat die oplossing beide die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 7: Skryf die finale antwoord

Een sjokolade melkskommel kos R 9,00 en een vrugteskommel kos R 11,00.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Los woordprobleme op

VRAAG

Die produk van twee opeenvolgende negatiewe heelgetalle is 1122. Vind die twee heelgetalle.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe aan die onbekende hoeveelhede

Gestel die eerste heelgetal is n en laat die tweede heelgetal dan $n + 1$ wees.

Stap 2: Stel 'n vergelyking op

$$n(n+1) = 1122$$

Stap 3: Brei uit en los op vir n

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 1122 \\ n^2 + n - 1122 &= 0 \\ (n+34)(n-33) &= 0 \\ \therefore n &= -34 \\ \text{of } n &= 33 \end{aligned}$$

Stap 4: Vind die tekens van die heelgetalle

Dit word gegee dat beide heelgetalle negatief is.

$$\begin{aligned} \therefore n &= -34 \\ n+1 &= -34+1 \\ &= -33 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die twee opeenvolgende negatiewe heelgetalle is -34 en -33.

Oefening 4 – 4:

1. Twee straalvliegtuie vlieg na mekaar toe vanaf verskillende lughawens wat 1200 km van mekaar is. Een vliegtuig vlieg teen 250 km·h^{-1} en die ander vlieg teen 350 km·h^{-1}. As hulle op dieselfde tyd opstyg, hoe lank sal dit vat vir die twee vliegtuie om by mekaar verby te vlieg?
2. Twee bote beweeg na mekaar toe van hawens wat 144 km van mekaar af is. Een boot beweeg teen 63 km·h^{-1} en die ander boot teen 81 km·h^{-1}. As beide bote hulle reis op dieselfde tyd begin, hoe lank sal dit neem voor hulle by mekaar verbyvaar?
3. Zwelibanzi en Jessica is vriende. Zwelibanzi neem Jessica se tegnologie antwoordstel en wil nie vir haar sê wat haar punt is nie. Hy weet sy hou nie van woordprobleme nie, dus besluit hy om haar te terg. Zwelibanzi sê: "Ek het 12 punte meer as jy en die som van albei van ons se punte saam is gelyk aan 148. Wat is ons punte"
4. Kadesh koop 20 hemde teen 'n totale koste van R 980. As 'n groot hemp R 50 kos en 'n kleiner hemp kos R 40, hoeveel van elke grootte het hy gekoop?
5. Die diagonaal of hoeklyn van 'n reghoek is 25 cm meer sy breedte. Die lengte van die reghoek is 17 cm meer as sy breedte. Wat is die afmetings van die reghoek?
6. Die som van 27 en 12 is 73 meer as 'n onbekende getal. Vind die onbekende getal.
7. 'n Groep vriende koop middagete. Hier is 'n paar feite oor hulle ete:
   - 'n melkskommel kos R 7 meer as 'n pannekoek
   - die groep koop 8 melkskommels en 2 pannekoeke
   - die totale koste vir die middagete is R 326

   Bepaal die individuele pryse vir die verskillende items.

8. Die twee kleiner hoeke in 'n reghoekige driehoek is in die verhouding van $1 : 2$. Wat is die groottes van die twee hoeke?
9. Die lengte van 'n reghoek is twee maal sy breedte. As die oppervlakte 128 cm^2 is, bepaal die lengte en die breedte.
10. As 4 maal 'n getal vermeerder word met 6, is die resultaat 15 minder as die kwadraat van die getal. Vind die getal.
11. Die lengte van 'n reghoek is 2 cm meer as die breedte van die reghoek. Die omtrek van die reghoek is 20 cm. Vind die lengte en die breedte van die reghoek.
12. Stephen het 1 liter van 'n mengsel wat 69% sout bevat. Hoeveel water moet Stephen byvoeg sodat die mengsel 50% sout sal bevat? Skryf jou antwoord as 'n breukdeel van 'n liter.
13. Die som van twee opeenvolgende onewe getalle is 20 en hulle verskil is 2. Vind die twee getalle.
14. Die noemer van 'n breuk is 1 meer as die teller. Die som van die breuk en sy resiprook is $\frac{5}{2}$. Vind die breuk.
15. Masindi is 21 jaar ouer as haar dogter, Mulivhu. Die som van hulle ouderdomme is 37. Hoe oud is Mulivhu?
16. Tshamano is nou vyf maal so oud as sy seun Murunwa. Oor sewe jaar sal Tshamano drie maal so oud soos sy seun wees. Bepaal hoe oud is hulle nou.
17. Wanneer jy een bytel by drie maal 'n getal, is die antwoord gelyk aan die getal. Wat is hierdie getal?
18. As 'n derde van die som van 'n getal en een ekwivalent is aan 'n breuk, waarvan die noemer dieselfde is as die getal en die teller gelyk is aan twee, wat is die getal?
19. 'n Winkeleienaar koop 40 sakke rys en mieliemeel wat in totaal R 5250 werd is. As die rys R 150 per sak kos en die mieliemeel kos R 100 per sak, hoeveel sakke mieliemeel het hy gekoop?
20. Daar is 100 koekies blou en groen seep in 'n boks. Die blou seep weeg 50 g per koekie seep en die groen seep weeg 40 g per koekie seep. Die totale massa van die seep in die boks is 4,66 kg. Hoeveel koekies groen seep is daar in die boks?
21. Lisa het 170 krale. Sy het blou, rooi en pers krale wat onderskeidelik 13 g, 4 g en 8 g per kraal weeg. As daar tweekeer soveel rooi krale as blou krale is en as al die krale saam 1,216 kg weeg, hoeveel krale van elke tipe het Lisa?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J2Q	2. 2J2R	3. 2J2S	4. 2J2T	5. 2J2V	6. 2J2W
7. 2J2X	8. 2J2Y	9. 2J2Z	10. 2J32	11. 2J33	12. 2J34
13. 2J35	14. 2J36	15. 2J37	16. 2J38	17. 2J39	18. 2J3B
19. 2J3C	20. 2J3D	21. 2J3F			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.6 Vergelykings met letterkoëffisiënte EMD3G

'n Vergelyking met letterkoëffisiënte is een wat verskeie letters of veranderlikes het. Voorbeelde sluit in die area van 'n sirkel $\left(A = \pi r^2\right)$ en die formule vir spoed $\left(v = \frac{D}{t}\right)$. In hierdie afdeling los ons vergelykings met letterkoëffisiënte op in terme van een van die veranderlikes. Om dit te doen, gebruik ons die beginsels wat ons geleer het oor die oplos van vergelykings en pas hulle toe om vergelykings met letterkoëffisiënte te herrangskik. Om hierdie soort vergelykings op te los, staan ook bekend as verandering van die onderwerp van 'n formule.

Hou die volgende in gedagte wanneer jy vergelykings met letterkoëffisiënte oplos:

- Ons isoleer die onbekende veranderlike deur te vra "waaraan is dit verbind?" en "hoe is dit verbind?" Ons voer dan die teenoorgestelde bewerking uit op beide kante van die geheel.

- As die onbekende veranderlike in twee of meer terme voorkom, haal ons dit uit as 'n gemeenskaplike faktor.
- As ons die vierkantswortel weerskante moet neem, moet ons onthou dat daar 'n positiewe en 'n negatiewe antwoord sal wees.
- As die onbekende veranderlike in die noemer is, vermenigvuldig ons weerskante met die kleinste gemene noemer (KGN) en gaan voort om die vergelyking op te los.

BESOEK:
Die volgende video toon 'n voorbeeld van die oplos van vergelykings met letterkoëffisiënte.
Sien video: 2J3G at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 15: Los vergelykings op met letterkoëffisiënte

VRAAG

Die oppervlakte (area) van 'n driehoek is $A = \frac{1}{2}bh$. Wat is die hoogte van die driehoek in terme van die basis en die oppervlakte?

OPLOSSING

Stap 1: Isoleer die verlangde veranderlike

Ons word gevra om die hoogte te isoleer, dus moet ons die vergelyking herrangskik met h aan die aan kant van die gelykaanteken en die res van die veranderlikes aan die ander kant.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bh \\ 2A &= bh \\ \frac{2A}{b} &= h \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord

Die hoogte van 'n driehoek word gegee deur: $h = \frac{2A}{b}$

Uitgewerkte voorbeeld 16: Los vergelykings op met letterkoëffisiënte

VRAAG

Gegee die formule: $h = R \times \frac{H}{R + r^2}$. Maak R die onderwerp van die formule.

OPLOSSING

Stap 1: Isoleer die verlangde veranderlike

$$\begin{aligned} h\left(R + r^2\right) &= R \times H \\ hR + hr^2 &= HR \\ hr^2 &= HR - hR \\ hr^2 &= R(H - h) \\ \therefore R &= \frac{hr^2}{H - h} \end{aligned}$$

Oefening 4 – 5:

1. Los op vir x in die volgende formule: $2x + 4y = 2$.
2. Maak a die onderwerp van die formule: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$.
3. Los op vir n: $pV = nRT$.
4. Maak x die onderwerp van die formule: $\frac{1}{b} + \frac{2b}{x} = 2$.
5. Los op vir r : $V = \pi r^2 h$.
6. Los op vir h: $E = \frac{hc}{\lambda}$.
7. Los op vir h: $A = 2\pi rh + 2\pi r$.
8. Maak λ die onderwerp van die formule: $t = \frac{D}{f\lambda}$.
9. Los op vir m: $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$.
10. Los op vir x: $x^2 + x(a + b) + ab = 0$.
11. Los op vir b: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
12. Maak U die onderwerp van die formule: $\frac{1}{V} = \frac{1}{U} + \frac{1}{W}$.
13. Los op vir r: $A = \pi R^2 - \pi r^2$.
14. $F = \frac{9}{5}C + 32°$ is die formule vir die omskakeling van temperatuur in grade Celsius na grade Fahrenheit. Lei 'n formule af vir die omskakeling van grade Fahrenheit na grade Celcius.
15. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ is die formule vir die bepaling van die volume van 'n sokkerbal. Druk die radius uit in terme van die volume.
16. Los op vir x in $x^2 - ax - 3x = 4 + a$
17. Los op vir x in: $ax^2 - 4a + bx^2 - 4b = 0$
18. Los op vir x in $v^2 = u^2 + 2ax$ as $v = 2$, $u = 0{,}3$, $a = 0{,}5$
19. Los op vir u in $f' = f\frac{v}{v - u}$ as $v = 13$, $f = 40$, $f' = 50$
20. Los op vir h in $I = \frac{bh^2}{12}$ as $b = 18$, $I = 384$
21. Los op vir r_2 in $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ as $R = \frac{3}{2}$, $r_1 = 2$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J3H	2. 2J3J	3. 2J3K	4. 2J3M	5. 2J3N	6. 2J3P	7. 2J3Q
8. 2J3R	9. 2J3S	10. 2J3T	11. 2J3V	12. 2J3W	13. 2J3X	14. 2J3Y
15. 2J3Z	16. 2J42	17. 2J43	18. 2J44	19. 2J45	20. 2J46	21. 2J47

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.7 Los lineêre ongelykhede op EMD3H

'n Lineêre ongelykheid is soortgelyk aan 'n lineêre vergelyking daarin dat 1 die grootste eksponent van 'n veranderlike is. Die volgende is voorbeelde van lineêre ongelykhede.

$$2x + 2 \leq 1$$
$$\frac{2 - x}{3x + 1} \geq 2$$
$$\frac{4}{3}x - 6 < 7x + 2$$

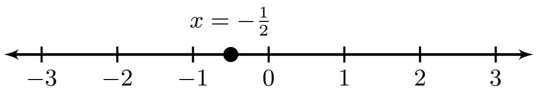
Die metodes wat gebruik word om lineêre ongelykhede op te los, is soortgelyk aan die metodes gebruik om lineêre vergelykings op te los. Ons weet byvoorbeeld dat $8 > 6$. As beide kante van hierdie ongelykheid gedeel word met -2, dan kry ons $-4 > -3$, wat nie waar is nie. Dus, die ongelykheidsteken moet omgedraai word, wat $-4 < -3$ gee.

Ten einde die ongelykheid te vergelyk met 'n gewone vergelyking, sal ons eers 'n vergelyking oplos.

Los op $2x + 2 = 1$:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 1 \\ 2x &= 1 - 2 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

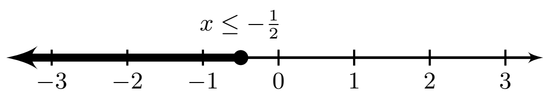
As ons hierdie antwoord voorstel op 'n getallelyn, kry ons:



Laat ons nou vir x op in 'n ongelykheid los $2x + 2 \leq 1$:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &\leq 1 \\ 2x &\leq 1 - 2 \\ 2x &\leq -1 \\ x &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

As ons hierdie antwoord voorstel op 'n getallelyn, kry ons:



Ons sien dat vir 'n vergelyking is daar 'n enkele waarde van x waarvoor die vergelyking waar is. In 'n ongelykheid egter, is daar 'n reeks waardes waarvoor die ongelykheid waar is. Dit is die groot verskil tussen 'n vergelyking en 'n ongelykheid.

Onthou: wanneer ons beide kante van 'n ongelykheid deel of vermenigvuldig met 'n negatiewe getal, verander die rigting van die ongelykheid. Byvoorbeeld, as $x < 1$, dan $-x > -1$. Let ook daarop dat ons nie met 'n veranderlike kan deel of vermenigvuldig nie.

NOTA:
Die volgende video verskaf 'n inleiding tot lineêre ongelykhede.
Sien video: 2J48 at www.everythingmaths.co.za

Intervalnotasie EMD3J

Voorbeelde:

$(4; 12)$	Ronde hakies dui aan dat die eindgetalle nie ingesluit is nie. Hierdie interval sluit alle reële getalle in groter as, maar nie gelyk aan, 4 nie en kleiner as, maar nie gelyk aan, 12 nie.
$(-\infty; -1)$	Ronde hakies word altyd gebruik vir positief en negatief oneindig. Hierdie interval sluit alle reële getalle in wat kleiner is as, maar nie gelyk is aan, -1 nie.
$[1; 13)$	'n Vierkantige hakie dui aan dat die eindgetal ingesluit is. Hierdie interval sluit in alle reële getalle wat groter of gelyk is aan 1 en wat kleiner is as, maar nie gelyk is aan, 13 nie.

Dit is belangrik om daarop te let dat hierdie notasie slegs gebruik kan word om intervalle bestaande uit reële getalle aan te dui.

Ons stel die antwoord hierbo in intervalnotasie voor as $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Los lineêre vergelykings op

VRAAG

Los op vir r:

$$6 - r > 2$$

Stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

OPLOSSING

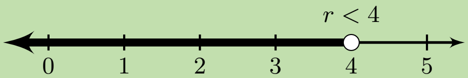
Stap 1: Herrangskik en los op vir r

$$\begin{aligned} -r &> 2 - 6 \\ -r &> -4 \end{aligned}$$

Stap 2: Vermenigvuldig met -1 en draai die ongelykheidsteken om

$$r < 4$$

Stap 3: Stel die antwoord voor op 'n getallelyn



Stap 4: Stel die antwoord voor in intervalnotasie

$$(-\infty; 4)$$

Uitgewerkte voorbeeld 18: Los lineêre vergelykings op

VRAAG

Los op vir q:

$$4q + 3 < 2(q + 3)$$

Stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

OPLOSSING

Stap 1: Brei die hakies uit

$$\begin{aligned} 4q + 3 &< 2(q + 3) \\ 4q + 3 &< 2q + 6 \end{aligned}$$

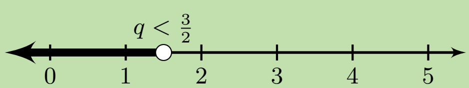
Stap 2: Herrangskik en los op vir q

$$\begin{aligned} 4q + 3 &< 2q + 6 \\ 4q - 2q &< 6 - 3 \\ 2q &< 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Deel weerskante deur 2

$$\begin{aligned} 2q &< 3 \\ q &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Stap 4: Stel die antwoord voor op ’n getallelyn



Stap 5: Stel die antwoord voor in intervalnotasie
$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

Uitgewerkte voorbeeld 19: Los saamgestelde lineêre ongelykhede op

VRAAG

Los op vir x:

$$5 \leq x + 3 < 8$$

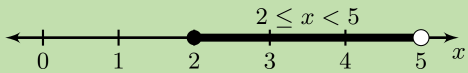
Stel die antwoord voor op ’n getallelyn en in intervalnotasie.

OPLOSSING

Stap 1: Trek 3 af van elke deel van die ongelykheid

$$\begin{array}{ccccc} 5 - 3 & \leq & x + 3 - 3 & < & 8 - 3 \\ 2 & \leq & x & < & 5 \end{array}$$

Stap 2: Stel die antwoord voor op 'n getallelyn



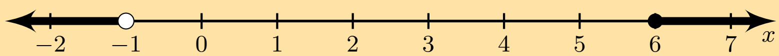
Stap 3: Stel die antwoord voor in intervalnotasie

$[2; 5)$

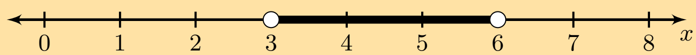
Oefening 4 – 6:

1. Kyk na die getallelyn en skryf die ongelykheid neer wat dit voorstel.

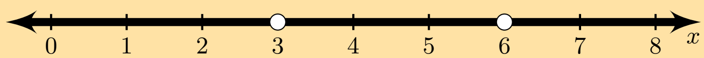
   a)

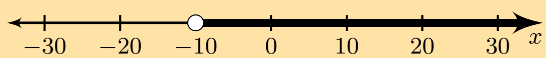
   b)

   c)

   d)

2. Los op vir x en stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

   a) $3x + 4 > 5x + 8$

   b) $3(x - 1) - 2 \leq 6x + 4$

   c) $\dfrac{x - 7}{3} > \dfrac{2x - 3}{2}$

   d) $-4(x - 1) < x + 2$

   e) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}(x - 1) \geq \dfrac{5}{6}x - \dfrac{1}{3}$

   f) $-2 \leq x - 1 < 3$

   g) $-5 < 2x - 3 \leq 7$

   h) $7(3x + 2) - 5(2x - 3) > 7$

   i) $\dfrac{5x - 1}{-6} \geq \dfrac{1 - 2x}{3}$

   j) $3 \leq 4 - x \leq 16$

   k) $\dfrac{-7y}{3} - 5 > -7$

   l) $1 \leq 1 - 2y < 9$

   m) $-2 < \dfrac{x - 1}{-3} < 7$

3. Los op vir x en stel jou antwoord voor in intervalnotasie:

   a) $2x - 1 < 3(x + 11)$

   b) $x - 1 < -4(x - 6)$

   c) $\dfrac{x - 1}{8} \leq \dfrac{2(x - 2)}{3}$

   d) $\dfrac{x + 2}{4} \leq \dfrac{-2(x - 4)}{7}$

   e) $\dfrac{1}{5}x - \dfrac{5}{4}(x + 2) > \dfrac{1}{4}x + 3$

   f) $\dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}(x + 3) \geq \dfrac{4}{2}x + 3$

   g) $4x + 3 < -3$ of $4x + 3 > 5$

   h) $4 \geq -6x - 6 \geq -3$

4. Los op vir die onbekende veranderlike en toon jou antwoord op 'n getallelyn.

a) $6b - 3 > b + 2, \ b \in \mathbb{Z}$

b) $3a - 1 < 4a + 6, \ a \in \mathbb{N}$

c) $\frac{b-3}{2} + 1 < \frac{b}{4} - 4, \ b \in \mathbb{R}$

d) $\frac{4a+7}{3} - 5 > a - \frac{2}{3}, \ a \in \mathbb{N}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2J49	1b. 2J4B	1c. 2J4C	1d. 2J4D	2a. 2J4F	2b. 2J4G
2c. 2J4H	2d. 2J4J	2e. 2J4K	2f. 2J4M	2g. 2J4N	2h. 2J4P
2i. 2J4Q	2j. 2J4R	2k. 2J4S	2l. 2J4T	2m. 2J4V	3a. 2J4W
3b. 2J4X	3c. 2J4Y	3d. 2J4Z	3e. 2J52	3f. 2J53	3g. 2J54
3h. 2J55	4a. 2J56	4b. 2J57	4c. 2J58	4d. 2J59	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.8 Hoofstuk opsomming EMD3K

Sien aanbieding: 2J5B at www.everythingmaths.co.za

- 'n Lineêre vergelyking is 'n vergelyking waar die eksponent van die veranderlike 1 is. 'n Lineêre vergelyking het op die meeste een oplossing.
- "n Kwadratiese vergelyking is 'n vergelyking waar die eksponent van die veranderlike op die meeste 2 is. 'n Kwadratiese vergelyking het op die meeste twee oplossings.
- Om vir twee onbekende veranderlikes op te los, het jy twee vergelykings nodig. Hierdie vergelykings staan bekend as 'n stelsel van gelyktydige vergelykings. Daar is twee maniere om gelyktydige lineêre vergelykings op te los: algebraïese oplossings en grafiese oplossings. Om algebraïes op te los, gebruik ons substitusie of eliminasie metodes. Om grafies op te los, trek ons die grafiek van elke vergelyking en die oplossing sal dan die koördinate van die snypunt wees.
- Vergelykings met letterkoëffisiënte is vergelykings met verskillende letters en veranderlikes.
- Woordprobleme vereis 'n stel vergelykings wat die probleem wiskundig voorstel.
- 'n Lineêre ongelykheid is soortgelyk aan 'n lineêre vergelyking en het 'n eksponent van 1 by die veranderlike.
- As ons beide kante van 'n ongelykheid deel of vermenigvuldig met enige getal met 'n minus-teken, verander die rigting van die ongelykheidsteken.

End of chapter Exercise 4 – 7:

1. Los op:

a) $5a - 7 = -2$

b) $5m + 3 = -2$

c) $1 = 4 - 3y$

d) $2(p - 1) = 3(p + 2)$

e) $3 - 6k = 2k - 1$

f) $2{,}1x + 3 = 4{,}1 - 3{,}3x$

g) $m + 6(-m + 1) + 8m = 0$

h) $2k + 3 = 2 - 3(k + 2)$

i) $3 + \frac{q}{5} = \frac{q}{2}$

j) $\frac{1}{2} = \frac{4z+1}{5z-6}$

k) $2 + \frac{a-4}{2} - \frac{a}{3} = 7$

l) $5 - \frac{2(m+4)}{m} = \frac{7}{m}$

m) $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{t}\right)$

2. Los op:

a) $b^2 + 6b - 27 = 0$

b) $-x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $-b^2 - 3b + 10 = 0$

d) $2b - 15 = (b+1)(b-6) - b^2$

e) $(5x+1)(x-3) = 0$

f) $5t - 1 = t^2 - (t+2)(t-2)$

g) $\frac{a+2}{a-3} = \frac{a+8}{a+4}$

h) $\frac{n+3}{n-2} = \frac{n-1}{n-7}$

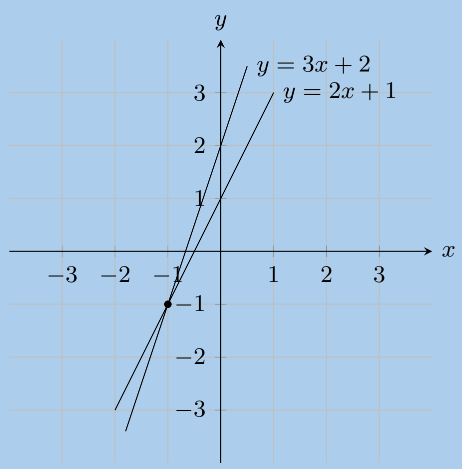
i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

j) $y^2 + y = 6$

k) $0 = 2x^2 - 5x - 18$

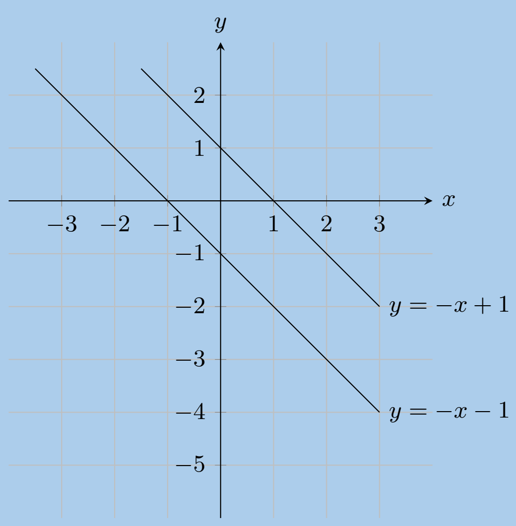
l) $(d+4)(d-3) - d = (3d-2)^2 - 8d(d-1)$

3. Kyk na die grafiek hieronder:



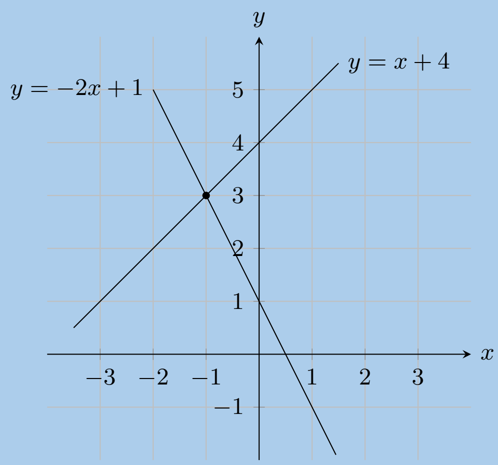
Los die vergelykings $y = 3x + 2$ en $y = 2x + 1$ gelyktydig op.

4. Kyk na die grafiek hieronder:



Los die vergelykings $y = -x + 1$ en $y = -x - 1$ gelyktydig op.

5. Kyk na die grafiek hieronder:



Los die vergelykings $y = x + 4$ en $y = -2x + 1$ gelyktydig op.

6. Los die volgende gelyktydige vergelykings op:

a) $7x + 3y = 13$ en $2x - 3y = -4$

b) $10 = 2x + y$ en $y = x - 2$

c) $7x - 41 = 3y$ en $17 = 3x - y$

d) $2x - 4y = 32$ en $7x + 2y = 32$

e) $7x + 6y = -18$ en $4x + 12y = 24$

f) $3x - 4y = -15$ en $12x + 5y = 66$

g) $x - 3y = -22$ en $5x + 2y = -25$

h) $3x + 2y = 46$ en $15x + 5y = 220$

i) $6x + 3y = -63$ en $24x + 4y = -212$

j) $5x - 6y = 11$ en $25x - 3y = 28$

k) $-9x + 3y = 4$ en $2x + 2y = 6$

l) $3x - 7y = -10$ en $10x + 2y = -6$

m) $2y = x + 8$ en $4y = 2x - 44$

n) $2a(a - 1) - 4 + a - b = 0$ en $2a^2 - a = b + 4$

o) $y = (x - 2)^2$ en $x(x + 3) - y = 3x + 4(x - 1)$

p) $\dfrac{x + 1}{y} = 7$ en $\dfrac{x}{y + 1} = 6$

q) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 0$

7. Vind die oplossings vir die volgende woordprobleme:

a) $\frac{7}{8}$ van 'n sekere getal is 5 meer as 'n $\frac{1}{3}$ van die getal. Vind die getal.

b) Drie liniale en twee penne kos altesaam R 21,00. Een liniaal en een pen het 'n totale koste van R 8,00. Hoeveel kos 'n liniaal en hoeveel kos 'n pen?

c) 'n Groep vriende koop middagete. Hier is 'n paar feite oor hulle ete:

- 'n worsbroodjie kos R 6 meer as 'n melkskommel
- die groep koop 3 worsbroodjies en 2 melkskommels
- die totale koste vir die middagete is R 143

Bepaal die individuele pryse vir die verskillende items.

d) Lefu en Monique is vriende. Monique neem Lefu se besigheidstudietoets antwoordstel en wil nie vir hom sê wat sy punt is nie. Sy weet Lefu hou nie van woordprobleme nie en sy besluit om hom te terg. Monique sê: "Ek het 12 meer punte as jy en die som van ons twee se punte is gelyk aan 166. Wat is ons punte?"

e) 'n Man hardloop na die busstop en terug in 15 minute. Sy spoed op pad na die busstop is 5 km·h^{-1} en sy spoed op pad terug is 4 km·h^{-1}. Vind die afstand na die busstop.

f) Twee trokke ry na mekaar toe vanaf fabrieke wat 175 km van mekaar is. Een trok ry teen 82 km·h^{-1} en die ander teen 93 km·h^{-1}. As beide trokke hulle reis op dieselfde tyd begin, hoe lank sal dit neem voordat hulle by mekaar verbyry?

g) Zanele en Piet rolskaats na mekaar toe op ’n reguit stuk pad. Hulle begin 20 km van mekaar af. Zanele skaats teen 15 km·h^{-1} en Piet teen 10 km·h^{-1}. Hoe ver sal Piet skaats voor hulle mekaar bereik?

h) As die prys van sjokolade verhoog met R 10, kan ons vyf minder sjokolades koop vir R 300. Wat was die prys van elke sjokolade voor die prysverhoging?

i) ’n Onderwyseres koop R 11 300 se handboeke. Die handboeke is vir Wetenskap en Wiskunde en elkeen van hulle word verkoop teen R 100 per boek en R 125 per boek respektiewelik. As die onderwyseres 97 boeke in totaal gekoop het, hoeveel Wetenskapboeke het sy gekoop?

j) Thom se Ma het R 91,50 se paaseiers gekoop. Die paaseiers kom in drie verskillende kleure naamlik blou, groen en geel. Die bloues kos R 2 elk, die groenes R 1,50 elk en die geles R 1 elk. Sy koop driemaal soveel geel paaseiers as groenes en 72 eiers in totaal. Hoeveel blou paaseiers het sy gekoop?

k) Twee ekwivalente breuke het beide ’n teller van een. Die noemer van een breuk is die som van twee en ’n getal, terwyl die ander breuk tweemaal die getal is minus 3. Wat is die getal?

8. Oorweeg die volgende vergelykings met letterkoëffisiënte:

a) Los op vir x: $a - bx = c$

b) Los op vir I: $P = VI$.

c) Maak m die onderwerp van die formule: $E = mc^2$.

d) Los op vir t: $v = u + at$.

e) Maak f die onderwerp van die formule: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$.

f) Los op vir y: $m = \frac{y - c}{x}$.

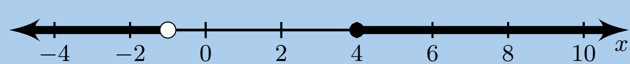
g) Los op vir x in: $ax - 4a + ab = 4b - bx - b^2 + 4c - cx - bc$

h) Los op vir r in $S = \frac{a}{1 - r}$ as $a = 0{,}4$ en $S = 3$

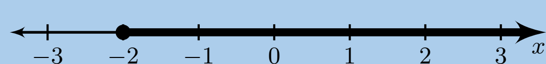
i) Los op vir b in $I = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$ as $a = 4$, $M = 8$, $I = 320$

9. Skryf die ongelykheid neer wat voorgestel word deur die volgende:

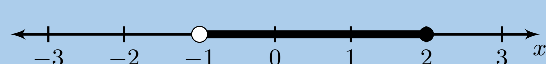
a)



b)



c)



10. Los op vir x en stel jou antwoord voor in intervalnotasie

a) $-4x + 1 > -2(x - 15)$

b) $\frac{x + 2}{4} \leq \frac{-1(x + 1)}{6}$

c) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}(x + 1) \geq \frac{2}{5}x + 2$

d) $3x - 3 > 14$ or $3x - 3 < -2$

11. Los op en stel jou antwoord voor op ’n getallelyn

a) $2x - 3 < \frac{3x - 2}{2}, \ x \in \mathbb{N}$

b) $3(1 - b) - 4 + b > 7 + b, \ b \in \mathbb{Z}$

c) $1 - 5x > 4(x + 1) - 3,\ x \in \mathbb{R}$

12. Los op vir die onbekende veranderlike:

a) $2 + 2\frac{1}{3}(x + 4) = \frac{1}{5}(3 - x) + \frac{1}{6}$

b) $36 - (x - 4)^2 = 0$

c) $64 - (a + 3)^2 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{x} = 0$

e) $a - 3 = 2\left(\frac{6}{a} + 1\right)$

f) $a - \frac{6}{a} = -1$

g) $(a + 6)^2 - 5(a + 6) - 24 = 0$

h) $a^4 - 4a^2 + 3 = 0$

i) $9y^4 - 13y^2 + 4 = 0$

j) $\frac{(b + 1)^2 - 16}{b + 5} = 1$

k) $\frac{a^2 + 8a + 7}{a + 7} = 2$

l) $5x + 2 \leq 4(2x - 1)$

m) $\frac{4x - 2}{6} > 2x + 1$

n) $\frac{x}{3} - 14 > 14 - \frac{x}{7}$

o) $\frac{1 - a}{2} - \frac{2 - a}{3} \geq 1$

p) $-5 \leq 2k + 1 < 5$

q) $x - 1 = \frac{42}{x}$

r) $(x + 1)^2 = (x + 1)(2x + 3)$

s) $3ax + 2a - ax = 5ax - 6a$

t) $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} = \frac{a}{b} + 1$

u) $3x^2 - xy - 2y^2 = 0$

v) $x(2x + 1) = 1$

w) $\frac{2x - 5}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{1}{2(x - 4)}$

x) $x^2 + 1 = 0$

y) $\frac{x + 4}{3} - 2 > \frac{x - 3}{2} - \frac{x + 1}{4}$

13. Na hy 'n vergelyking opgelos het, gee Luke sy antwoord as 4,5, afgerond tot een desimale plek. Toon die interval waarin hierdie oplossing lê op 'n getallelyn.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2J5C	1b. 2J5D	1c. 2J5F	1d. 2J5G	1e. 2J5H	1f. 2J5J
1g. 2J5K	1h. 2J5M	1i. 2J5N	1j. 2J5P	1k. 2J5Q	1l. 2J5R
1m. 2J5S	2a. 2J5T	2b. 2J5V	2c. 2J5W	2d. 2J5X	2e. 2J5Y
2f. 2J5Z	2g. 2J62	2h. 2J63	2i. 2J64	2j. 2J65	2k. 2J66
2l. 2J67	3. 2J68	4. 2J69	5. 2J6B	6a. 2J6C	6b. 2J6D
6c. 2J6F	6d. 2J6G	6e. 2J6H	6f. 2J6J	6g. 2J6K	6h. 2J6M
6i. 2J6N	6j. 2J6P	6k. 2J6Q	6l. 2J6R	6m. 2J6S	6n. 2J6T
6o. 2J6V	6p. 2J6W	6q. 2J6X	7a. 2J6Y	7b. 2J6Z	7c. 2J72
7d. 2J73	7e. 2J74	7f. 2J75	7g. 2J76	7h. 2J77	7i. 2J78
7j. 2J79	7k. 2J7B	8a. 2J7C	8b. 2J7D	8c. 2J7F	8d. 2J7G
8e. 2J7H	8f. 2J7J	8g. 2J7K	8h. 2J7M	8i. 2J7N	9a. 2J7P
9b. 2J7Q	9c. 2J7R	10a. 2J7S	10b. 2J7T	10c. 2J7V	10d. 2J7W
11a. 2J7X	11b. 2J7Y	11c. 2J7Z	12a. 2J82	12b. 2J83	12c. 2J84
12d. 2J85	12e. 2J86	12f. 2J87	12g. 2J88	12h. 2J89	12i. 2J8B
12j. 2J8C	12k. 2J8D	12l. 2J8F	12m. 2J8G	12n. 2J8H	12o. 2J8J
12p. 2J8K	12q. 2J8M	12r. 2J8N	12s. 2J8P	12t. 2J8Q	12u. 2J8R
12v. 2J8S	12w. 2J8T	12x. 2J8V	12y. 2J8W	13. 2J8X	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 5

Trigonometrie

5.1 Inleiding EMD3M

Trigonometrie of driehoeksmeting hanteer die verhouding tussen die hoeke en die sye van 'n driehoek. Ons sal leer oor trigonometriese verhoudings in reghoekige driehoeke. Dit vorm die basis van trigonometrie.

Daar is baie toepassings van trigonometrie. Die tegniek van triangulering, driehoeksvorming en -meting, is van besondere waarde aangesien dit in astronomie gebruik word om afstande na nabygeleë sterre te meet, in geografie om die afstande tussen landmerke te meet, en in satelliet navigasie sisteme. GPS (globale posisionering sisteem) sou nie moontlik gewees het sonder trigonometrie nie. Ander velde wat gebruik maak van trigonometrie sluit in akoestiek, optika, analise van finansiële markte, elektronika, waarskynlikheidsteorie, statistiek, biologie, mediese afbeeldings (CAT skaderings en ultrasoniese skaderings), chemie, kriptologie, meteorologie, landmeting, argitektuur, fonetika, ingenieurswese, rekenaargrafika en ontwikkeling van speletjies.

Figuur 5.1: 'n Kunstenaarsvoorstellings van 'n GPS satelliet wat om die aarde wentel. Daar is ten minste 24 GPS satelliete operasioneel op enige spesifieke oomblik. GPS gebruik 'n toepassing van trigonometrie, wat bekend staan as triangulering, om iemand se posisie te bepaal. Die akkuraatheid van GPS is binne 15 meters.

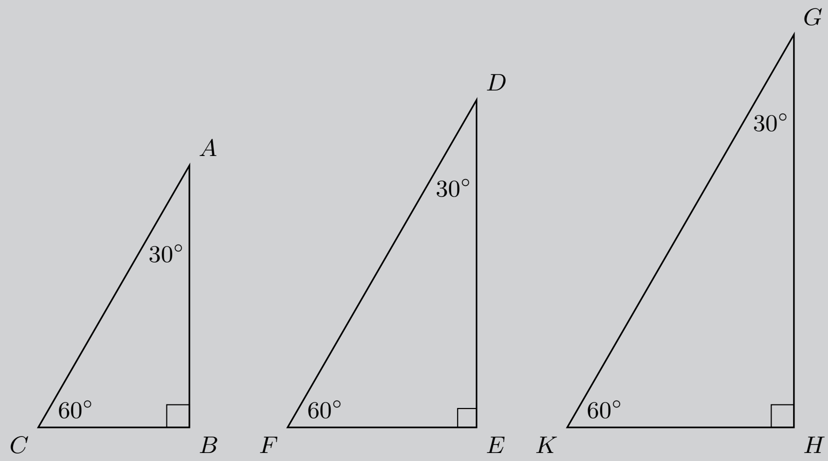
BESOEK:
Die volgende video dek 'n bondige geskiedenis van trigonometrie en sommige van die gebruike van trigonometrie.
Sien video: 2J8Y at www.everythingmaths.co.za

5.2 Gelykvormigheid van driehoeke EMD3N

Voltooi die volgende ondersoek om 'n beter begrip van die basis van trigonometrie te ontwikkel, voordat ons in die teorie van trigonometrie ingaan.

Ondersoek: Verhoudings of ratios van gelykvormige driehoeke

Trek drie gelykvormige driehoeke van verskillende groottes met die gebruik van 'n gradeboog en 'n liniaal, met elke driehoek wat binnehoeke het van 30°, 90° en 60° soos hieronder getoon. Meet die hoeke en lengtes akkuraat ten einde die tabel te voltooi (los jou antwoorde as vereenvoudigde breuke):

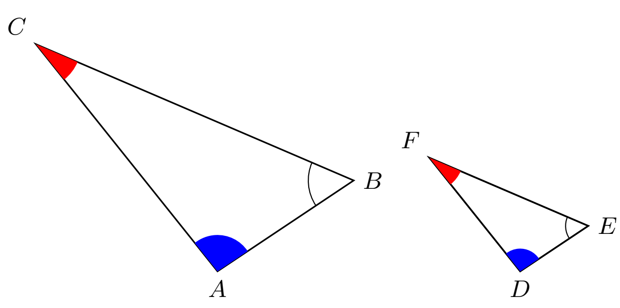


Deel die lengtes van sye (verhoudings)		
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{CB}{AC} =$
$\frac{DE}{EF} =$	$\frac{DE}{DF} =$	$\frac{FE}{DF} =$
$\frac{GH}{HK} =$	$\frac{GH}{GK} =$	$\frac{KH}{GK} =$

Watter waarnemings kan jy maak oor die verhoudings van die sye?

Het jy opgelet dat dit nie saak maak wat die lengtes van die sye van die driehoeke is nie, as die hoek dieselfde bly, sal die verhouding van die sye altyd dieselfde antwoord gee?

In die driehoeke hieronder, is $\triangle ABC$ gelykvormig aan $\triangle DEF$. Dit word geskryf as: $\triangle ABC ||| \triangle DEF$



In gelykvormige driehoeke is dit moontlik om verhouding tussen ooreenstemmende sye af te lei:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

'n Ander belangrike feit oor gelykvormige driehoeke ABC en DEF is dat die hoek by die hoekpunt A gelyk is aan die hoek by die hoekpunt D, die hoek by hoekpunt B is gelyk aan die hoek by hoekpunt E, en die hoek by hoekpunt C is gelyk aan die hoek by hoekpunt F.

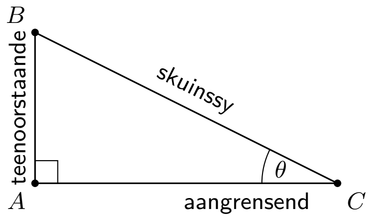
$$\hat{A} = \hat{D}$$
$$\hat{B} = \hat{E}$$
$$\hat{C} = \hat{F}$$

NOTA:
Die volgorde van letters vir gelykvormige driehoeke is baie belangrik. Benoem altyd gelykvormige driehoeke in ooreenstemmende volgorde. Byvoorbeeld,

$\triangle ABC ||| \triangle DEF$ is reg; maar
$\triangle ABC ||| \triangle DFE$ is nie reg nie.

5.3 Definiëring van die trigonometriese verhoudings EMD3P

Die verhoudings van gelykvormige driehoeke word gebruik om die trigonometriese verhoudings te definieer. Beskou 'n reghoekige driehoek ABC met 'n hoek gemerk θ (uitgespreek 'teta')



In 'n reghoekige driehoek verwys ons na die lengtes van die drie sye volgens hulle plasing met betrekking tot die hoek θ. Die sy oorkant die regte hoek, word die skuinssy genoem, die sy oorkant θ word "teenoorstaande" genoem, en die sy langs die θ word "aangrensend" genoem.

Jy kan enige van die nie-90° binnehoeke kies en dan die aangrensende en teenoorstaande sye daarvolgens definieer. Maar, die skuinssy bly dieselfde ongeag na watter binne hoek jy verwys omdat dit *altyd* oorkant die regte hoek is en *altyd* die langste sy is.

Ons definieer die trigonometriese verhoudings: sinus $(\sin)$, cosinus $(\cos)$ en tangens $(\tan)$ van 'n hoek, as volg:

$$\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

Hierdie verhoudings, wat ook bekend staan as trigonometriese definisies, gee die verband tussen die lengtes van die sye van 'n reghoekige driehoek tot sy binnehoeke. Hierdie drie verhoudings of ratios vorm die basis van die trigonometrie.

BELANGRIK!

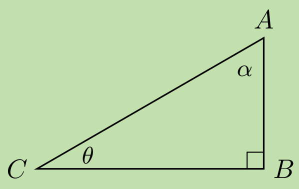
Die definisies van teenoorstaande, aangrensende en skuinssy is slegs van toepassing op reghoekige driehoeke! Maak altyd seker jou driehoek het 'n regte hoek voor jy hulle gebruik, anders gaan jy die verkeerde antwoord kry.

BESOEK:
Die volgende video gee 'n inleiding tot die drie trigonometriese verhoudings.
Sien video: 2J8Z at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Trigonometriese verhoudings

VRAAG

Gegee die volgende driehoek:



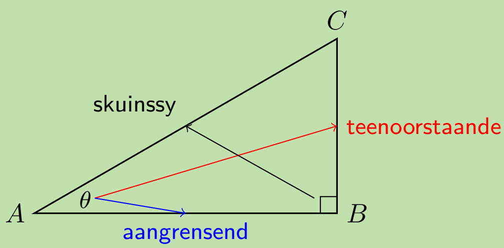
- Benoem die skuinssy, die teenoorstaande en die aangrensende sye van die driehoek met betrekking tot θ.
- Noem watter sye van die driehoek jy sal gebruik om $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ te vind.
- Benoem die skuinssy, die teenoorstaande en die aangrensende sye van die driehoek met betrekking tot α.
- Noem watter sye van die driehoek jy sal gebruik om $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ te vind.

OPLOSSING

Stap 1: Benoem die driehoek

Kry eers die regte hoek. Die skuinssy is **altyd** tenoor die regte hoek. Die skuinssy verander nooit van posisie nie, dit is altyd direk oorkant die regte hoek en daarom vind ons dit eerste.

Die teenoorstaande en aangrensende sye hang af van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot hoek θ is direk oorkant die hoek θ (presies soos die woord aandui). Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek θ vorm.



Stap 2: Voltooi die trigonometriese verhoudings

Nou kan ons die trigonometriese verhoudings vir θ voltooi:

$$\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC} \quad \cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{AB}{AC} \quad \tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{CB}{AB}$$

Dus, om $\sin\theta$ te vind, sal ons sye CB (sy teenoor θ) en AC (skuinssy) gebruik. Om $\cos\theta$ te vind, sal ons sye AB (sy aangrensend aan θ) en AC (skuinssy) gebruik. Om $\tan\theta$ te vind gebruik ons sye CB (sy teenoor θ) en AB (sy aangrensend aan θ).

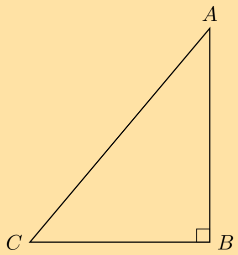
En dan kan ons die trigonometriese verhoudings vir α voltooi. Vir hoek α, sal die teenoorstaande en aangrensende sye plekke ruil (teken die driehoek hierbo oor om jou te help om dit te sien). Let op dat die skuinssy steeds AC is.

$$\sin\alpha = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{AB}{AC} \quad \cos\alpha = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC} \quad \tan\alpha = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{AB}{CB}$$

Dus, om $\sin\alpha$ te vind, sal ons sye AB (sy teenoor α) en AC (skuinssy) gebruik. Om $\cos\alpha$ te vind, sal ons sye CB (sy aangrensend aan α) en AC (skuinssy) gebruik. Om $\tan\alpha$ te vind gebruik ons sye AB (sy teenoor α) en CB (sy aangrensend aan α).

Oefening 5 – 1:

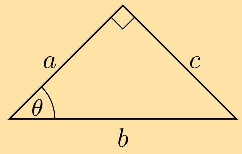
1. Voltooi elk van die volgende:



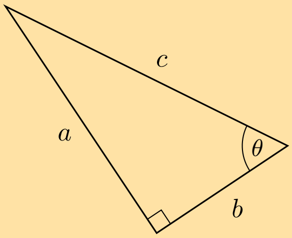
a) $\sin\hat{A} =$ b) $\cos\hat{A} =$ c) $\tan\hat{A} =$
d) $\sin\hat{C} =$ e) $\cos\hat{C} =$ f) $\tan\hat{C} =$

2. In elk van die volgende driehoeke, meld of a, b en c die skuinssy, teenoorstaande of aangrensende sy is van die driehoek met betrekking tot θ.

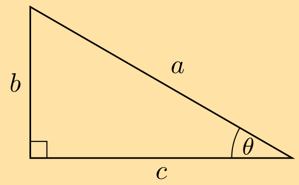
a)



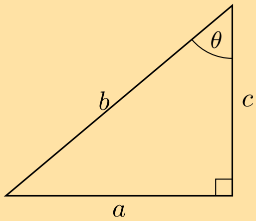
b)



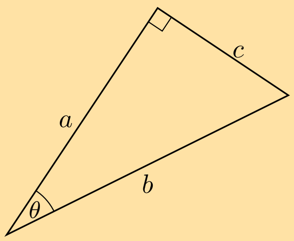
c)



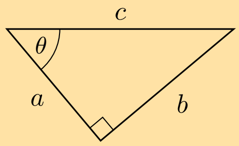
d)



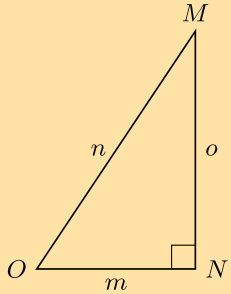
e)



f)



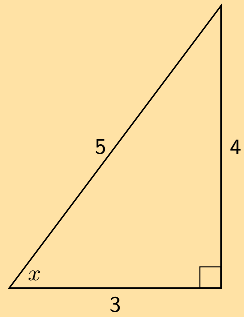
3. Beskou die volgende diagram:



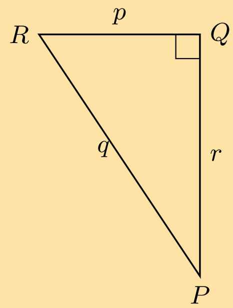
Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, antwoord elk van die volgende vrae.

a) Skryf $\cos \hat{O}$ neer in terme van m, n en o.
b) Skryf $\tan \hat{M}$ neer in terme van m, n en o.
c) Skryf $\sin \hat{O}$ neer in terme van m, n en o.
d) Skryf $\cos \hat{M}$ neer in terme van m, n en o.

4. Vind x in die diagram op drie verskillende maniere. Jy hoef nie die waarde van x te bereken nie, skryf net die toepaslike verhouding neer vir x.

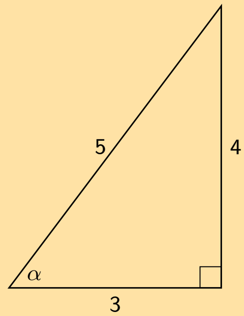


5. Watter van die bewerings is waar omtrent $\triangle PQR$?



a) $\sin \hat{R} = \frac{p}{q}$ b) $\tan \hat{Q} = \frac{r}{p}$ c) $\cos \hat{P} = \frac{r}{q}$ d) $\sin \hat{P} = \frac{p}{r}$

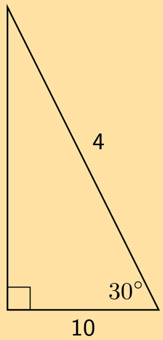
6. Sarah wil die waarde vind van α in die driehoek hieronder. Watter stelling verteenwoordig 'n korrekte werkwyse?



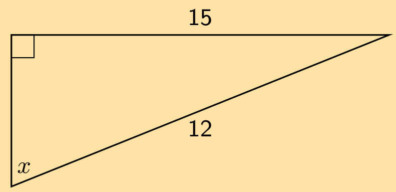
a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ b) $\cos \left(\frac{3}{5}\right) = \alpha$ c) $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ d) $\cos 0{,}8 = \alpha$

7. Verduidelik wat verkeerd is met elk van die volgende diagramme.

a)



b)



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J92	2a. 2J93	2b. 2J94	2c. 2J95	2d. 2J96	2e. 2J97
2f. 2J98	3a. 2J99	3b. 2J9B	3c. 2J9C	3d. 2J9D	4. 2J9F
5. 2J9G	6. 2J9H	7a. 2J9J	7b. 2J9K		

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.4 Resiprook verhoudings EMD3Q

Elk van die drie trigonometriese verhoudings het 'n resiprook (of omgekeerde). Die resiproke: cosecans (cosec), secans ($\sec$) en cotangens ($\cot$), word as volg gedefinieer:

$$\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Ons kan ook hierdie resiproke definieer vir enige reghoekige driehoek:

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{skuinssy}}{\text{teenoorstaande}}$$
$$\sec \theta = \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensend}}$$
$$\cot \theta = \frac{\text{aangrensend}}{\text{teenoorstaande}}$$

Let op dat:

$$\sin \theta \times \text{cosec } \theta = 1$$
$$\cos \theta \times \sec \theta = 1$$
$$\tan \theta \times \cot \theta = 1$$

BESOEK:
Hierdie video dek die drie resiprook verhoudings vir $\sin$, $\cos$ en $\tan$.
Sien video: 2J9M at www.everythingmaths.co.za

NOTA:
Jy mag sien dat cosecans afgekort word tot $\csc$.

5.5 Sakrekenaar vaardighede EMD3R

In hierdie afdeling sal ons kyk na die gebruik van 'n sakrekenaar om die waardes van die trigonometriese verhoudings vir enige hoek te bepaal. Byvoorbeeld, ons wil dalk weet wat is die waarde van $\sin 55°$ of wat is die waarde van $\sec 34°$.

Wanneer jy berekeninge doen met die resiprook verhoudings, moet jy die resiprook verhouding omskakel na een van die standaard trigonometriese verhoudings: $\sin$, $\cos$ en $\tan$ aangesien dit die enigste manier is om hierdie verhoudings met 'n sakrekenaar te bereken.

BELANGRIK!

Die meeste wetenskaplike sakrekenaars is redelik soortgelyk maar die stappe mag tog verskil, afhangende van die sakrekenaar wat jy gebruik. Maak seker dat jou sakrekenaar gestel is op 'degrees' modus.

NOTA:
Let daarop dat $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$. Dit geld ook vir die ander trigonometriese verhoudings.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Gebruik jou sakrekenaar

VRAAG

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te bereken (korrek tot 2 desimale plekke):

1. $\cos 48°$
2. $2\sin 35°$
3. $\tan^2 81°$
4. $3\sin^2 72°$
5. $\frac{1}{4}\cos 27°$
6. $\frac{5}{6}\tan 34°$
7. $\sec 34°$
8. $\cot 49°$

OPLOSSING

Stap 1:
Die volgende wys die sleuteldrukke op 'n Casio sakrekenaar. Ander sakrekenaars werk op 'n soortgelyke wyse. Op 'n Casio sakrekenaar word (outomaties bygevoeg nadat jy $\sin$, $\cos$ en $\tan$ gedruk het, dus hoef jy slegs) te druk om die hakies toe te maak nadat jy die hoek ingetik het.

1. Druk [cos] [48] [)] [=] 0,66913... ≈ 0,67
2. Druk [2] [sin] [35] [)] [=] 1,147152... ≈ 1,15
3. Druk [(] [tan] [81] [)] [)] [x^2] [=] 39,86345... ≈ 39,86
   OF
   Druk [tan] [81] [)] [=] [ANS] [x^2] [ANS] [=] 39,86345... ≈ 39,86
4. Druk [3] [(] [sin] [72] [)] [)] [x^2] [=] 2,71352... ≈ 2,71
   OF
   Druk [sin] [72] [)] [=] [ANS] [x^2] [=] [ANS] [×] [3]

5. Druk $\boxed{(}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{27}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 0,22275... $\approx$ 0,22
   OF
   Druk $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{27}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ 0,22275... $\approx$ 0,22
6. Druk $\boxed{(}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{6}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{34}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 0,56209... $\approx$ 0,56
   OF
   Druk $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{34}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ 0,56 $\approx$ 0,56
7. Skryf eers $\sec$ in terme van $\cos$: $\sec 34° = \dfrac{1}{\cos 34°}$ (aangesien daar geen "$\sec$" knoppie op jou sakrekenaar is nie).
   Druk $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{34}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 1,206217... $\approx$ 1,21
8. Skryf eers $\cot$ in terme van $\tan$: $\cot 49° = \dfrac{1}{\tan 49°}$ (aangesien daar geen "$\cot$" knoppie op jou sakrekenaar is nie).
   Druk $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{49}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 0,869286... $\approx$ 0,87

Uitgewerkte voorbeeld 3: Sakrekenaarwerk met die gebruik van substitusie of vervanging

VRAAG

As $x = 25°$ en $y = 65°$, gebruik jou sakrekenaar om te bepaal of die volgende bewering waar of vals is:

$$\sin^2 x + \cos^2 (90° - y) = 1$$

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die linkerkant van die vergelyking

Druk $\boxed{(}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{25}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{90}$ $\boxed{-}$ $\boxed{65}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ 1

Stap 2: Skryf die finale antwoord

LK = RK, dus is die bewering waar.

Oefening 5 – 2:

1. Gebruik jou sakrekenaar om die waarde van die volgende te bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

   a) $\tan 65°$ b) $\sin 38°$ c) $\cos 74°$ d) $\sin 12°$
   e) $\cos 26°$ f) $\tan 49°$ g) $\sin 305°$ h) $\tan 124°$
   i) $\sec 65°$ j) $\sec 10°$ k) $\sec 48°$ l) $\cot 32°$
   m) $\text{cosec } 140°$ n) $\text{cosec } 237°$ o) $\sec 231°$ p) $\text{cosec } 226°$
   q) $\frac{1}{4}\cos 20°$ r) $3\tan 40°$ s) $\frac{2}{3}\sin 90°$ t) $\dfrac{5}{\cos 4{,}3°}$

u) $\sqrt{\sin 55^\circ}$ v) $\dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$ w) $\tan 35^\circ + \cot 35^\circ$ x) $\dfrac{2 + \cos 310^\circ}{2 + \sin 87^\circ}$

y) $\sqrt{4 \sec 99^\circ}$ z) $\sqrt{\dfrac{\cot 103^\circ + \sin 1090^\circ}{\sec 10^\circ + 5}}$

2. As $x = 39^\circ$ en $y = 21^\circ$, gebruik 'n sakrekenaar om te bepaal op die volgende bewerings waar of vals is:
   a) $\cos x + 2\cos x = 3\cos x$
   b) $\cos 2y = \cos y + \cos y$
   c) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
   d) $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$
3. Los op vir x in $5^{\tan x} = 125$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

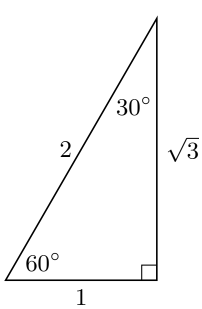
1a. 2J9N 1b. 2J9P 1c. 2J9Q 1d. 2J9R 1e. 2J9S 1f. 2J9T
1g. 2J9V 1h. 2J9W 1i. 2J9X 1j. 2J9Y 1k. 2J9Z 1l. 2JB2
1m. 2JB3 1n. 2JB4 1o. 2JB5 1p. 2JB6 1q. 2JB7 1r. 2JB8
1s. 2JB9 1t. 2JBB 1u. 2JBC 1v. 2JBD 1w. 2JBF 1x. 2JBG
1y. 2JBH 1z. 2JBJ 2. 2JBK 3. 2JBM

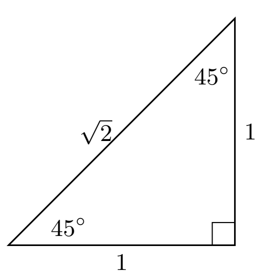
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.6 Spesiale hoeke EMD3S

Vir meeste hoeke het ons 'n sakrekenaar nodig om die waardes te bereken van sin, cos en tan. Daar is egter sommige hoeke waarvoor ons maklik die waardes sonder 'n sakrekenaar kan bepaal omdat hulle uit eenvoudige verhoudings bestaan. Die waardes van trigonometriese verhoudings vir hierdie spesiale hoeke, sowel as die driehoeke waarvan hulle afgelei is, word hieronder getoon.

NOTA:
Onthou dat die lengtes van die sye van 'n reghoekige driehoek altyd aan die Stelling van Pythagoras moet voldoen: die vierkant van die skuinssy is gelyk aan die som van die vierkante van die ander twee sye.





θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Hierdie waardes is nuttig wanneer ons sonder 'n sakrekenaar 'n probleem moet oplos wat trigonometriese verhoudings behels.

Oefening 5 – 3:

1. Kies uit die gegewe lys die antwoord wat die naaste aan reg is vir elke uitdrukking:
   a) $\cos 45°$

   $$\frac{1}{2} \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   b) $\sin 45°$

   $$\sqrt{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad 1$$

   c) $\tan 30°$

   $$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   d) $\tan 60°$

   $$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{1}$$

   e) $\cos 45°$

   $$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2}$$

   f) $\tan 30°$

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

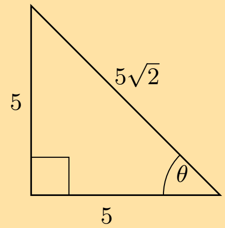
   g) $\tan 30°$

   $$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1}$$

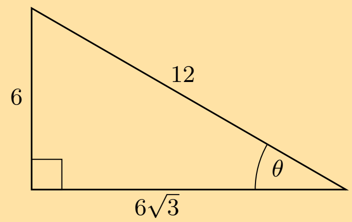
   h) $\cos 60°$

   $$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Bepaal die waarde van $\cos\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



3. Los op vir $\tan\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



4. Bereken die waarde van die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\sin 45° \times \cos 45°$ b) $\cos 60° + \tan 45°$ c) $\sin 60° - \cos 60°$

5. Evalueer die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Kies die antwoord wat die naaste aan reg is uit die gegewe lys.

   a) $\tan 45° \div \sin 60°$

   $$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2}$$

   b) $\tan 30° - \sin 60°$

   $$0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   c) $\sin 30° - \tan 45° - \sin 30°$

   $$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{1} \quad -\frac{7}{2\sqrt{3}}$$

   d) $\tan 30° \div \tan 30° \div \sin 45°$

   $$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{2}}{1} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

   e) $\sin 45° \div \sin 30° \div \cos 45°$

   $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{4}{\sqrt{3}} \quad 2 \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

   f) $\tan 60° - \tan 60° - \sin 60°$

   $$-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{1} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

   g) $\cos 45° - \sin 60° - \sin 45°$

   $$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{7}{2\sqrt{3}} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

6. Gebruik spesiale hoeke om te wys dat:

   a) $\dfrac{\sin 60°}{\cos 60°} = \tan 60°$

   b) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$

   c) $\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°}$

7. Gebruik die definisies van die trigonometriese verhoudings om die volgende vrae te beantwoord:

   a) Verduidelik hoekom $\sin \alpha \leq 1$ vir alle waardes van α.

   b) Verduidelik waarom $\cos \alpha$ 'n maksimumwaarde het van 1.

   c) Is daar 'n maksimumwaarde vir $\tan \alpha$?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JBN	1b. 2JBP	1c. 2JBQ	1d. 2JBR	1e. 2JBS	1f. 2JBT
1g. 2JBV	1h. 2JBW	2. 2JBX	3. 2JBY	4a. 2JBZ	4b. 2JC2
4c. 2JC3	5a. 2JC4	5b. 2JC5	5c. 2JC6	5d. 2JC7	5e. 2JC8
5f. 2JC9	5g. 2JCB	6a. 2JCC	6b. 2JCD	6c. 2JCF	7a. 2JCG
7b. 2JCH	7c. 2JCJ				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.7 Oplos van trigonometriese vergelykings EMD3T

In hierdie afdeling kyk ons eerste daarna om die onbekende lengtes in reghoekige driehoeke te vind en daarna sal ons kyk daarna om onbekende hoeke te vind in reghoekige driehoeke. Uiteindelik sal ons kyk na maniere om meer algemene trigonometriese vergelykings op te los.

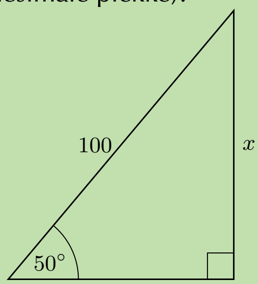
Vind lengtes EMD3V

Van die definisies van die trigonometriese verhoudings en van wat ons geleer het omtrent die bepaling van die waardes van hierdie verhoudings vir enige hoek, kan ons nou die onbekende lengtes in reghoekige driehoeke vind. Die volgende uitgewerkte voorbeelde sal jou wys hoe.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vind lengtes

VRAAG

Vind die lengte van x in die volgende reghoekige driehoek deur die toepaslike trigonometriese verhouding te gebruik (rond jou antwoord af tot twee desimale plekke).



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy met betrekking tot die gegewe hoek

Onthou die skuinssy is **altyd** teenoor die regte hoek en dit verander nooit van posisie nie. Die teenoorstaande sy is teenoor die hoek waarin ons geïnteresseerd is en die aangrensende sy is die oorblywende sy.

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 50° &= \frac{x}{100}\end{aligned}$$

Stap 2: Herrangskik die vergelyking en los op vir x

$$\begin{aligned}\sin 50° \times 100 &= \frac{x}{100} \times 100\\ \sin 50° \times 100 &= x\\ x &= 100\sin 50°\end{aligned}$$

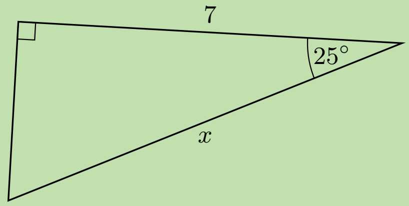
Stap 3: Gebruik jou sakrekenaar en vind die antwoord

$$\begin{aligned}x &= 76{,}60444...\\ x &\approx 76{,}60\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Vind lengtes

VRAAG

Vind die lengte van x in die volgende reghoekige driehoek deur die toepaslike trigonometriese verhouding te gebruik (rond jou antwoord af tot twee desimale plekke).



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy met betrekking tot die gegewe hoek

Onthou die skuinssy is **altyd** teenoor die regte hoek en dit verander nooit van posisie nie. Die teenoorstaande sy is teenoor die hoek waarin ons geïnteresseerd is en die aangrensende sy is die oorblywende sy.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}\\ \cos 25° &= \frac{7}{x}\end{aligned}$$

Stap 2: Herrangskik die vergelyking en los op vir x

$$\begin{aligned}\cos 25° \times x &= \frac{7}{x} \times x && \text{vermenigvuldig beide kante met } x\\ x\cos 25° &= 7\\ \frac{x\cos 25°}{\cos 25°} &= \frac{7}{\cos 25°} && \text{deel beide kante deur } \cos 25°\\ x &= \frac{7}{\cos 25°}\end{aligned}$$

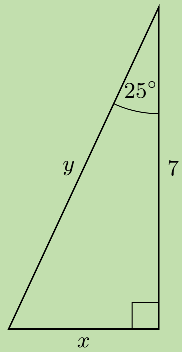
Stap 3: Gebruik jou sakrekenaar en vind die antwoord

$$\begin{aligned}x &= \frac{7}{0{,}90630...}\\ &= 7{,}723645...\\ &\approx 7{,}72\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vind lengtes

VRAAG

Vind die lengte van x en y in die volgende reghoekige driehoek, met die gebruik van die toepaslike trigonometriese verhouding (rond jou antwoord af tot twee desimale plekke).



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy met betrekking tot die gegewe hoek

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} \\ \tan 25° &= \frac{x}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \\ \cos 25° &= \frac{7}{y} \end{aligned}$$

Stap 2: Herrangskik die vergelykings om op te los vir x en y

$$x = 7 \times \tan 25°$$

$$y = \frac{7}{\cos 25°}$$

Stap 3: Gebruik jou sakrekenaar om die antwoorde te vind

$$\begin{aligned} x &= 3{,}26415... \\ x &\approx 3{,}26 \end{aligned}$$

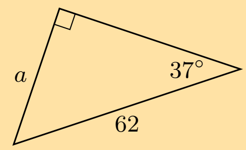
$$\begin{aligned} y &= 7{,}72364... \\ y &\approx 7{,}72 \end{aligned}$$

BESOEK:
Die volgende video wys 'n voorbeeld van die vind van die onbekende lengtes in 'n driehoek met die gebruik van trigonometriese verhoudings.
Sien video: 2JCK at www.everythingmaths.co.za

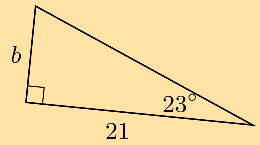
Oefening 5 – 4:

1. Vind die lengte van 'n sy met 'n letter gemerk in elke driehoek. Gee jou antwoorde korrek tot 2 desimale plekke.

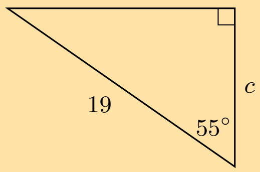
   a)



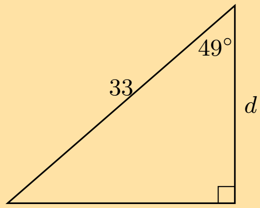
   b)



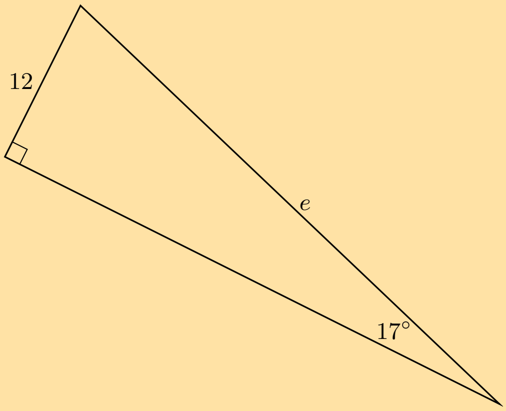
   c)



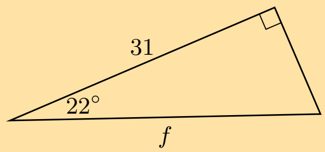
   d)



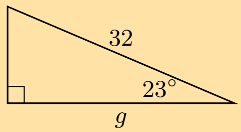
   e)



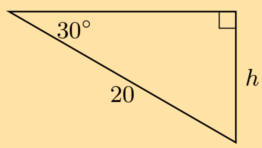
f)



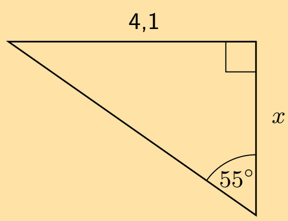
g)



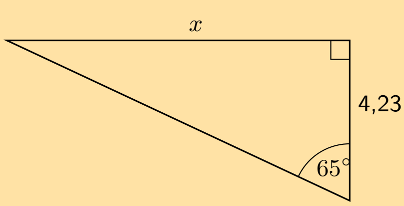
h)



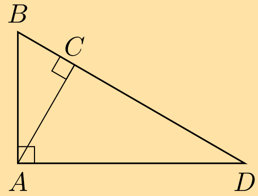
i)



j)



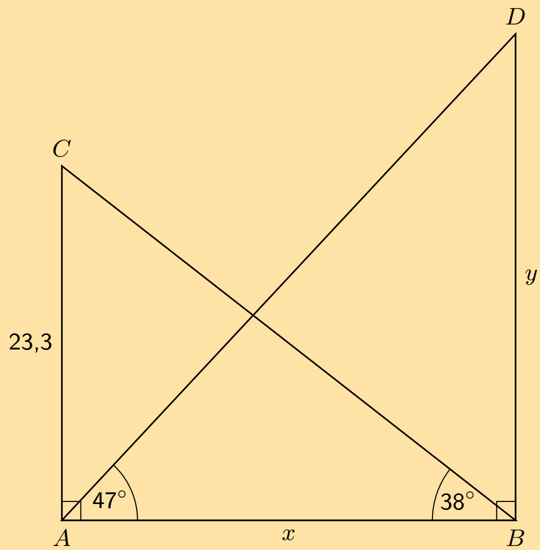
2. Skryf twee verhoudings neer vir elk van die volgende in terme van die sye: AB; BC; BD; AD; DC en AC.



a) $\sin \hat{B}$ b) $\cos \hat{D}$ c) $\tan \hat{B}$

3. In $\triangle MNP$, $\hat{N} = 90°$, $MP = 20$ en $\hat{P} = 40°$. Bereken NP en MN (korrek tot 2 desimale plekke).

4. Bereken x en y in die volgende diagram.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JCM 1b. 2JCN 1c. 2JCP 1d. 2JCQ 1e. 2JCR 1f. 2JCS
1g. 2JCT 1h. 2JCV 1i. 2JCW 1j. 2JCX 2. 2JCY 3. 2JCZ
4. 2JD2

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

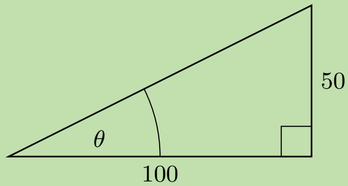
Vind 'n hoek EMD3W

As die lengte van twee sye van 'n driehoek bekend is, kan die hoeke bereken word met die gebruik van trigonometriese verhoudings. In hierdie afdeling vind ons hoeke binne in reghoekige driehoeke met die gebruik van die verhoudings van die sye.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vind hoeke

VRAAG

Vind die hoeke van θ in die volgende reghoekige driehoeke deur die gebruik van die toepaslike trigonometriese verhouding.



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye met betrekking tot die gegewe hoek en die skuinssy

In hierdie geval het jy die teenoorstaande sy en die aangrensende sy vir hoek θ.

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$
$$\tan\theta = \frac{50}{100}$$

Stap 2: Gebruik jou sakrekenaar om vir θ op te los

Om vir θ op te los, sal jy die inverse tangensfunksie op jou sakrekenaar nodig hê. Dit werk terugwaarts deur die verhouding van die sye te gebruik om die hoek te vind wat daardie verhouding tot gevolg gehad het.

Druk SHIFT tan 50 ÷ 100) = 26,56505... $\approx$ 26,6

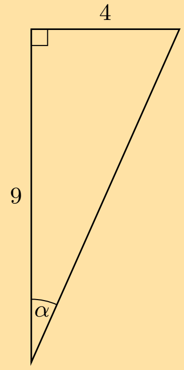
Stap 3: Skryf die finale antwoord

$\theta \approx 26{,}6°$

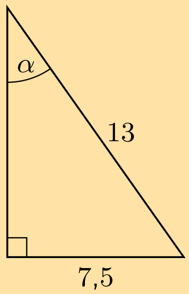
Oefening 5 – 5:

Bepaal α in die volgende reghoekige driehoeke:

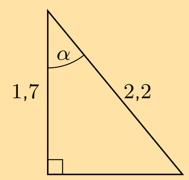
1.



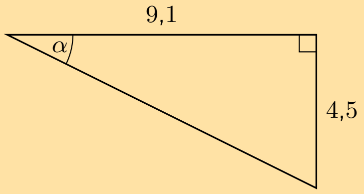
2.



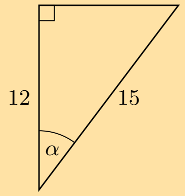
3.



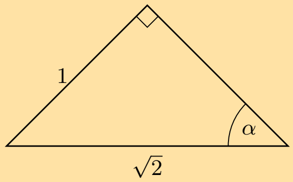
4.



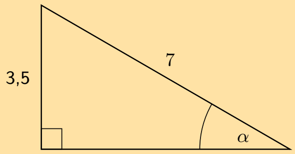
5.



6.



7.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JD3 2. 2JD4 3. 2JD5 4. 2JD6 5. 2JD7 6. 2JD8 7. 2JD9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Ons het nou gesien hoe om trigonometriese vergelyking in reghoekige driehoeke op te los. Ons kan dieselfde tegnieke gebruik om ons te help om trigonometriese vergelykings op te los wanneer die driehoeke nie getoon word nie.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind die waarde van θ as $\cos\theta = 0{,}2$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik jou sakrekenaar om vir θ op te los

Om vir θ op te los, sal jy die inverse cosinusfunksie op jou sakrekenaar gebruik. Dit werk terugwaarts, deur die verhouding van die sye te gebruik om die hoek te vind wat aanleiding gegee het tot daardie verhouding.

Druk [SHIFT] [cos] [0] [.] [2] [)] [=] 78,46304 ≈ 78,46

Stap 2: Skryf die finale antwoord

$\theta \approx 78{,}46°$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind die waarde van θ as $3\sin\theta = 2{,}4$.

OPLOSSING

Stap 1: Herrangskik die vergelyking

Ons moet die vergelyking herrangskik sodat $\sin\theta$ aan een kant van die vergelyking is.

$$\begin{aligned} 3\sin\theta &= 2{,}4 \\ \sin\theta &= \frac{2{,}4}{3} \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik jou sakrekenaar om vir θ op te los

Om vir θ op te los, moet jy die inverse sinusfunksie op jou sakrekenaar gebruik. Dit werk terugwaarts deur die verhouding van die sye te gebruik om die hoek te vind wat aanleiding gegee het tot daardie verhouding.

Druk [SHIFT] [sin] [(] [2] [.] [4] [÷] [3] [)] [=] 53,1301... ≈ 53,13.

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$\theta \approx 53{,}13°$

NOTA:
Wanneer jy trigonometriese vergelykings gebruik, mag jy dalk 'n 'error" of foutboodskap kry wanneer jy probeer om $\sin$ of $\cos$ te bereken (onthou dat beide die sinus- en cosinusfunksies 'n maksimumwaarde van 1 het). In hierdie gevalle is daar geen oplossings vir die vergelyking nie.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Los op vir α: $3\sec\alpha = 1{,}4$.

OPLOSSING

Stap 1: Skakel $\sec$ om na $\cos$

Daar is geen "$\sec$" knoppie op die sakrekenaar nie en dus moet ons $\sec$ omskakel na $\cos$ ten einde α te kry.

$$\begin{aligned} 3\sec\alpha &= 1{,}4 \\ \frac{3}{\cos\alpha} &= 1{,}4 \end{aligned}$$

Stap 2: Herrangskik die vergelyking

Ons moet die vergelyking herrangskik sodat ons $\cos\alpha$ aan een kant van die vergelyking het.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\cos\alpha} &= 1{,}4 \\ 3 &= 1{,}4\cos\alpha \\ \frac{3}{1{,}4} &= \cos\alpha \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik jou sakrekenaar om vir α op te los

Om vir α op te los, sal jy die inverse cosinusfunksie op jou sakrekenaar gebruik. Dit werk terugwaarts, deur die verhouding van die sye te gebruik om die hoek te vind wat aanleiding gegee het tot daardie verhouding.

Druk $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ *wiskunde fout ("error")*

In hierdie geval kry ons 'n fout wanneer ons die berekening probeer doen. Dit is omdat $\frac{3}{1{,}4}$ groter is as 1 en die maksimumwaarde van die cosinusfunksie is 1. Dus daar is geen oplossing nie. In hierdie geval is dit belangrik om 'geen oplossing' te skryf en nie 'wiskunde fout' nie.

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Daar is geen oplossing nie.

Oefening 5 – 6:

1. Bepaal die hoek (korrek tot 1 desimale plek):
   a) $\tan\theta = 1{,}7$
   b) $\sin\theta = 0{,}8$
   c) $\cos\alpha = 0{,}32$
   d) $\tan\beta = 4{,}2$
   e) $\tan\theta = 5\frac{3}{4}$
   f) $\sin\theta = \frac{2}{3}$
   g) $\cos\beta = 1{,}2$
   h) $4\cos\theta = 3$
   i) $\cos 4\theta = 0{,}3$
   j) $\sin\beta + 2 = 2{,}65$
   k) $2\sin\theta + 5 = 0{,}8$
   l) $3\tan\beta = 1$
   m) $\sin 3\alpha = 1{,}2$
   n) $\tan\frac{\theta}{3} = \sin 48°$
   o) $\frac{1}{2}\cos 2\beta = 0{,}3$
   p) $2\sin 3\theta + 1 = 2{,}6$
2. As $x = 16°$ en $y = 36°$, gebruik jou sakrekenaar om elk van die volgende te bereken, korrek tot 3 desimale plekke.
   a) $\sin(x - y)$
   b) $3\sin x$
   c) $\tan x - \tan y$
   d) $\cos x + \cos y$
   e) $\frac{1}{3}\tan y$
   f) $\text{cosec}(x - y)$
   g) $2\cos x + \cos 3y$
   h) $\tan(2x - 5y)$

3. In elk van die volgende, bepaal die waardes van x korrek tot twee desimale plekke.

a) $\sin x = 0{,}814$	b) $\sin x = \tan 45°$	c) $\tan 2x = 3{,}123$
d) $\tan x = 3 \sin 41°$	e) $\sin(2x + 45) = 0{,}123$	f) $\sin(x - 10°) = \cos 57°$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JDB	1b. 2JDC	1c. 2JDD	1d. 2JDF	1e. 2JDG	1f. 2JDH
1g. 2JDJ	1h. 2JDK	1i. 2JDM	1j. 2JDN	1k. 2JDP	1l. 2JDQ
1m. 2JDR	1n. 2JDS	1o. 2JDT	1p. 2JDV	2a. 2JDW	2b. 2JDX
2c. 2JDY	2d. 2JDZ	2e. 2JF2	2f. 2JF3	2g. 2JF4	2h. 2JF5
3a. 2JF6	3b. 2JF7	3c. 2JF8	3d. 2JF9	3e. 2JFB	3f. 2JFC

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

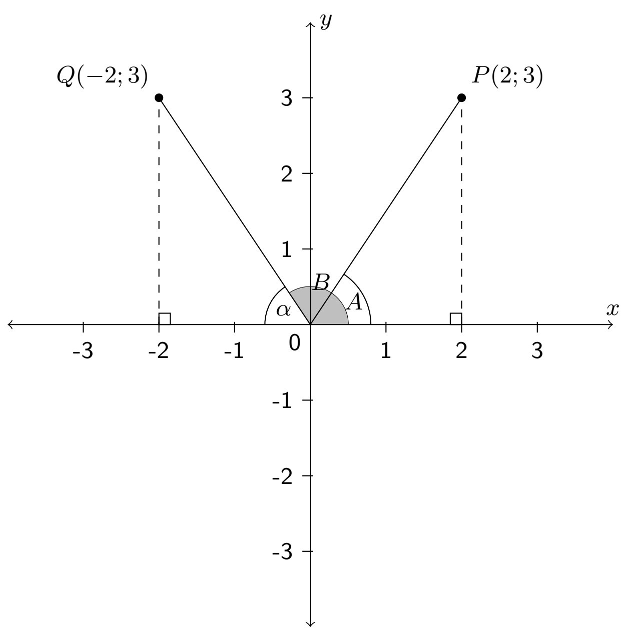
5.8 Definieer verhoudings in die Cartesiese vlak EMD3X

Ons het die trigonometriese verhoudings gedefinieer met die gebruik van reghoekige driehoeke. Ons kan hierdie definisies uitbrei na enige driehoek, en waarneem dat hierdie definisies nie afhanklik is van die lengtes van die sye van die driehoek nie, maar alleenlik van die grootte van die hoek. Dus, as ons enige punt op die Cartesiese vlak merk en dan 'n lyn trek vanaf die oorsprong na daardie punt, kan ons die hoek tussen die positiewe x-axis en daardie lyn uitwerk. Ons gaan dit eers ondersoek vir twee spesifieke punte en dan kyk na die meer algemene geval.

Vind 'n hoek vir spesifieke punte

In die figuur hieronder, is punte P en Q gemerk. 'n Lyn is vanaf die oorsprong (O) na elke punt getrek. Die stippellyne toon hoe ons reghoekige driehoeke vir elke punt kan konstrueer. Die stippellyn moet altyd getrek word na die x-as. Nou kan ons hoeke A en B vind:

NOTA:
Ons kan ook die definisies van die resiproke op dieselfde manier uitbrei.



Let die koördinate van $P\,(2;3)$, kan ons sien $x = 2$ en $y = 3$. Dus, ons weet die lengte van die sy teenoor $\hat{A}$ is 3 en die lengte van die aangrensende sy is 2. Met gebruik van:

$$\tan\hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{3}{2}$$

bereken ons dat $\hat{A} = 56{,}3°$.

Ons kan ook die stelling van Pythagoras gebruik om die skuinssy van die driehoek te bereken en bereken dan $\hat{A}$ met gebruik van:

$$\sin\hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \qquad \text{of} \qquad \cos\hat{A} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$$

Beskou punt $Q\,(-2;3)$. Ons definieer $\hat{B}$ as die hoek gevorm tussen lyn OQ en die positiewe x-as. Dit word die standaardposisie van 'n hoek genoem. Hoeke word altyd bereken vanaf die positiewe x-as in 'n anti-kloksgewyse rigting. Gestel α is die hoek gevorm tussen die lyn OQ en die negatiewe x-as sodat $\hat{B} + \alpha = 180°$.

Let die koordinate van $Q\,(-2;3)$, weet ons die lengte van die sy teenoor α is 3 en die lengte van die aangrensende sy is 2. Met gebruik van

$$\tan\alpha = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{3}{2}$$

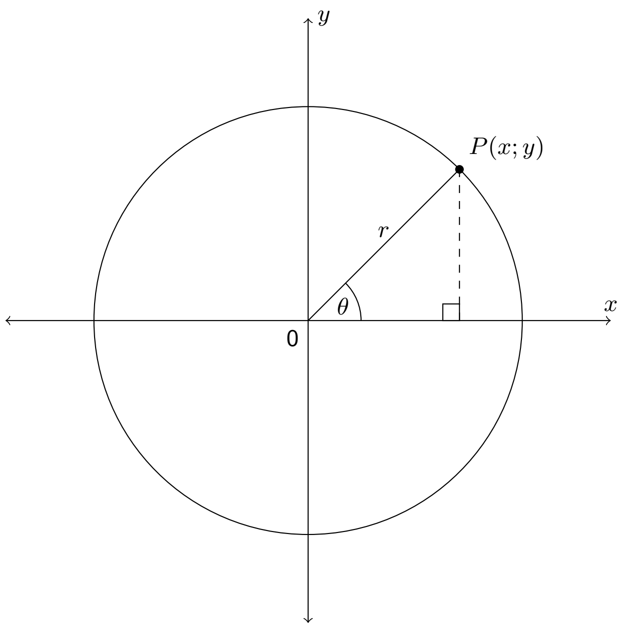
bereken ons dat $\alpha = 56{,}3°$. Dus $\hat{B} = 180° - \alpha = 123{,}7°$.

Soortgelyk, 'n alternatiewe metode is om die skuinssy te bereken met die gebruik van die stelling van Pythagoras en α te bereken met die gebruik van :

$$\sin\alpha = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \qquad \text{of} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$$

Vind enige hoek

As ons 'n sirkel trek rondom die oorsprong (O) en dit gaan deur punt $P(x;y)$, dan is die afstand van die oorsprong na die punt P die radius van die sirkel, wat ons aandui as r. Ons dui die hoek aan wat gevorm word tussen die lyn OP en die x-as met θ.

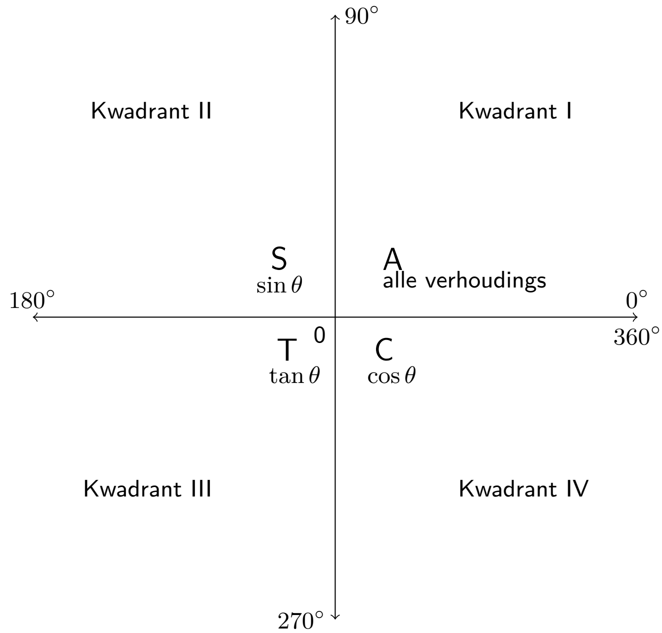


Ons kan al die trigonometriese verhoudings herskryf in terme van x, y en r. Die algemene definisies van die trigonometriese verhoudings is:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} & \text{cosec}\ \theta &= \frac{r}{y} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} & \sec\theta &= \frac{r}{x} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Die CAST diagram

Die Cartesiese vlak word verdeel in 4 kwadrante in 'n anti-kloksgewyse rigting soos getoon in die diagram hieronder. r is altyd positief maar die waardes van x en y verander afhangende op die posisie van die punt in die Cartesiese vlak. Gevolglik kan die trigonometriese verhoudings positief of negatief wees. Die letters C, A, S en T dui aan watter van die verhoudings is positief in elke kwadrant.



Die diagram staan bekend as die CAST diagram.

Ons let die volgende op as ons die algemene definisies van die trigonometriese verhoudings gebruik:

- Kwadrant I
  Beide die x en y waardes is positief, dus is al die verhoudings in hierdie kwadrant positief.
- Kwadrant II
  Die y waardes is positief, dus is $\sin$ en cosec positief in hierdie kwadrant (onthou dat $\sin$ en cosec word gedefinieer in terme van y en r).
- Kwadrant III
  Beide x en die y waardes is negatief, dus is $\tan$ en $\cot$ positief in hierdie kwadrant (onthou dat $\tan$ en $\cot$ word gedefinieer in terme van x en y).
- Kwadrant IV
  Die x waardes is positief, dus is $\cos$ en $\sec$ positief in hierdie kwadrant (onthou dat $\cos$ en $\sec$ gedefinieer word in terme van x en r).

BELANGRIK!

Die skuinssy, r, is 'n lengte, en is dus altyd positief.

BESOEK:
Die volgende video verskaf 'n opsomming van die trigonometriese verhoudings in die Cartesiese vlak.
Sien video: 2JFD at www.everythingmaths.co.za

Spesiale hoeke in die Cartesiese vlak

Wanneer ons in die Cartesiese vlak werk, sluit ons twee ander spesiale hoeke in reghoekige driehoeke in: 0° en 90°.

Let op dat wanneer $\theta = 0°$, is die lengte van die teenoorstaande sy gelyk aan 0 en die lengte van die aangrensende sy is gelyk aan die skuinssy. Dus:

$$\sin 0° = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{0}{\text{skuinssy}} = 0$$
$$\cos 0° = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$$
$$\tan 0° = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{0}{\text{aangrensende sy}} = 0$$

Wanneer $\theta = 90°$, is die lengte van die aangrensende sy gelyk aan 0, en die lengte van die teenoorstaande sy is gelyk aan die lengte van die skuinssy. Dus:

$$\sin 90° = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$$
$$\cos 90° = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{0}{\text{skuinssy}} = 0$$
$$\tan 90° = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{0} = \text{ongedefinieerd}$$

Nou kan ons ons kennis van spesiale hoeke uitbrei.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ongedefinieerd

Uitgewerkte voorbeeld 11: Verhoudings in die Cartesiese vlak

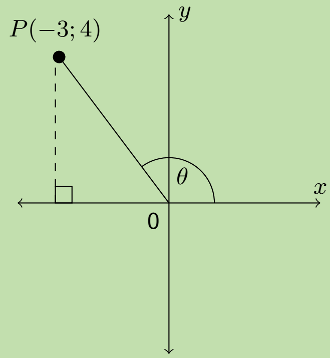
VRAAG

$P\,(-3;4)$ is 'n punt in die Cartesiese vlak met oorsprong O. θ is die hoek tussen OP en die positiewe x-as. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van:

1. $\cos\theta$
2. $3\tan\theta$
3. $\frac{1}{2}\text{cosec}\,\theta$

OPLOSSING

Stap 1: Skets punt P in die Cartesiese vlak en noem die hoek θ



Stap 2: Gebruik die stelling van Pythagoras om r te bereken

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (-3)^2 + (4)^2 \\ &= 25 \\ \therefore r &= 5 \end{aligned}$$

Let op: r is positief aangesien dit die radius van die sirkel is.

Stap 3: Vervang waardes vir x, y en r in die verlangde verhoudings

Dus $x = -3$, $y = 4$ en $r = 5$.

1. $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$
2. $3\tan\theta = 3\left(\frac{y}{x}\right) = 3\left(\frac{4}{-3}\right) = -4$
3. $\frac{1}{2}\text{cosec } \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{8}$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Verhoudings in die Cartesiese vlak

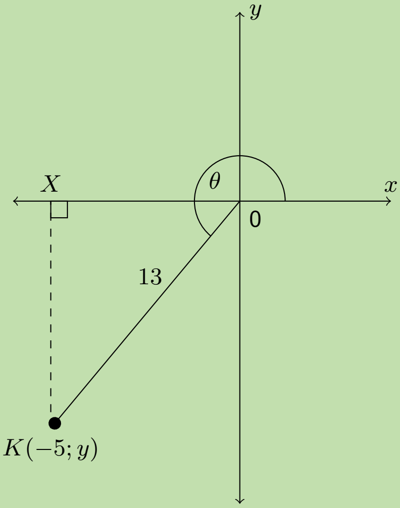
VRAAG

$X\hat{O}K = \theta$ is 'n hoek in die derde kwadrant waar X 'n punt is op die positiewe x-as en K is die punt $(-5; y)$. OK is 13 eenhede.

1. Bepaal sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waarde van y.
2. Bewys dat $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

OPLOSSING

Stap 1: Skets K in die Cartesiese vlak en noem die hoek θ



Stap 2: Gebruik die stelling van Pythagoras om y te bereken

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2 \\
y^2 &= r^2 - x^2 \\
&= (13)^2 - (-5)^2 \\
&= 169 - 25 \\
&= 144 \\
y &= \pm 12
\end{aligned}
$$

Gegewe dat θ in die derde kwadrant is, moet y negatief wees.

$$\therefore y = -12$$

Stap 3: Substitueer waardes vir x, y en r, en vereenvoudig

$x = -5$, $y = -12$ en $r = 13$.

LK

$$
\begin{aligned}
\tan^2\theta + 1 &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \\
&= \left(\frac{-12}{-5}\right)^2 + 1 \\
&= \left(\frac{144}{25}\right) + 1 \\
&= \frac{144 + 25}{25} \\
&= \frac{169}{25}
\end{aligned}
$$

RK

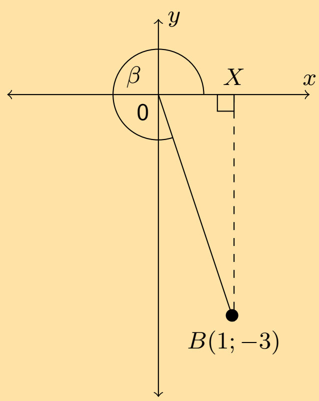
$$
\begin{aligned}
\sec^2\theta &= \left(\frac{r}{x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{13}{-5}\right)^2 \\
&= \frac{169}{25}
\end{aligned}
$$

Gevolglik is die LK = RK en het ons bewys dat $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

NOTA:
Wanneer jy trigonometriese probleme moet oplos sonder 'n sakrekenaar, kan dit baie handig wees om 'n skets te maak.

Oefening 5 – 7:

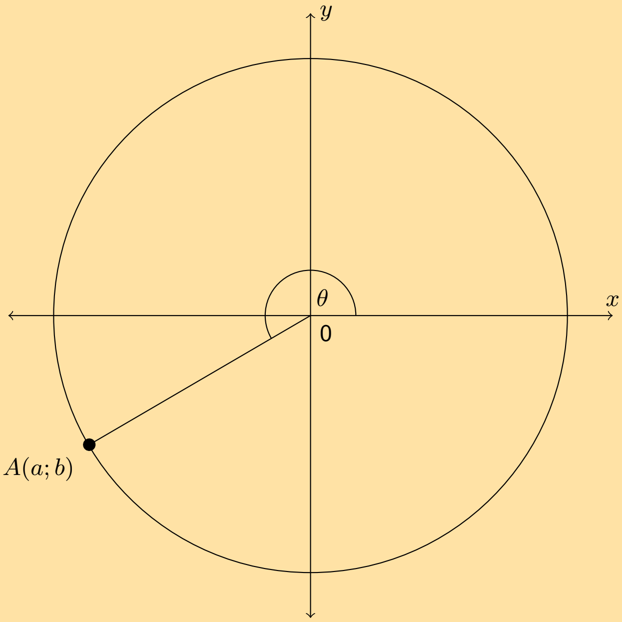
1. B is 'n punt in die Cartesiese vlak. Bepaal sonder 'n sakrekenaar:



   a) OB b) $\cos\beta$ c) cosec β d) $\tan\beta$

2. As $\sin\theta =$ 0,4 en θ 'n stomphoek is, bepaal:
   a) $\cos\theta$
   b) $\sqrt{21}\tan\theta$
3. Gegee $\tan\theta = \frac{t}{2}$, waar $0° \leq \theta \leq 90°$. Bepaal die volgende in terme van t: a) $\sec\theta$
   b) $\cot\theta$ c) $\cos^2\theta$ d) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$
4. Gegee: $10\cos\beta + 8 = 0$ en $180° < \beta < 360°$. Bepaal die waarde van:
   a) $\cos\beta$
   b) $\frac{3}{\tan\beta} + 2\sin^2\beta$
5. As $\sin\theta = -\frac{15}{17}$ en $\cos\theta < 0$, vind die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:
   a) $\cos\theta$
   b) $\tan\theta$
   c) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$
6. Vind die waarde van $\sin A + \cos A$ sonder 'n sakrekenaar, gegewe dat $13\sin A - 12 = 0$, waar $\cos A < 0$.
7. As $17\cos\theta = -8$ en $\tan\theta > 0$ bepaal die volgende met die hulp van 'n diagram (nie 'n sakrekenaar nie).
   a) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
   b) $17\sin\theta - 16\tan\theta$
8. L is 'n punt met koördinate $(5; 8)$ in 'n Cartesiese vlak. LK vorm 'n hoek, θ, met die positiewe x-as. Trek 'n diagram en gebruik dit om die volgende vrae te beanwoord.
   a) Vind die afstand LK.
   b) $\sin\theta$
   c) $\cos\theta$
   d) $\tan\theta$
   e) cosecθ
   f) $\sec\theta$
   g) $\cot\theta$
   h) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

9. Gegewe die volgende diagram en dat $\cos\theta = -\frac{24}{25}$.



   a) Noem twee stelle moontlike waardes van a en b.
   b) As $OA = 100$, meld die waardes van a en b.
   c) Bepaal vervolgens sonder 'n sakrekenaar die waarde van $\sin\theta$.

10. As $\tan\alpha = \frac{5}{-12}$ en $0° \leq \alpha \leq 180°$, bepaal **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar** die waarde van $\frac{12}{\cos\alpha}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JFF 2. 2JFG 3. 2JFH 4. 2JFJ 5. 2JFK 6. 2JFM
7. 2JFN 8. 2JFP 9. 2JFQ 10. 2JFR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.9 Hoofstuk opsomming EMD3Y

Sien aanbieding: 2JFS at www.everythingmaths.co.za

- Ons kan drie trigonometriese verhoudings vir reghoekige driehoeke definieer: sinus $(\sin)$, cosinus $(\cos)$ en tangens $(\tan)$
  Hierdie verhoudings kan gedefinieer word as:
  - $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{y}{r}$
  - $\cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{x}{r}$
  - $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{y}{x}$
- Elk van hierdie verhoudings het 'n resiprook: cosecans (cosec), secans $(\sec)$ en cotangens $(\cot)$.

Hierdie verhoudings kan gedefinieer word as:

- $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{skuinssy}}{\text{teenoorstaande sy}} = \dfrac{r}{y}$
- $\sec\theta = \dfrac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}} = \dfrac{r}{x}$
- $\cot\theta = \dfrac{\text{aangrensende sy}}{\text{teenoorstaande sy}} = \dfrac{x}{y}$

- Ons kan die beginsels vir die oplos van vergelykings en die trigonometriese verhoudings gebruik om ons te help om eenvoudige trigonometriese vergelykings op te los.
- Vir sekere spesiale hoeke ($0°$, $30°$, $45°$, $60°$ en $90°$), kan ons maklik die waardes vind van $\sin$, $\cos$ en $\tan$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.
- Ons kan die definisies van die trigonometriese verhoudings uitbrei na enige hoeke.

End of chapter Exercise 5 – 8:

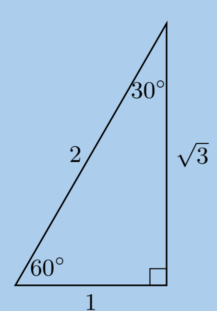
1. Sê of elk van die volgende trigonometriese verhoudings korrek geskryf is.

   a) $\sin\theta = \dfrac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}}$ b) $\tan\theta = \dfrac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ c) $\sec\theta = \dfrac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}}$

2. Gebruik jou sakrekenaar om die volgende uitdrukkings korrek tot twee desimale te bereken:

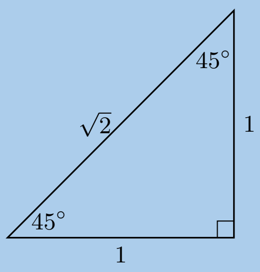
   a) $\tan 80°$
   b) $\cos 73°$
   c) $\sin 17°$
   d) $\tan 313°$
   e) $\cos 138°$
   f) $\sec 56°$
   g) $\cot 18°$
   h) $\text{cosec } 37°$
   i) $\sec 257°$
   j) $\sec 304°$
   k) $3\sin 51°$
   l) $4\cot 54° + 5\tan 44°$
   m) $\dfrac{\cos 205°}{4}$
   n) $\sqrt{\sin 99°}$
   o) $\sqrt{\cos 687° + \sin 120°}$
   p) $\dfrac{\tan 70°}{\text{cosec } 1°}$
   q) $\sec 84° + 4\sin 0{,}4° \times 50\cos 50°$
   r) $\dfrac{\cos 40°}{\sin 35°} + \tan 38°$

3. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



   a) $\sin 60° =$ b) $\cos 60° =$ c) $\tan 60° =$
   d) $\sin 30° =$ e) $\cos 30° =$ f) $\tan 30° =$

4. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



a) $\sin 45° =$
b) $\cos 45° =$
c) $\tan 45° =$

5. Bereken die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Kies die antwoord wat korrek is uit die gegewe lys.

a) $\sin 60° - \tan 60°$

$$0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) $\tan 30° - \cos 30°$

$$0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $\tan 60° - \sin 60° - \tan 60°$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{1} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) $\sin 30° \times \sin 30° \times \sin 30°$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

e) $\sin 45° \times \tan 45° \times \tan 60°$
f) $\cos 60° \times \cos 45° \times \tan 60°$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

g) $\tan 45° \times \sin 60° \times \tan 45°$

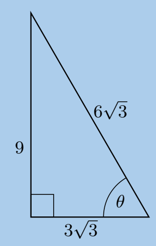
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

h) $\cos 30° \times \cos 60° \times \sin 60°$

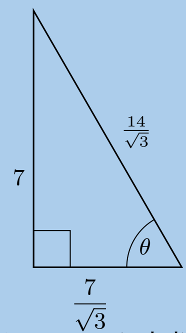
6. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van:

$$\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° + \tan 45°$$

7. Bepaal $\sin \theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:

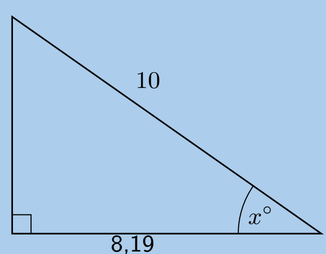


8. Bepaal $\tan\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:

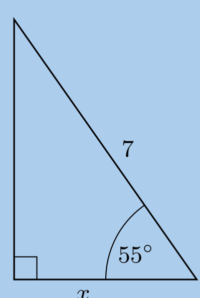


9. 'n Reghoekige driehoek het skuinssy 13 mm. Vind die lengtes van die ander twee sye as een van die hoeke van die driehoek 50° is.
10. Los op vir x tot die naaste heelgetal.

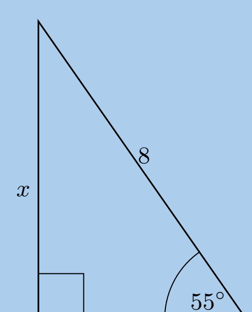
a)



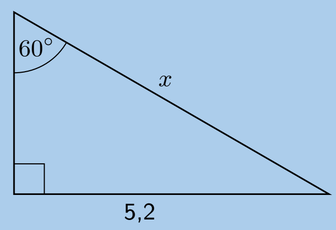
b)



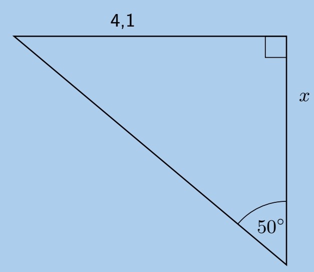
c)



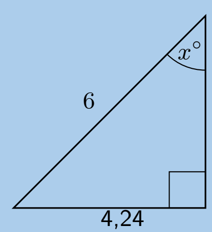
d)



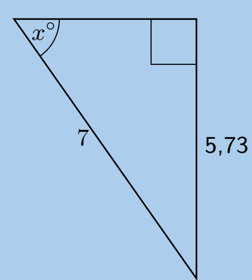
e)



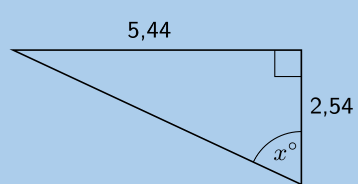
f)



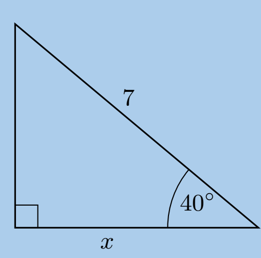
g)



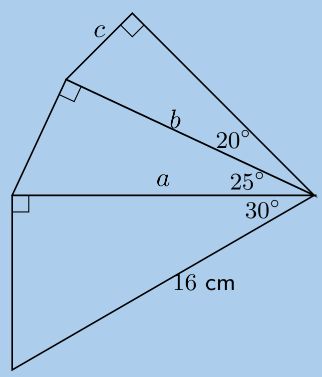
h)

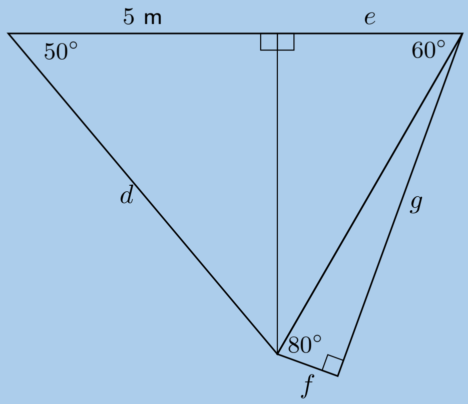


i)



11. Bereken die onbekende lengtes in die diagramme hieronder:

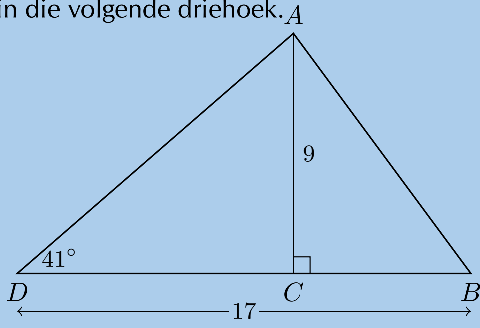




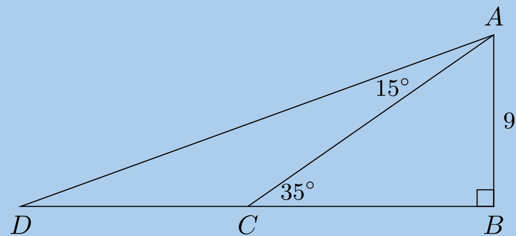
12. In $\triangle PQR$ is $PR = 20$ cm, $QR = 22$ cm en $P\hat{R}Q = 30°$. Die loodregte lyn van P tot QR sny QR by X. Bereken:

    a) die lengte XR b) die lengte PX c) die hoek $Q\hat{P}X$

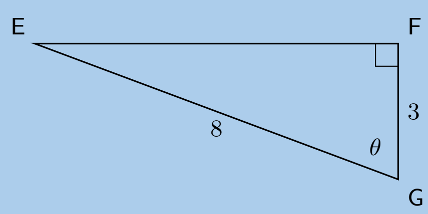
13. Bepaal die grootte van $A\hat{B}C$ in die volgende driehoek.



14. Vind die lengte van sy CD in die volgende driehoek:

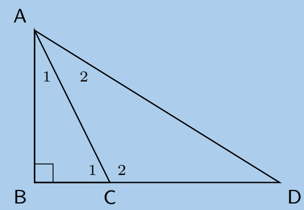


15. Bepaal



    a) Die lengte van EF b) $\tan(90° - \theta)$ c) Die waarde van θ

16. Gegee: $\hat{D} = x$, $\hat{C}_1 = 2x$, $BC = 12{,}2$ cm, $AB = 24{,}6$ cm. Bereken CD.



17. Los op vir θ as θ 'n positiewe skerphoek is:

a) $2\sin\theta = 1{,}34$
b) $1 - \tan\theta = -1$
c) $\cos 2\theta = \sin 40°$
d) $\sec\theta = 1{,}8$
e) $\cot 4\theta = \sin 40°$
f) $\sin 3\theta + 5 = 4$
g) $\cos(4 + \theta) = 0{,}45$
h) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

18. As $a = 29°$, $b = 38°$ en $c = 47°$, gebruik jou sakrekenaar om elk van die volgende te bepaal, korrek tot 2 desimale plekke.

a) $\tan(a + c)$
b) cosec $(c - b)$
c) $\sin(a \times b \times c)$
d) $\tan a + \sin b + \cos c$

19. As $3\tan\alpha = -5$ en $0° < \alpha < 270°$, gebruik 'n skets om die volgende te bepaal:

a) $\cos\alpha$
b) $\tan^2\alpha - \sec^2\alpha$

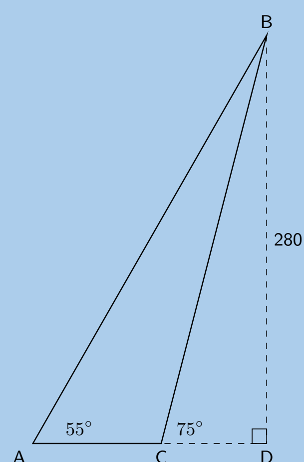
20. Gegee: $A(5; 0)$ en $B(11; 4)$, vind die hoek tussen die lyn deur A en B en die x-as.

21. Gegee $C(0; -13)$ en $D(-12; 14)$, vind die hoek tussen die lyn deur C en D en die y-as.

22. Gegee die punte $E(5; 0)$, $F(6; 2)$ en $G(8; -2)$. Vind die hoek $F\hat{E}G$.

23. 'n Driehoek met hoeke 40°, 40° en 100° het 'n omtrek van 20 cm. Vind die lengte van elke sy van die driehoek.

24. Bepaal die oppervlakte van $\triangle ABC$



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JFT	1b. 2JFV	1c. 2JFW	2a. 2JFX	2b. 2JFY	2c. 2JFZ
2d. 2JG2	2e. 2JG3	2f. 2JG4	2g. 2JG5	2h. 2JG6	2i. 2JG7
2j. 2JG8	2k. 2JG9	2l. 2JGB	2m. 2JGC	2n. 2JGD	2o. 2JGF
2p. 2JGG	2q. 2JGH	2r. 2JGJ	3. 2JGK	4. 2JGM	5a. 2JGN
5b. 2JGP	5c. 2JGQ	5d. 2JGR	5e. 2JGS	5f. 2JGT	5g. 2JGV
5h. 2JGW	6. 2JGX	7. 2JGY	8. 2JGZ	9. 2JH2	10a. 2JH3
10b. 2JH4	10c. 2JH5	10d. 2JH6	10e. 2JH7	10f. 2JH8	10g. 2JH9
10h. 2JHB	10i. 2JHC	11. 2JHD	12. 2JHF	13. 2JHG	14. 2JHH
15. 2JHJ	16. 2JHK	17a. 2JHM	17b. 2JHN	17c. 2JHP	17d. 2JHQ
17e. 2JHR	17f. 2JHS	17g. 2JHT	17h. 2JHV	18. 2JHW	19. 2JHX
20. 2JHY	21. 2JHZ	22. 2JJ2	23. 2JJ3	24. 2JJ4	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 6

Funksies

6.1 Inleiding EMD3Z

Funksies is die wiskundige boustene vir die ontwerp van masjiene, die voorspelling van natuurlikerampe, genesing van siektes, verstaan van die wereldekonomie en om vliegtuie in die lug te hou. Funksies kan invoer ontvang van baie veranderlikes, maar gee altyd dieselfde uitvoer, uniek aan daardie funksie.

Funksies stel ons in staat om verwantskappe te visualiseer in die vorm van grafieke, wat baie makliker is om te lees en te interpreteer as lyste van getalle.

Figuur 6.1: 'n Krieketspeler ontvang 'n aflewering. As 'n krieketspeler op sy beenskutte getref word en die skeidsregter dink die bal sou die paaltjies agter hom getref het, word hy BVP (been voor paaltjie) uitgegee. Op professionele vlakke van die spel word gesofistikeerde sagteware gebruik om te bepaal of die bal die paaltjies sou getref het. Die sagteware gebruik funksies om die vlug van die bal te voorspel indien die krieketspeler se been nie in die pad van die bal gekom het nie.

Sommige voorbeelde van funksies sluit in:

- Geld is 'n funksie van tyd. Jy het op enige gegewe oomblik altyd net een bedrag geld want jy kan altyd alles bymekaartel om een totale bedrag te gee. As jy verstaan hoe jou geldvoorraad verander oor tyd, kan jy beplan om jou geld sinvol te bestee. Besighede vind dit baie nuttig om die grafiek te trek van hulle geld met betrekking tot tyd sodat hulle kan sien wanneer hulle te veel spandeer.
- Temperatuur as 'n funksie van verskeie faktore. Temperatuur is 'n baie ingewikkelde funksie omdat dit soveel invoer elemente het, onder andere: die tyd van die dag, die seisoen, die hoeveelheid wolke in die lug, die sterkte van die wind, waar jy is en nog baie meer. Die belangrike ding is egter dat daar net een temperatuur uitvoerwaarde is wanneer jy dit meet op 'n spesifieke plek.
- Plek as 'n funksie van tyd. Jy kan nooit op twee verskillende plekke op dieselfde tyd wees nie. As jy die grafieke sou trek van waar twee mense is as 'n funksie van tyd, sal die plek waar die lyne kruis, beteken dat die twee mense mekaar ontmoet op daardie tydstip. Hierdie idee word gebruik in logistiek, 'n area van wiskunde wat probeer beplan waar mense en items is met die oog op besigheid.

DEFINISIE: *Funksie*

'n Funksie is 'n wiskundige verwantskap tussen twee veranderlikes, waar elke invoerveranderlike net een uitvoerveranderlike het.

Afhanklike en onafhanklike veranderlikes EMD42

In funksies, staan die x-veranderlike bekend as die invoer- of onafhanklike veranderlike omdat sy waarde vrylik gekies kan word. Die berekende y-veranderlike staan bekend as die uitvoer of afhanklike veranderlike omdat sy waarde afhang van die gekose invoerwaarde.

Versamelingnotasie EMD43

Voorbeelde:

$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$	Die versameling van alle x-waardes wat so is dat x 'n element is van die versameling reële getalle en groter is as 0.
$\{y : y \in \mathbb{N}, 3 < y \leq 5\}$	Die versameling van alle y-waardes wat so is dat y 'n natuurlike getal is, groter as 3 en kleiner of gelyk aan 5.
$\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq 100\}$	Die versameling van alle z-waardes wat so is dat z 'n heelgetal is en kleiner of gelyk is aan 100.

Intervalnotasie EMD44

Dit is belangrik om daarop te let dat hierdie notasie slegs gebruik kan word om 'n interval voor te stel met reële getalle.

Voorbeelde:

$(3; 11)$	Ronde hakies dui aan dat die eindwaarde nie ingesluit is nie. Hierdie interval sluit alle reële getalle in groter as maar nie gelyk aan 3 nie, en kleiner as maar nie gelyk aan 11 nie.
$(-\infty; -2)$	Ronde hakies sluit alle reële getalle in kleiner as, maar nie gelyk aan -2 nie.
$[1; 9)$	'n Vierkantige hakie dui aan dat die eindwaarde ingesluit is. Hierdie interval sluit in alle reële getalle groter of gelyk aan 1 en kleiner as, maar nie gelyk aan 9 nie.

Funksienotasie EMD45

Hierdie is 'n baie handige manier om 'n funksie voor te stel. 'n Ander manier om $y = 2x + 1$ te skryf, is $f(x) = 2x + 1$. Ons sê "f van x is gelyk aan $2x + 1$". Enige letter kan gebruik word, byvoorbeeld $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, ens.

1. **Bepaal die uitvoerwaarde**:
   "Vind die waarde van die funksie vir $x = -3$", kan geskryf word as: "vind $f(-3)$".
   Vervang x met -3:

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2(-3) + 1 = -5 \\ \therefore f(-3) &= -5 \end{aligned}$$

   Dit beteken dat wanneer $x = -3$, is die waarde van die funksie -5.

2. **Bepaal die invoerwaarde**:
   "Vind die waarde van x wat 'n y-waarde van 27 sal gee", kan geskryf word as: "vind x as $f(x) = 27$".
   Ons skryf die volgende vergelyking en los vir x op:

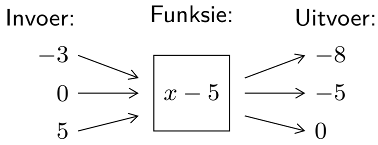
$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 27 \\ \therefore x &= 13 \end{aligned}$$

   Dit beteken dat wanneer $x = 13$ is die waarde van die funksie 27.

Voorstellings van funksies EMD46

Funksies kan uitgedruk word op baie verskillende maniere vir verskillende doeleindes.

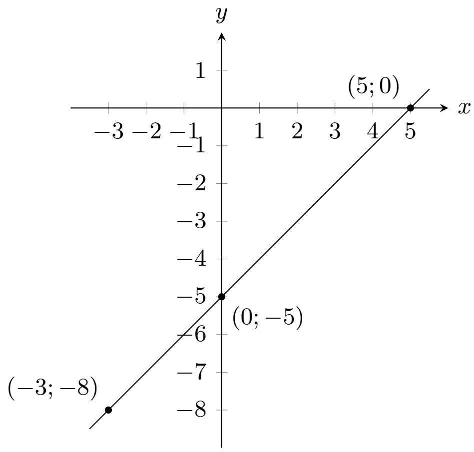
1. Woorde: "Die verband tussen twee veranderlikes is so dat die een altyd 5 minder is as die ander een."
2. Vloeidiagram



3. Tabel:

Invoerveranderlike (x)	-3	0	5
Uitvoerveranderlike (y)	-8	-5	0

4. Versameling van geordende getallepare: $(-3;-8)$, $(0;-5)$, $(5;0)$
5. Algebraïese formule: $f(x) = x - 5$
6. Grafiek:



Gebied en terrein EMD47

Die gebied van 'n funksie is die versameling van alle onafhanklike x-waardes waarvoor daar een y-waarde is volgens die funksie.

Die terrein is die versameling van alle afhanklike y-waardes wat verkry kan word deur die gebruik van 'n onafhanklike x-waarde.

Oefening 6 – 1:

1. Skryf die volgende in versamelingnotasie:

a) $(-\infty;7]$
b) $[-13;4)$
c) $(35;\infty)$
d) $[\frac{3}{4};21)$
e) $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$
f) $(-\sqrt{3};\infty)$

2. Skryf die volgende in intervalnotasie:

a) $\{p : p \in \mathbb{R}, p \leq 6\}$

b) $\{k : k \in \mathbb{R}, -5 < k < 5\}$

c) $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{5}\right\}$

d) $\{z : z \in \mathbb{R}, 21 \leq x < 41\}$

3. Voltooi die volgende tabelle en identifiseer die funksie.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10		20		

b)

x	1		3	4		6
y	5	5			5	5

c)

x	2			8	10	12
y	1	2	3			6

4. Stip die volgende punte op 'n grafiek.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

b)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	9	13	17	21	25

5. Stel 'n tabel op van waardes van die gegewe funksie en stip dan die grafiek van die funksie. Jou tabel moet ten minste 5 geordende pare hê.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = x - 3$

6. As die funksies $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x - 4$; $h(x) = 7 - x^2$; $k(x) = 3$ gegee is, vind die waarde van die volgende:

a) $f(-1)$

b) $g(-7)$

c) $h(3)$

d) $k(100)$

e) $f(-2) + h(2)$

f) $k(-5) + h(3)$

g) $f(g(1))$

h) $k(f(6))$

7. Die prys van petrol en diesel per liter word gegee deur die funksies P en D, waar:

$$P = 13{,}61V$$
$$D = 12{,}46V$$

Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Bereken $P(8)$

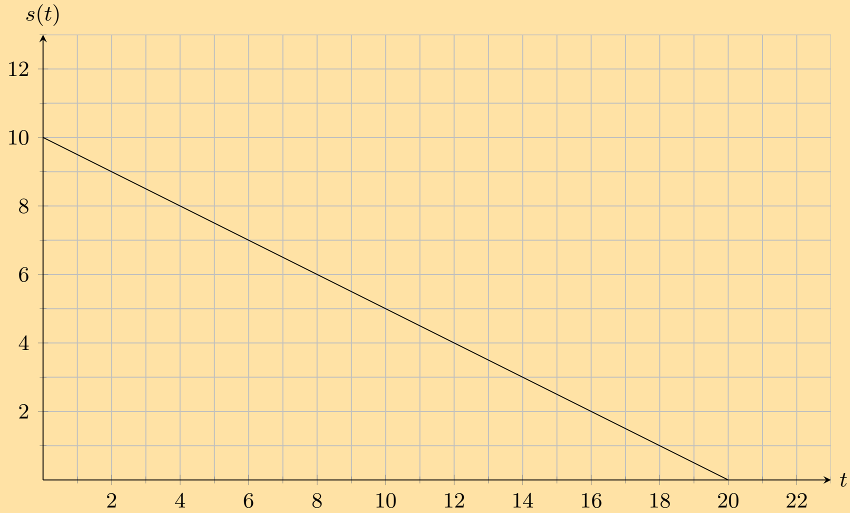
b) Bereken $D(16)$

c) Hoeveel liter petrol kan jy koop met R 300?

d) Hoeveel liter petrol kan jy koop met R 275?

e) Hoeveel is petrol duurder as diesel? Toon jou antwoord as 'n funksie.

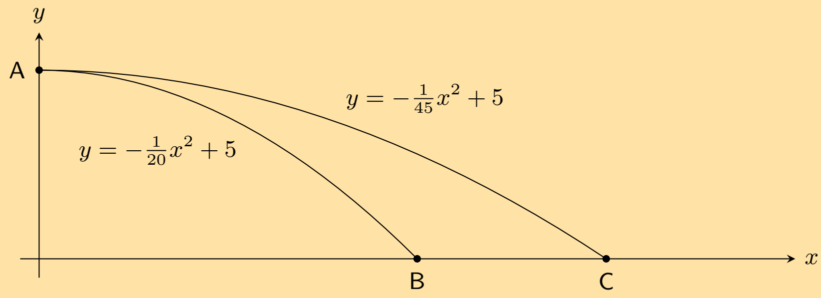
8. ’n Bal rol teen ’n 10 m skuinste af. Die grafiek hieronder toon die verband tussen die afstand en die tyd.



Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Na 6 s, hoeveel verder het die bal om te rol?
b) Wat is die terrein van die funksie?
c) Wat is die gebied van die funksie en wat verteenwoordig dit?

9. James en Themba gooi elkeen ’n klip vanaf die top van ’n gebou in ’n rivier. Die trajek van die klippe kan beskryf word met kwadratiese vergelykings. $y = -\frac{1}{20}x^2 + 5$ beskryf die pad van die klip wat deur James gegooi is en $y = -\frac{1}{45}x^2 + 5$ beskryf die pad van Themba se klip.



a) Hoe hoog is die gebou waarop hulle gestaan het?
b) Hoe ver het James sy klip gegooi voor dit die rivier se oppervlak bereik het?
c) Hoeveel verder het Themba sy klip gegooi voor dit die rivier se oppervlak bereik het?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1a. 2JJ5 1b. 2JJ6 1c. 2JJ7 1d. 2JJ8 1e. 2JJ9 1f. 2JJB
2a. 2JJC 2b. 2JJD 2c. 2JJF 2d. 2JJG 3a. 2JJH 3b. 2JJJ
3c. 2JJK 4a. 2JJM 4b. 2JJN 5a. 2JJP 5b. 2JJQ 6. 2JJR
7. 2JJS 8. 2JJT 9. 2JJV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.2 Lineêre funksies EMD48

Funksies van die vorm $y = x$ EMD49

Funksies van die vorm $y = mx + c$ word reguitlynfunksies genoem. In die vergelyking $y = mx + c$ is, m en c konstantes en hulle het verskillende invloede op die grafiek van die funksie.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Trek van 'n reguitlyngrafiek

VRAAG

$y = f(x) = x$

Voltooi die volgende tabel vir $f(x) = x$ en stip die punte op 'n assestelsel.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2				

1. Verbind die punte met 'n reguitlyn.
2. Bepaal die gebied en terrein.
3. Rondom watter lyn is f simmetries?
4. Gebruik die grafiek en bepaal die waarde van x waarvoor $f(x) = 4$. Bevestig jou antwoord grafies.
5. Waar sny die grafiek die asse?

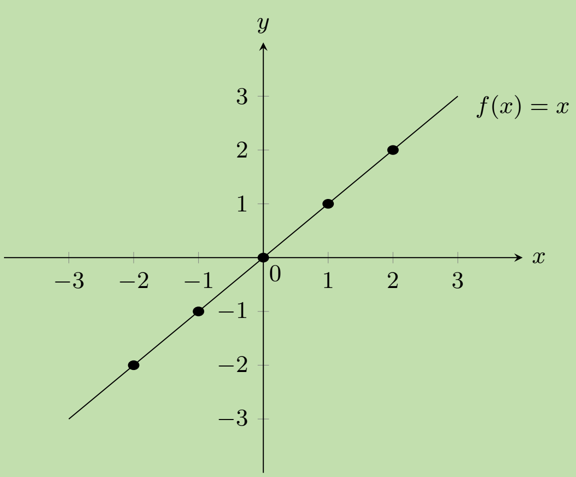
OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes in die vergelyking

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

Stap 2: Stip die punte en verbind met 'n reguitlyn

Van die tabel kry ons die volgende punte en die grafiek: $(-2;-2), (-1;-1), (0;0), (1;1), (2;2)$



Stap 3: Bepaal die gebied en terrein
Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $f(x) \in \mathbb{R}$

Stap 4: Bepaal die waarde van x waarvoor $f(x) = 4$
Vanaf die grafiek sien ons dat wanneer $f(x) = 4$, $x = 4$. Dit gee die punt $(4; 4)$.

Stap 5: Bepaal die afsnit
Die funksie f sny die asse by die oorsprong $(0; 0)$.

Funksies van die vorm $y = mx + c$ EMD4B

Ondersoek: Die effek van m en c op 'n reguitlyngrafiek

Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

1. $y = x - 2$
2. $y = x - 1$
3. $y = x$
4. $y = x + 1$
5. $y = x + 2$

Gebruik jou resultate om die uitwerking van die verskillende waardes van c op die grafiek af te lei.

Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

1. $y = -2x$
2. $y = -x$
3. $y = x$
4. $y = 2x$

Gebruik jou resultate om die uitwerking van die verskillende waardes van m op die grafiek af te lei.

Die effek van m

Ons let op dat die waarde van m die helling van die grafiek bepaal. As m toeneem, sal die gradiënt van die grafiek toeneem.

As $m > 0$, sal die grafiek toeneem van links na regs (loop opwaarts).

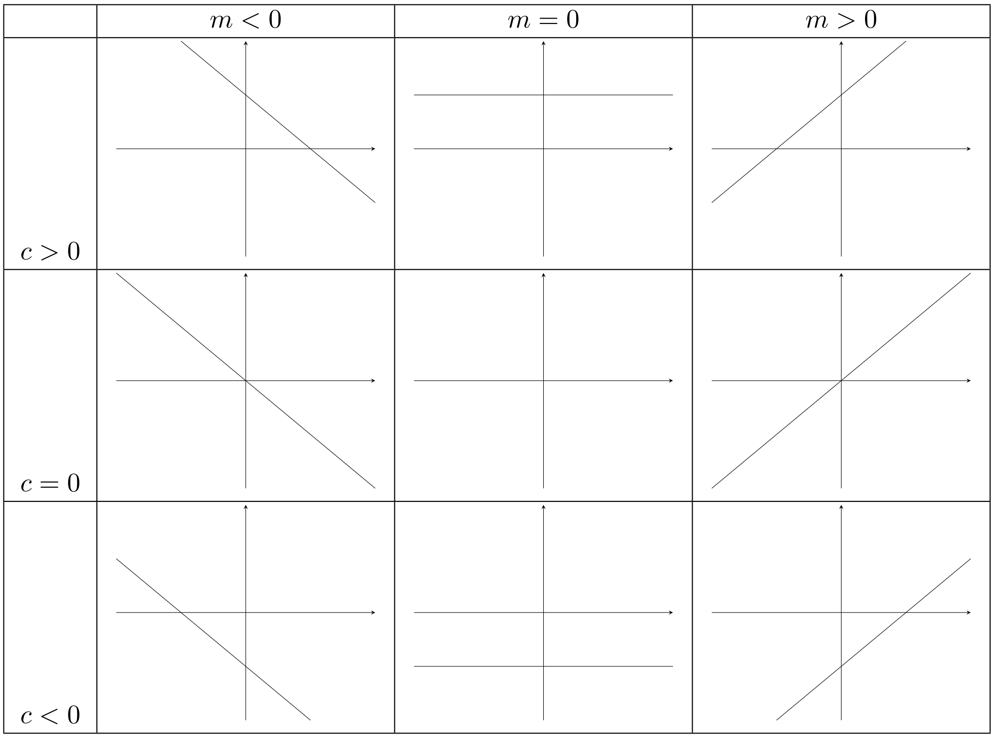
As $m < 0$, sal die grafiek toeneem van regs na links (loop afwaarts). Om hierdie rede, word na m verwys as die gradiënt van 'n reguitlyngrafiek.

Die effek van c

Ons let ook op dat die waarde van c bepaal waar die grafiek die y-as sny. Om hierdie rede staan c bekend as die y-afsnit.

As $c > 0$ skuif die grafiek vertikaal opwaarts.

As $c < 0$ skuif die grafiek vertikaal afwaarts.



Tabel 6.1: Die effek van m en c op 'n reguitlyngrafiek.

BESOEK:
Jy kan Phet simulation gebruik om jou te help om die invloed te sien van die verandering van m en c.

Ontdek die eienskappe

EMD4C

Die standaardvorm van 'n reguitlyngrafiek is die vergelyking $y = mx + c$.

Gebied en terrein

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van x waarvoor $f(x)$ ongedefinieerd is nie.

Die terrein van $f(x) = mx + c$ is ook $\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}\}$ omdat $f(x)$ enige reële waarde kan aanneem.

Afsnitte

Die y-afsnit:

Elke punt op die y-as het 'n x-koördinaat van 0. Dus, om te bereken wat die y-afsnit is stel $x = 0$.

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = x - 1$ word gegee deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 1 \\ g(0) &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -1)$.

Die x-afsnit:

Elke punt op die x-as het 'n y-koördinaat van 0. Dus, om te bereken wat is die x-afsnit, stel $y = 0$.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g\left(x\right) = x - 1$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= x - 1 \\ 0 &= x - 1 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(1;0)$.

Skets grafieke van die vorm $y = mx + c$ EMD4D

Ten einde grafieke te skets van die vorm, $f\left(x\right) = mx + c$, behoort ons drie eienskappe te bepaal:

1. teken van m
2. y-afsnit
3. x-afsnit

Dubbel-afsnit metode EMD4F

Slegs twee punte is nodig om 'n reguitlyngrafiek te teken. Die maklikste punte om te gebruik is die x-afsnit en die y-afsnit.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Skets 'n reguitlyngrafiek deur gebruik te maak van die dubbel-afsnit metode.

VRAAG

Skets die grafiek van $g(x) = x - 1$ deur gebruik te maak van die dubbel-afsnit metode.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

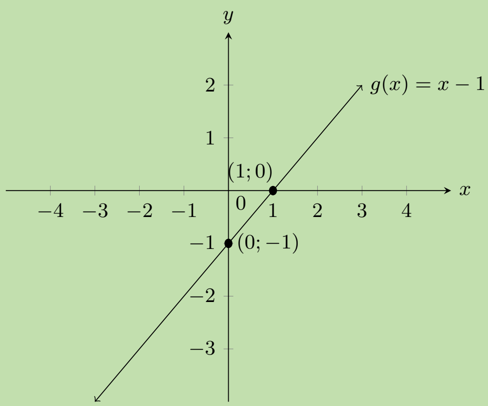
$m > 0$. Dit beteken die grafiek neem toe as x toeneem.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$; dus $g(0) = -1$. Dit gee die punt $(0;-1)$.

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$; dus $x = 1$. Dit gee die punt $(1;0)$.

Stap 3: Stip die punte en teken die grafiek



Ons kan 'n reguitlyngrafiek van die vorm $y = mx + c$ teken deur gebruik te maak van die gradiënt (m) en die y-afsnit (c).

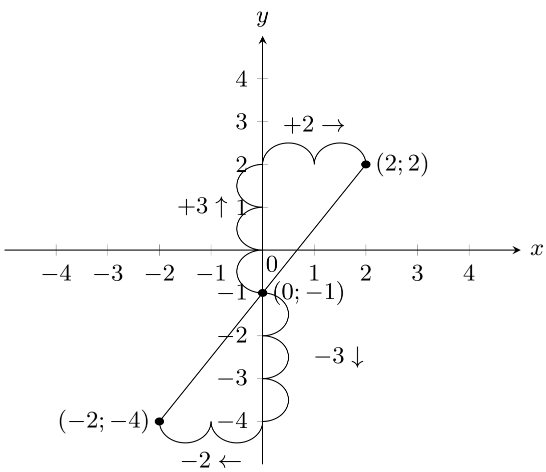
Ons bereken die y-afsnit deur $x = 0$ te stel. Dit gee ons een punt $(0; c)$ om die grafiek te trek en ons gebruik die gradiënt om die tweede punt te bereken.

Die gradiënt van 'n lyn is 'n maatstaf van helling. Helling of steilte word bepaal deur die verhouding van die vertikale verandering met betrekking tot die horisontale verandering:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{\text{vertikale verandering}}{\text{horisontale verandering}}$$

Byvoorbeeld, $y = \frac{3}{2}x - 1$, dus $m > 0$ en die grafiek se helling is opwaarts.

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{3 \uparrow}{2 \rightarrow} = \frac{-3 \downarrow}{-2 \leftarrow}$$



Uitgewerkte voorbeeld 3: Teken van 'n reguitlyngrafiek deur gebruik van die gradiënt-y-afsnit metode

VRAAG

Skets die grafiek van $p(x) = \frac{1}{2}x - 3$ deur gebruik te maak van die gradiënt-afsnit metode.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die y-afsnit

$c = -3$, wat die punt $(0; -3)$ gee.

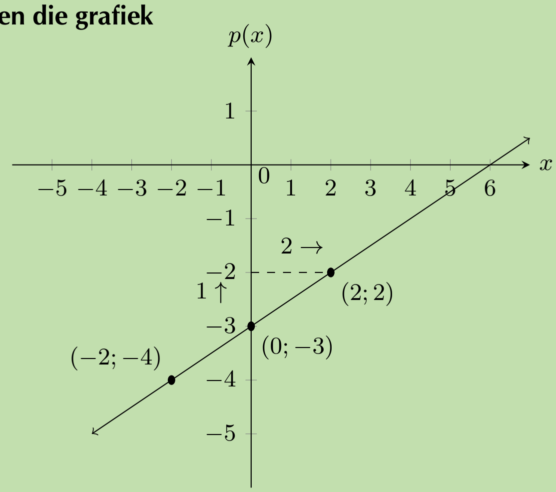
Stap 2: Gebruik die gradiënt

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{1 \uparrow}{2 \rightarrow} = \frac{-1 \downarrow}{-2 \leftarrow}$$

Begin by $(0; -3)$. Beweeg 1 eenheid op en 2 eenhede na regs. Dit gee die tweede punt $(2; -2)$.

Of, begin by $(0; -3)$, beweeg 1 eenheid af en 2 eenhede links. Dit gee die tweede punt $(-2; -4)$.

Stap 3: Stip die punte en teken die grafiek



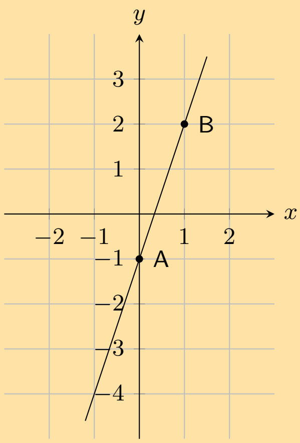
Skryf altyd 'n funksie in die vorm $y = mx + c$ en let op die waarde van m. Na jy die grafiek getrek het, maak seker dat die grafiek toeneem as $m > 0$ en dat die grafiek afneem as $m < 0$.

Oefening 6 – 2:

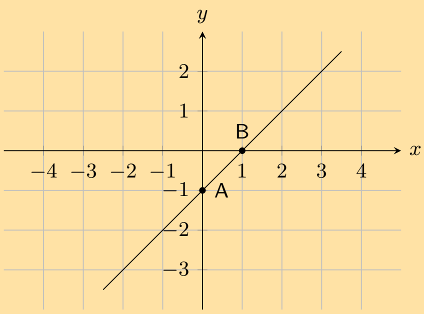
1. Bepaal die x-afsnit en die y-afsnit van die gegewe funksies.

   a) $y = x - 1$ b) $y = x + 2$ c) $y = x - 3$

2. In die grafiek hieronder is daar 'n funksie met die vergelyking $y = mx + c$. Bepaal die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).



3. Die grafiek toon 'n funksie met die vergelyking $y = mx + c$. Bepaal die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).



4. Maak 'n lys van die x en y-afsnitte vir die volgende reguitlyngrafieke. Dui aan of die grafiek toeneem of afneem:

a) $y = x + 1$ b) $y = x - 1$ c) $h(x) = 2x + 1$ d) $y + 3x = 1$

e) $3y - 2x = 6$ f) $k(x) = -3$ g) $x = 3y$ h) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

5. Meld of die volgende waar is of nie.

a) Die gradiënt van $2y = 3x - 1$ is 3.

b) Die y-afsnit van $y = x + 4$ is 4.

c) Die gradiënt van $2 - y = 2x - 1$ is -2.

d) Die gradiënt van $y = \frac{1}{2}x - 1$ is -1.

e) Die y-afsnit van $2y = 3x - 6$ is 6.

6. Skryf die volgende in standaardvorm ($y = mx + c$):

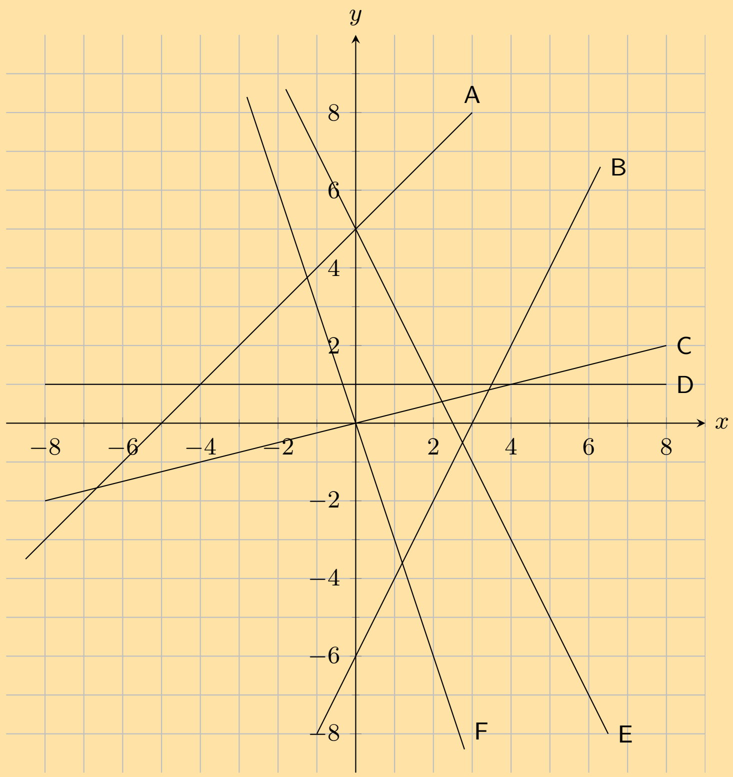
a) $2y + 3x = 1$

b) $3x - y = 5$

c) $3y - 4 = x$

d) $y + 2x - 3 = 1$

7. Kyk na die grafiek hieronder. Elke grafiek word met 'n letter aangedui. In die vrae wat volg, pas die gegewe vergelyking by die letter van 'n ooreenstemmende grafiek.



a) $y = 5 - 2x$

b) $x + 5$

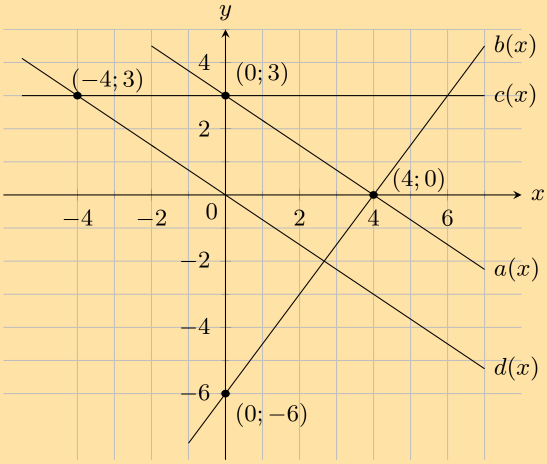
c) $y = 2x - 6$

d) $y = -3x$

e) $y = 1$

f) $y = \frac{1}{2}x$

8. Vir die funksies in die diagram hieronder, gee die vergelyking van elke reguitlyn:



a) $a(x)$ b) $b(x)$ c) $c(x)$ d) $d(x)$

9. Skets die volgende funksies op dieselfde assestelsel, deur gebruik te maak van die dubbel-afsnit metode. Dui duidelik die koördinate aan van die afsnitte met die asse en die snypunt van die twee grafieke: $x + 2y - 5 = 0$ en $3x - y - 1 = 0$.

10. Op dieselfde assestelsel, teken die grafieke van $f(x) = 3 - 3x$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ deur die gradiënt-afsnit metode te gebruik.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JJW	1b. 2JJX	1c. 2JJY	2. 2JJZ	3. 2JK2	4a. 2JK3	4b. 2JK4	4c. 2JK5
4d. 2JK6	4e. 2JK7	4f. 2JK8	4g. 2JK9	4h. 2JKB	5a. 2JKC	5b. 2JKD	5c. 2JKF
5d. 2JKG	5e. 2JKH	6a. 2JKJ	6b. 2JKK	6c. 2JKM	6d. 2JKN	7. 2JKP	8a. 2JKQ
8b. 2JKR	8c. 2JKS	8d. 2JKT	9. 2JKV	10. 2JKW			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.3 Kwadratiese funksies EMD4H

Funksies van die vorm $y = x^2$ EMD4J

Funksies van die algemene vorm $y = ax^2 + q$ word paraboliese funksies genoem. In die vergelyking $y = ax^2 + q$ is a en q konstantes en het verskillende effekte op die parabool.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Stip 'n kwadratiese funksie

VRAAG

$y = f(x) = x^2$

Voltooi die volgende tabel $f(x) = x^2$ en stip die punte op 'n assestelsel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9						

1. Verbind die punte met 'n gladde kromme.
2. Die gebied van f is $x \in \mathbb{R}$. Bepaal die terrein.
3. Rondom watter lyn is f simmetries?
4. Bepaal die waarde van x waarvoor $f(x) = 6\frac{1}{4}$. Bevestig jou antwoord grafies.
5. Waar sny die grafiek die asse?

OPLOSSING

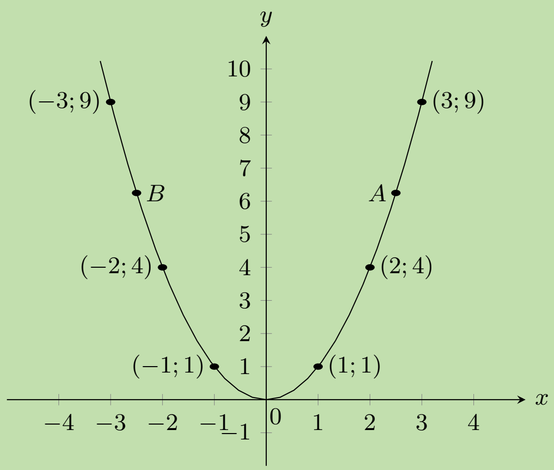
Stap 1: Vervang waardes in die vergelyking

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(-3) &= (-3)^2 = 9 \\
f(-2) &= (-2)^2 = 4 \\
f(-1) &= (-1)^2 = 1 \\
f(0) &= (0)^2 = 0 \\
f(1) &= (1)^2 = 1 \\
f(2) &= (2)^2 = 4 \\
f(3) &= (3)^2 = 9
\end{aligned}
$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	0	4	9

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme.

Vanaf die tabel kry ons die volgende punte: $(-3;9), (-2;4), (-1;1), (0;0), (1;1), (2;4), (3;9)$



Stap 3: Bepaal die gebied en terrein

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Vanaf die grafiek sien ons dat vir alle waardes van x, $y \geq 0$.

Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

Stap 4: Vind die as van simmetrie
f is simmetries rondom die y-as. Dus is die as van simmetrie van f die lyn $x = 0$.

Stap 5: Bepaal die x-waarde waarvoor $f(x) = 6\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{25}{4} \\ \therefore \frac{25}{4} &= x^2 \\ x &= \pm\frac{5}{2} \\ &= \pm 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sien punte A en B op die grafiek.

Stap 6: Bepaal die afsnit
Die funksie f sny die asse by die oorsprong $(0;0)$.

Ons sien dat as die waarde van x toeneem van $-\infty$ tot 0, neem $f(x)$ af.

By die $(0;0)$, $f(x) = 0$.

As die waarde van x toeneem van 0 tot ∞, sal $f(x)$ toeneem.

Funksies van die vorm $y = ax^2 + q$ EMD4K

Ondersoek: Die effek van a en q op 'n parabool.

Voltooi die tabel en stip die volgende grafieke op dieselfde assestelsel:

1. $y_1 = x^2 - 2$
2. $y_2 = x^2 - 1$
3. $y_3 = x^2$
4. $y_4 = x^2 + 1$
5. $y_5 = x^2 + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y_1					
y_2					
y_3					
y_4					
y_5					

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Voltooi die tabel en stip die volgende grafieke op dieselfde assestelsel:

1. $y_6 = -2x^2$
2. $y_7 = -x^2$
3. $y_8 = x^2$
4. $y_9 = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y_6					
y_7					
y_8					
y_9					

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

Die effek van q

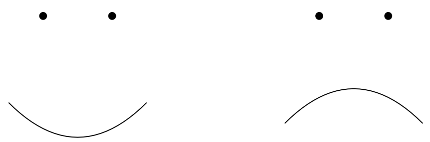
Die effek van q word 'n vertikale skuif genoem omdat alle punte oor dieselfde afstand en in dieselfde rigting beweeg (dit skuif die totale grafiek op of af).

- Vir $q > 0$, word die grafiek van $f(x)$ opwaarts geskuif met q eenhede. Die draaipunt van $f(x)$ is bokant die y-as.
- Vir $q < 0$, word die grafiek van $f(x)$ vertikaal afgeskuif met q eenhede. Die draaipunt van $f(x)$ is onder die y-as.

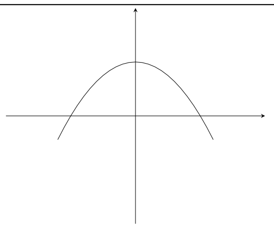
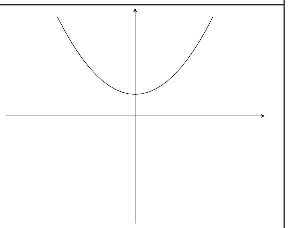
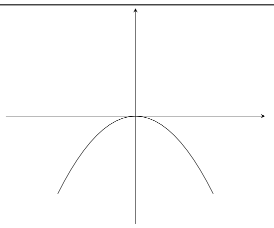
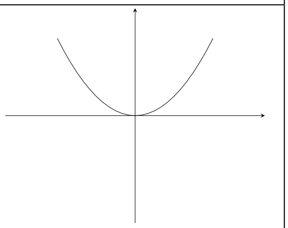
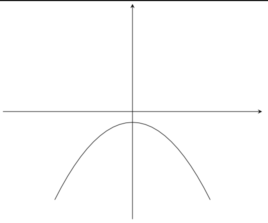
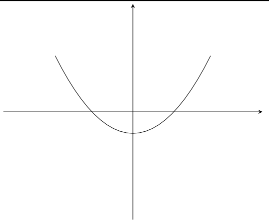
Die effek van a

Die teken van a bepaal die vorm van die grafiek.

- Vir $a > 0$, is die grafiek van $f(x)$ 'n "glimlag" en het dit 'n minimum draaipunt by $(0; q)$. Die grafiek van $f(x)$ word vertikaal opwaarts gestrek; soos a groter word, word die grafiek nouer.
  Vir $0 < a < 1$, soos a al ander kom aan 0, word die grafiek van $f(x)$ wyer.
- Vir $a < 0$, is die grafiek van $f(x)$ 'n "frons" en het dit 'n maksimum draaipunt by $(0; q)$. Die grafiek van $f(x)$ word vertikaal afwaarts gestrek; soos a kleiner word, word die grafiek nouer.
  Vir $-1 < a < 0$, soos a al ander kom aan 0, word die grafiek van $f(x)$ wyer.



$a > 0$ ('n positiewe glimlag) $a < 0$ ('n negatiewe frons)

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Tabel 6.2: Die effek van a en q op 'n parabool.

BESOEK:
Jy kan hierdie Phet simulation gebruik om jou te help om die invloed te sien van die verandering van a en q op 'n parabool.

Die standaardvorm van die vergelyking van 'n parabool is $y = ax^2 + q$.

Gebied en terrein

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde is waarvoor $f(x)$ ongedefinieer is nie.

As $a > 0$ dan het ons:

$$\begin{array}{rcll} x^2 & \geq & 0 & \text{(Volkome vierkant is altyd positief)} \\ ax^2 & \geq & 0 & \text{(omdat } a > 0\text{)} \\ ax^2 + q & \geq & q & \text{(tel } q \text{ beide kante by)} \\ \therefore f(x) & \geq & q & \end{array}$$

Dus as $a > 0$, is die terrein $[q; \infty)$. Soortgelyk, as $a < 0$ dan is die terrein $(-\infty; q]$.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Gebied en terrein van 'n parabool

VRAAG

As $g(x) = x^2 + 2$, bepaal die gebied en die terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebied

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde is waarvoor $g(x)$ ongedefinieer is nie.

Stap 2: Bepaal die terrein

Die terrein van $g(x)$ kan as volg bereken word:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ x^2 + 2 &\geq 2 \\ g(x) &\geq 2 \end{aligned}$$

Dus die terrein is $\{g(x) : g(x) \geq 2\}$.

Afsnitte

Die y-afsnit:

Elke punt op die y-as het 'n x-koördinaat van 0, dus, om die y-afsnit te bereken, stel $x = 0$.

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = x^2 + 2$ word gegee deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2 \\ g(0) &= 0^2 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 2)$.

Die x-afsnitte:

Elke punt op die x-as het 'n y-koördinaat van 0, dus, om die x-afsnit te bereken, stel $y = 0$.

Byvoorbeeld, die x-afsnitte van $g(x) = x^2 + 2$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2 \\ 0 &= x^2 + 2 \\ -2 &= x^2 \end{aligned}$$

Daar is geen reële oplossings nie, dus die grafiek van $g(x) = x^2 + 2$ het geen x-afsnitte nie.

Draaipunte

Die draaipunt van die funksie van die vorm $f(x) = ax^2 + q$ word bepaal deur die terrein van die funksie te ondersoek.

- As $a > 0$, is die grafiek van $f(x)$ 'n "glimlag" en het dit 'n minimum draaipunt by $(0; q)$.
- As $a < 0$, is die grafiek van $f(x)$ 'n "frons" en het dit 'n maksimum draaipunt by $(0; q)$.

Asse van simmetrie

Die as van simmetrie vir funksies van die vorm $f(x) = ax^2 + q$ is die y-as, wat die lyn $x = 0$ is.

Skets grafieke van die vorm $y = ax^2 + q$ EMD4N

Ten einde grafieke te teken van die vorm $f(x) = ax^2 + q$, moet ons die volgende eienskappe bepaal:

1. teken van a
2. y-afsnit
3. x-afsnit
4. draaipunt

Uitgewerkte voorbeeld 6: Skets 'n parabool

VRAAG

Skets die grafiek van $y = 2x^2 - 4$. Merk die afsnitte en draaipunt.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking
Ons let op dat $a > 0$. Dus is die grafiek 'n "glimlag" en het 'n minimum draaipunt.

Stap 2: Bereken die afsnitte
Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4 \\ &= 2(0)^2 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -4)$.

Vir die x-afsnitte, stel $y = 0$:

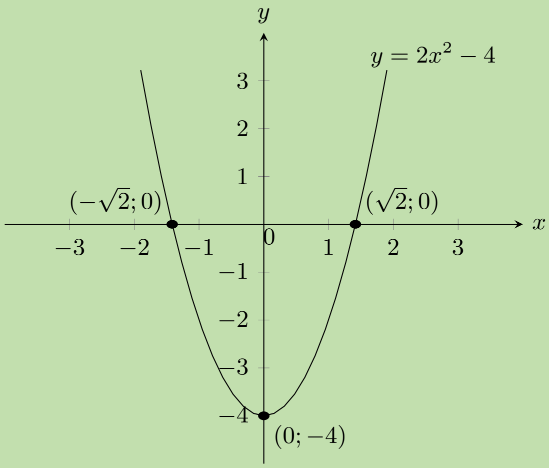
$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4 \\ 0 &= 2x^2 - 4 \\ x^2 &= 2 \\ \therefore x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-\sqrt{2}; 0)$ en $(\sqrt{2}; 0)$.

Stap 3: Bepaal die draaipunt

Vir die standaardvorm van die vergelyking sien ons dat die draaipunt $(0; -4)$ is.

Stap 4: Stip die punte en skets die grafiek



Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y \geq -4, y \in \mathbb{R}\}$

Die as van simmetrie is die lyn $x = 0$.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Skets 'n parabool

VRAAG

Skets die grafiek van $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$. Merk die afsnitte en die draaipunt.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Ons let op dat $a < 0$. Dus is die grafiek 'n "frons" en het 'n maksimum draaipunt.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 3 \\ g(0) &= -\frac{1}{2}(0)^2 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -3)$.

Vir die x-afsnitte, stel $y = 0$:

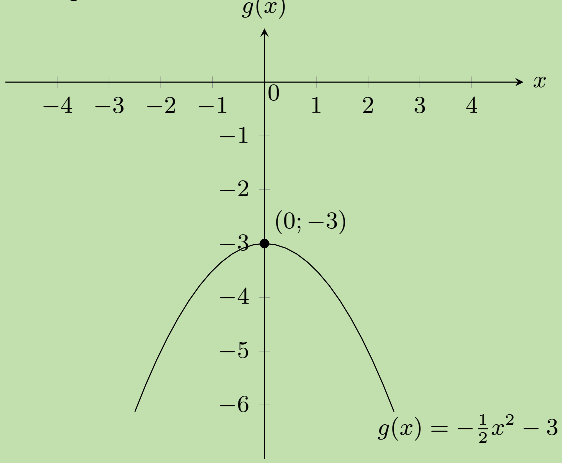
$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x^2 - 3 \\ 3 &= -\frac{1}{2}x^2 \\ -2(3) &= x^2 \\ -6 &= x^2 \end{aligned}$$

Daar is nie 'n reële oplossing nie, dus daar is nie x-afsnitte nie.

Stap 3: Bepaal die draaipunt

Vir die standaardvorm van die vergelyking sien ons dat die draaipunt $(0; -3)$ is.

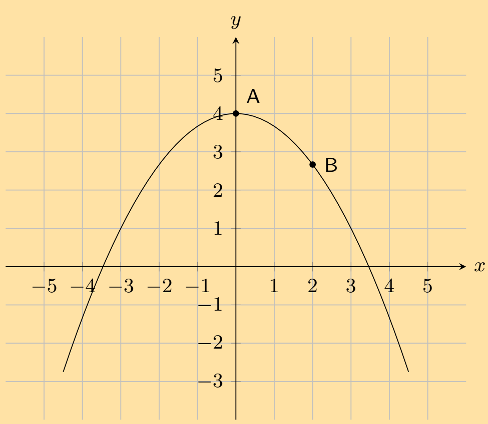
Stap 4: Stip die punte en skets die grafiek



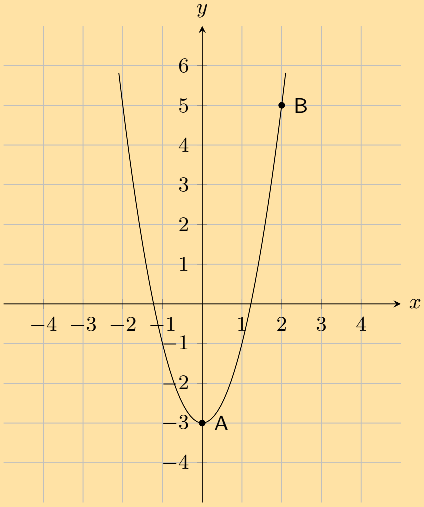
Gebied: $x \in \mathbb{R}$. Terrein: $y \in (-\infty; -3]$. Die as van simmetrie is die lyn $x = 0$.

Oefening 6 – 3:

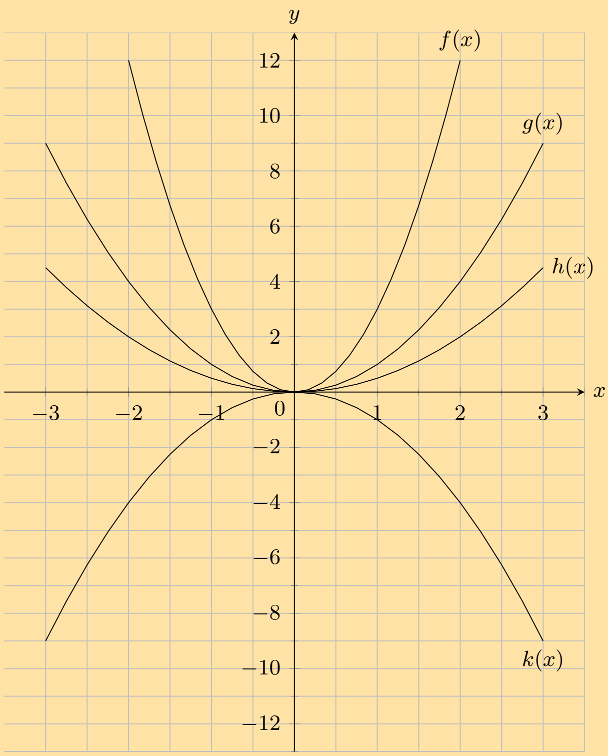
1. Die grafiek hieronder toon 'n kwadratiese funksie met die volgende vorm: $y = ax^2 + q$. Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, by $(0; 4)$, en **Punt B** is by $\left(2; \frac{8}{3}\right)$. Bereken die waardes van a en q.



2. Die grafiek hieronder toon 'n kwadratiese funksie met die volgende vorm: $y = ax^2 + q$.
Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, by $(0; -3)$, en **Punt B** is by $(2; 5)$. Bereken die waardes van a en q.

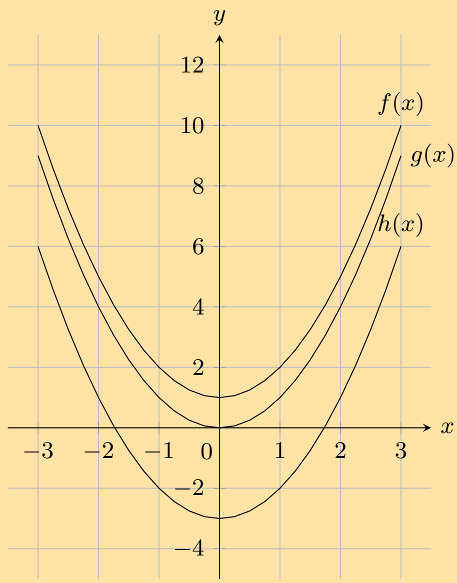


3. Gegewe die volgende vergelyking: $y = 5x^2 - 2$
   a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.
   b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
4. Gegewe die volgende vergelyking: $y = -2x^2 + 1$
   a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.
   b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



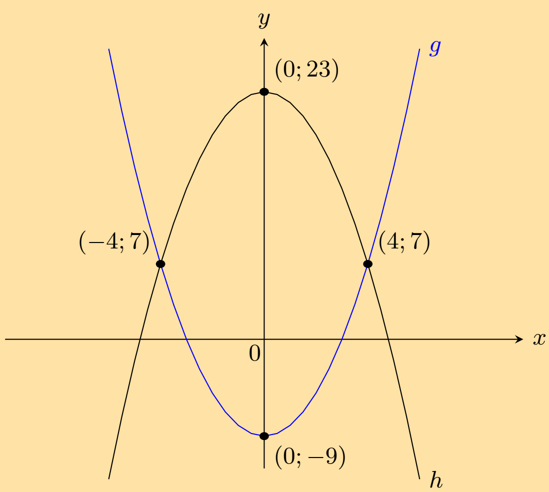
a) $y = 0{,}5x^2$ b) $y = x^2$ c) $y = 3x^2$ d) $y = -x^2$

6. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = x^2 - 3$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x^2$

7. Twee parabole is geteken: $g : y = ax^2 + p$ en $h : y = bx^2 + q$.



   a) Vind die waardes van a en p.
   b) Vind die waardes van b en q.
   c) Vind die waardes van x waarvoor $g(x) \geq h(x)$.
   d) Vir watter waardes van x is g toenemend?

8. Toon aan dat as $a < 0$ is die terrein van $f(x) = ax^2 + q$ gelyk aan $\{f(x) : f(x) \leq q\}$.
9. Teken die grafiek van die funksie $y = -x^2 + 4$ en toon alle afsnitte met die asse.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JKX 2. 2JKY 3. 2JKZ 4. 2JM2 5. 2JM3 6. 2JM4
7. 2JM5 8. 2JM6 9. 2JM7

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.4 Hiperboliese funksies EMD4P

Funksies van die vorm $y = \frac{1}{x}$ EMD4Q

Funksies met die algemene vorm $y = \dfrac{a}{x} + q$ word hiperboliese funksies genoem.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Teken die hiperboliese funksie

VRAAG

$$y = h\left(x\right) = \frac{1}{x}$$

Voltooi die volgende tabel $h\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$ en stip die punte op 'n assestelsel.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h\left(x\right)$	$-\frac{1}{3}$										

1. Verbind die punte met gladde krommes.
2. Wat gebeur as $x = 0$?
3. Verduidelik hoekom die grafiek uit twee aparte krommes bestaan.
4. Wat gebeur met $h(x)$ as die waarde van x baie klein of baie groot word?
5. Die gebied van $h(x)$ is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$. Bepaal die terrein.
6. Rondom watter twee lyne is die grafiek simmetries?

OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes in die vergelyking

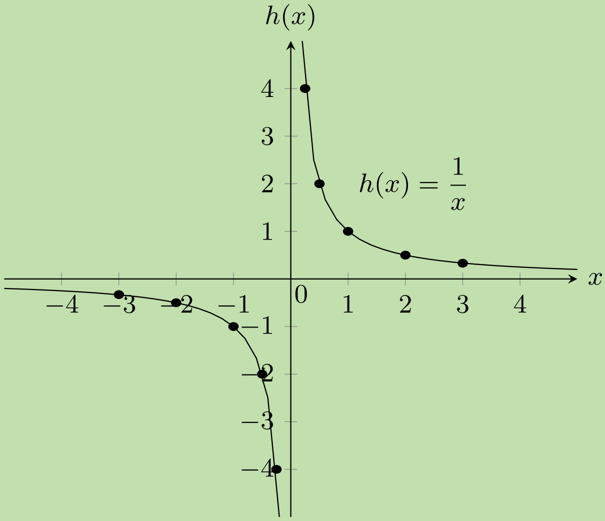
$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{x} \\
h(-3) &= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \\
h(-2) &= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \\
h(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\
h\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \\
h\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \\
h(0) &= \frac{1}{0} = \text{ongedefinieerd}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \\
h\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \\
h(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\
h(2) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
h(3) &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	ongedefinieerd	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met twee gladde krommes

Vanaf die tabel kry ons die volgende punte: $\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, $(-1;-1)$, $\left(-\frac{1}{2};-2\right)$, $\left(-\frac{1}{4};-4\right)$, $\left(\frac{1}{4};4\right)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$, $(1;1)$, $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(3;\frac{1}{3}\right)$



Vir $x = 0$ is die funksie h ongedefinieer. Dit word 'n diskontinuïteit by $x = 0$ genoem.

$y = h(x) = \frac{1}{x}$, dus kan ons skryf dat $x \times y = 1$. Aangesien die produk van twee positiewe getalle **en** die produk van twee negatiewe getalle gelyk kan wees aan 1, lê die grafiek in die eerste en derde kwadrante.

Stap 3: Bepaal die asimptote

As die waarde van x groter word, kom die waarde van $h(x)$ al nader aan, maar word nooit gelyk aan 0 nie. Dit is 'n horisontale asimptoot, die lyn $y = 0$. Dieselfde gebeur in die derde kwadrant; as x kleiner word, kom $h(x)$ ook asimptotaal nader aan die negatiewe x-as.

Ons let ook op dat daar 'n vertikale asimptoot is, die lyn $x = 0$; soos x nader kom aan 0, sal $h(x)$ die y-as asimptotaal nader.

Stap 4: Bepaal die terrein

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Van die grafiek sien ons dat y gedefinieer is vir alle waardes behalwe 0.

Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

Stap 5: Bepaal die asse van simmetrie

Die grafiek van $h(x)$ het twee asse van simmetrie: die lyne $y = x$ en $y = -x$. Een helfte van die hiperbool is die spieëlbeeld van die ander helfte rondom hierdie twee lyne.

Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ EMD4R

Ondersoek: Die invloed van a en q op 'n hiperbool.

Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

1. $y_1 = \frac{1}{x} - 2$
2. $y_2 = \frac{1}{x} - 1$
3. $y_3 = \frac{1}{x}$
4. $y_4 = \frac{1}{x} + 1$
5. $y_5 = \frac{1}{x} + 2$

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

1. $y_6 = \frac{-2}{x}$
2. $y_7 = \frac{-1}{x}$
3. $y_8 = \frac{1}{x}$
4. $y_9 = \frac{2}{x}$

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

Die effek van q

Die effek van q word 'n vertikale skuif genoem omdat alle punte oor dieselfde afstand en in dieselfde rigting beweeg (dit skuif die totale grafiek op of af).

- Vir $q > 0$, word die grafiek van $f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
- Vir $q < 0$, word die grafiek van $f(x)$ vertikaal af geskuif met q eenhede.

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$ en die vertikale asimptoot is altyd die y-as, die lyn $x = 0$.

Die effek van a

Die teken van a bepaal die vorm van die grafiek.

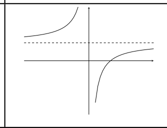
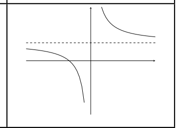
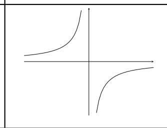
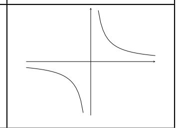
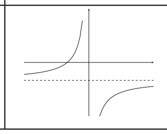
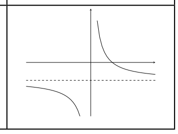
- As $a > 0$, lê die grafiek van $f(x)$ in die eerste en derde kwadrante.

  Vir $a > 1$, sal die grafiek van $f(x)$ verder weg lê van die asse as $y = \frac{1}{x}$.

  Vir $0 < a < 1$, soos a neig na 0, beweeg die grafiek nader aan die asse as $y = \frac{1}{x}$.
- As $a < 0$, lê die grafiek van $f(x)$ in die tweede en vierde kwadrante.

  Vir $a < -1$, sal die grafiek van $f(x)$ verder weg lê van die asse as $y = -\frac{1}{x}$.

  Vir $-1 < a < 0$, soos a neig na 0, beweeg die grafiek nader aan die asse as $y = -\frac{1}{x}$.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Tabel 6.3: Die invloed van a en q op 'n hiperbool.

Ontdek die eienskappe

EMD4S

Die standaardvorm van die hiperbool is die vergelyking $y = \frac{a}{x} + q$.

Gebied en terrein

Vir $y = \frac{a}{x} + q$, is die funksie ongedefinieerd vir $x = 0$. Die gebied is dus $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

Ons sien dat $y = \frac{a}{x} + q$ geskryf kan word as:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{a}{x} + q \\
y - q &= \frac{a}{x} \\
\text{As } x \neq 0 \text{ dan is: } \quad (y - q)\,x &= a \\
x &= \frac{a}{y - q}
\end{aligned}
$$

Dit toon dat die funksie slegs ongedefinieerd is by $y = q$.

Dus is die terrein $\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}, f(x) \neq q\}$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Gebied en terrein van 'n hiperbool

VRAAG

As $g(x) = \frac{2}{x} + 2$, bepaal die gebied en die terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebied
Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ omdat $g(x)$ slegs ongedefineerd is by $x = 0$.

Stap 2: Bepaal die terrein
Ons sien dat $g(x)$ slegs ongedefinieerd is by $y = 2$. Dus is die terrein $\{g(x) : g(x) \in \mathbb{R}, g(x) \neq 2\}$

Afsnitte

Die y-afsnit:

Elke punt op die y-as het 'n x-koördinaat van 0, dus, om die y-afsnit te bereken, stel $x = 0$.

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x} + 2$ word gegee deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} + 2 \\ y &= \frac{2}{0} + 2 \end{aligned}$$

wat ongedefinieerd is, dus is daar geen y-afsnit.

Die x-afsnit:

Elke punt op die x-as het 'n y-koördinaat van 0; dus om die x-afsnit te bereken, stel $y = 0$.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x} + 2$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} + 2 \\ 0 &= \frac{2}{x} + 2 \\ \frac{2}{x} &= -2 \\ x &= \frac{2}{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-1; 0)$.

Asimptote

Daar is twee asimptote vir funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$.

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$ en die vertikale asimptoot is altyd die y-as, die lyn $x = 0$.

Asse van simmetrie

Daar is twee lyne ten opsigte waarvan hiperbole simmetries is: $y = x + q$ en $y = -x + q$.

Skets grafieke van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ EMD4T

Ten einde grafieke te teken van funksies van die vorm, $y = f(x) = \frac{a}{x} + q$, moet ons vier eienskappe bepaal:

1. teken van a
2. y-afsnit
3. x-afsnit
4. asimptote

Uitgewerkte voorbeeld 10: Skets 'n hiperbool

VRAAG

Skets die grafiek van $g(x) = \frac{2}{x} + 2$. Merk die as-afsnitte en die asimptote.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Ons let op dat $a > 0$ en dus lê die grafiek van $g(x)$ in die eerste en die derde kwadrante.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x} + 2 \\ g(0) &= \frac{2}{0} + 2 \end{aligned}$$

Dit is ongedefineerd, dus is daar geen y-afsnit.

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

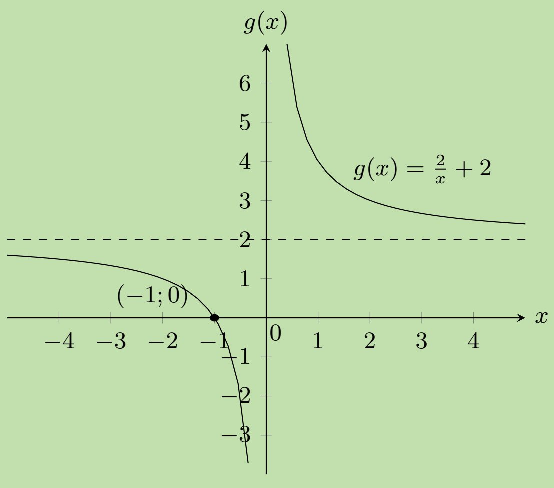
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x} + 2 \\ 0 &= \frac{2}{x} + 2 \\ \frac{2}{x} &= -2 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-1; 0)$.

Stap 3: Bepaal die asimptote

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = 2$. Die vertikale asimptoot is die lyn $x = 0$.

Stap 4: Skets die grafiek



Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

Uitgewerkte voorbeeld 11: Skets 'n hiperbool

VRAAG

Skets die grafiek van $y = \frac{-4}{x} + 7$.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Ons sien dat $a < 0$, dus lê die grafiek in die tweede en vierde kwadrante.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-4}{x} + 7 \\ &= \frac{-4}{0} + 7 \end{aligned}$$

Dit is ongedefineerd, dus is daar geen y-afsnit.

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

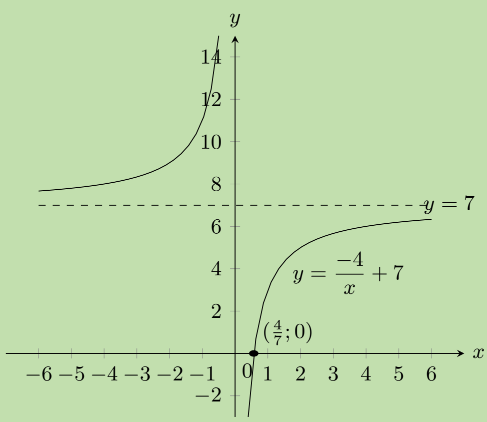
$$\begin{aligned} y &= \frac{-4}{x} + 7 \\ 0 &= \frac{-4}{x} + 7 \\ \frac{-4}{x} &= -7 \\ \therefore x &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $\left(\frac{4}{7}; 0\right)$.

Stap 3: Bepaal die asimptote

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = 7$. Die vertikale asimptoot is die lyn $x = 0$.

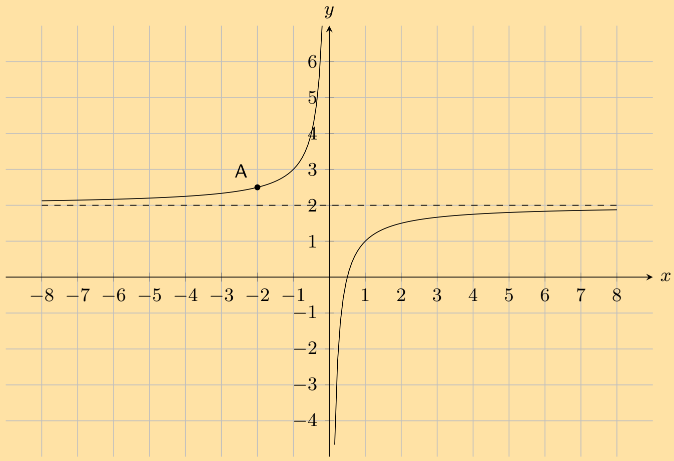
Stap 4: Skets die grafiek



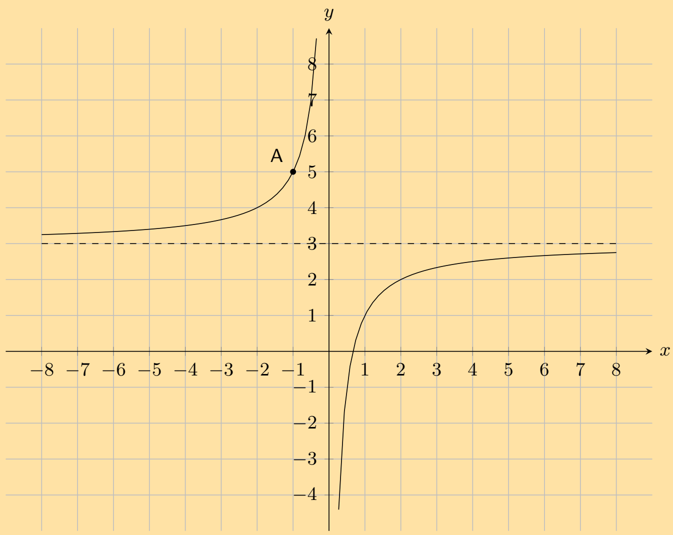
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 7\}$ Asse van simmetrie: $y = x + 7$ en $y = -x + 7$

Oefening 6 – 4:

1. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$. Bereken die waardes van a en q.



2. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $(-1; 5)$. Bereken die waardes van a en q.



3. Gegewe die volgende vergelyking:

$$y = \frac{3}{x} + 2$$

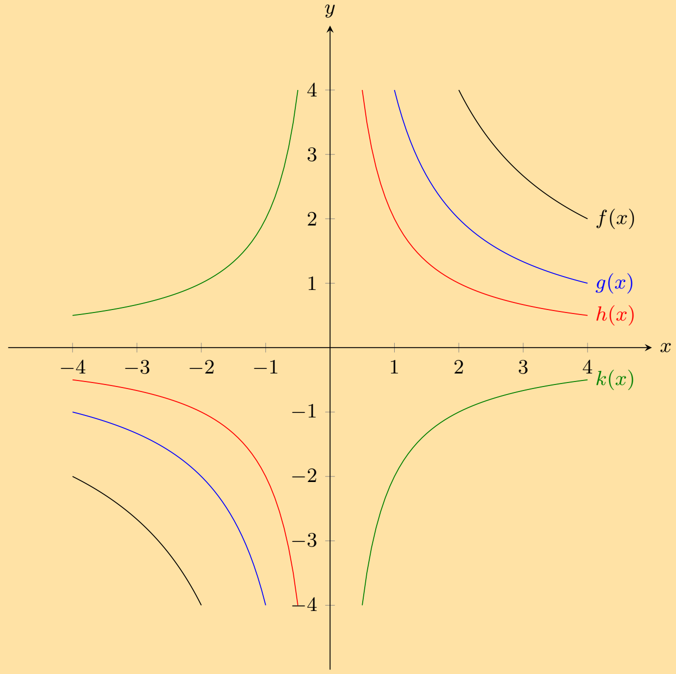
   a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.
   b) Bepaal die posisie van die x-afsnit. Gee jou antwoord as 'n breuk.

4. Gegewe die volgende vergelyking:

$$y = -\frac{2}{x} - 2$$

   a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.
   b) Bepaal die posisie van die x-afsnit.

5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{4}{x}$ c) $y = -\frac{2}{x}$ d) $y = \frac{8}{x}$

6. Gegee die funksie: $xy = -6$.

   a) Teken die grafiek.
   b) Lê die punt $(-2; 3)$ op die grafiek? Gee 'n rede vir jou antwoord.
   c) As die x-waarde van 'n punt op die grafiek 0,25 is, wat is die ooreenstemmende y-waarde?
   d) Wat gebeur met die y-waardes as die x-waardes baie groot word?
   e) Gee die vergelykings van die asimptote.
   f) Met die lyn $y = -x$ as lyn van simmetrie, watter punt is simmetries aan $(-2; 3)$?

7. Gegee die funksie: $h(x) = \frac{8}{x}$.

   a) Teken die grafiek.
   b) Hoe sal die grafiek van $g(x) = \frac{8}{x} + 3$ vergelyk met die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$? Verduidelik jou antwoord volledig.
   c) Teken die grafiek van $y = \frac{8}{x} + 3$ op dieselfde assestelsel en toon die asimptote, asse van simmetrie en die koördinate van een punt op die grafiek.

8. Skets die gegewe funksies en beskryf die transformasie wat gebruik is om die tweede funksie te verkry. Toon alle asimptote.

   a) $y = \frac{1}{x}$ en $\frac{3}{x}$ b) $y = \frac{6}{x}$ en $\frac{6}{x} - 1$ c) $y = \frac{5}{x}$ en $-\frac{5}{x}$ d) $y = \frac{1}{x}$ en $\frac{1}{2x}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JM8 2. 2JM9 3. 2JMB 4. 2JMC 5. 2JMD 6. 2JMF
7. 2JMG 8a. 2JMH 8b. 2JMJ 8c. 2JMK 8d. 2JMM

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.5 Eksponensiële funksies EMD4V

Funksies van die vorm $y = b^x$ EMD4W

Funksies van die algemene vorm $y = ab^x + q$ word eksponsiële funksies genoem. In die vergelyking, is a en q konstantes en hulle het verskillende invloede op die funksie.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Teken van 'n eksponsiële funksie

VRAAG

$y = f(x) = b^x$ vir $b > 0$ en $b \neq 1$

Voltooi die volgende tabel vir elk van die funksies en teken die grafieke op dieselfde assestelsel: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 5^x$.

	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$					
$g(x) = 3^x$					
$h(x) = 5^x$					

1. By watter punt sny hierdie grafieke?
2. Verduidelik waarom hulle nie die x-as sny nie.
3. Gee die gebied en terrein van $h(x)$.
4. Neem $h(x)$ toe of af soos x toeneem?
5. Watter van hierdie grafieke neem toe teen die stadigste tempo?
6. Vir $y = k^x$ en $k > 1$, word die kurwe van die grafiek steiler hoe groter die waarde van k word. Waar of vals?

Voltooi die volgende tabel vir elk van die funksies en trek die grafieke op dieselfde assestelsel: $F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $G(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $H(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

	-2	-1	0	1	2
$F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$					
$G(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$					
$H(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$					

1. Gee die y-afsnit vir elke funksie.
2. Beskryf die verband tussen die grafieke $f(x)$ en $F(x)$.
3. Beskryf die verband tussen die grafieke $g(x)$ en $G(x)$.
4. Gee die gebied en terrein van $H(x)$.
5. Vir $y = \left(\frac{1}{k}\right)^x$ en $k > 1$, word die kurwe van die grafiek steiler hoe groter die waarde van k word. Waar of vals?
6. Gee die vergelyking van die asimptote vir die funksies.

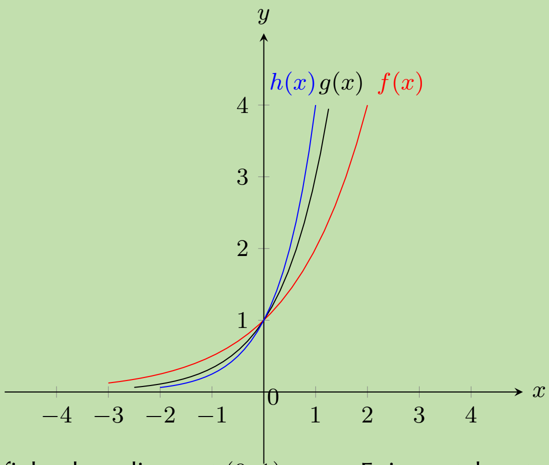
OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes in die vergelykings

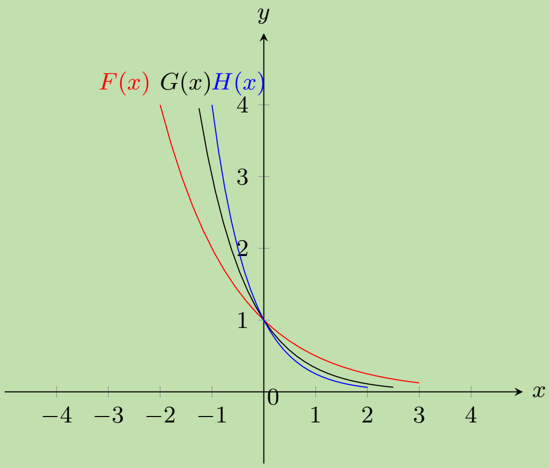
	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$h(x) = 5^x$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

	-2	-1	0	1	2
$F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$G(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$H(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



1. Ons let op dat al die grafieke deur die punt $(0;1)$ gaan. Enige getal met die eksponent 0 is gelyk aan 1.
2. Die grafieke sny nie die x-as nie, want jy kan nooit 0 kry deur enige nie-nul getal tot die mag van enige ander getal te verhoog nie.
3. Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$
4. Soos x toeneem, neem $h(x)$ toe.
5. $f(x) = 2^x$ neem toe teen die stadigste tempo omdat dit die kleinste grondtal het.
6. Waar: hoe groter die waarde van k $(k > 1)$, hoe steiler is die grafiek van $y = k^x$.



1. Die y-afsnit is die punt $(0;1)$ vir al die grafieke. Vir enige reële getal z: $z^0 = 1 \qquad z \neq 1$.
2. $F(x)$ is die refleksie van $f(x)$ om die y-as.
3. $G(x)$ is die refleksie van $g(x)$ om die y-as.
4. Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$
5. Waar: hoe groter die waarde van k $(k > 1)$, hoe steiler is die grafiek van $y = \left(\frac{1}{k}\right)^x$.
6. Die vergelyking van die horisontale asimptoot is $y = 0$, die x-as.

Ondersoek: Die invloed van a, q en b op 'n eksponensiële grafiek.

Op dieselfde stel asse, skets die volgende grafieke ($a = 1$, $q = 0$ en b verander):

1. $y_1 = 2^x$
2. $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
3. $y_3 = 6^x$
4. $y_4 = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

	-2	-1	0	1	2
$y_1 = 2^x$					
$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$					
$y_3 = 6^x$					
$y_4 = \left(\frac{1}{6}\right)^x$					

Gebruik jou resultate om die effek van b af te lei.

Op dieselfde stel asse, skets die volgende grafieke ($b = 2$, $a = 1$ en q verander):

1. $y_5 = 2^x - 2$
2. $y_6 = 2^x - 1$
3. $y_7 = 2^x$
4. $y_8 = 2^x + 1$
5. $y_9 = 2^x + 2$

	-2	-1	0	1	2
$y_5 = 2^x - 2$					
$y_6 = 2^x - 1$					
$y_7 = 2^x$					
$y_8 = 2^x + 1$					
$y_9 = 2^x + 2$					

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, skets die volgende grafieke ($b = 2$, $q = 0$ en a verander).

1. $y_{10} = 1 \times 2^x$
2. $y_{11} = 2 \times 2^x$
3. $y_{12} = -1 \times 2^x$
4. $y_{13} = -2 \times 2^x$

	-2	-1	0	1	2
$y_{10} = 1 \times 2^x$					
$y_{11} = 2 \times 2^x$					
$y_{12} = -1 \times 2^x$					
$y_{13} = -2 \times 2^x$					

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

Die effek van q

Die effek van q word 'n vertikale skuif genoem omdat alle punte oor dieselfde afstand en in dieselfde rigting beweeg (dit skuif die totale grafiek op of af).

- Vir $q > 0$, skuif die grafiek vertikaal opwaarts met q eenhede.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek vertikaal afwaarts met q eenhede.

Die horisontale asimptoot skuif q eenhede en is die lyn $y = q$.

Die effek van a

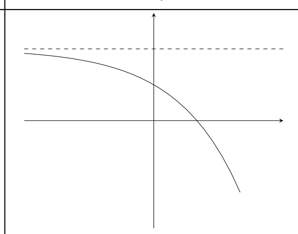
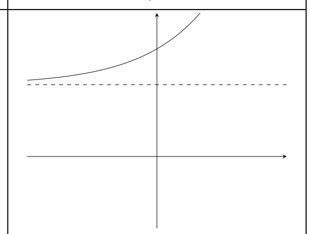
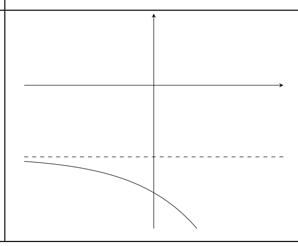
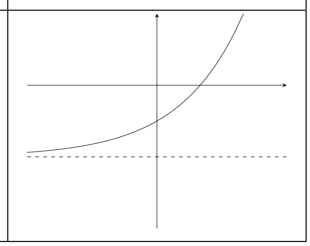
Die teken van a bepaal of die grafiek opwaarts of afwaarts buig.

Vir $0 < b < 1$:

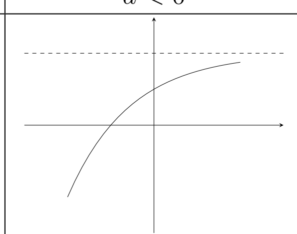
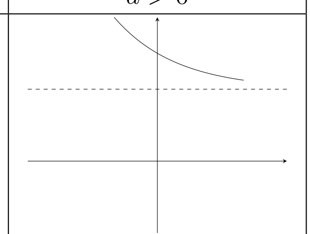
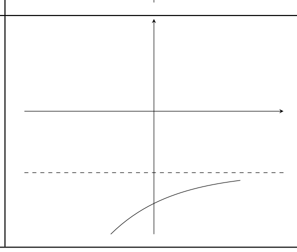
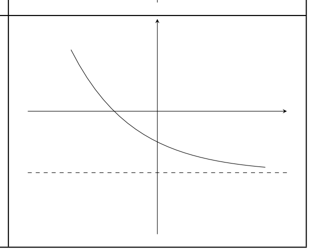
- Vir $a > 0$, buig die kromme afwaarts. Dit reflekteer die grafiek in die horisontale asimptoot.
- Vir $a < 0$, buig die kromme opwaarts.

Vir $b > 1$:

- Vir $a > 0$, buig die kromme opwaarts.
- Vir $a < 0$, buig die kromme afwaarts. Dit reflekteer die grafiek in die horisontale asimptoot.

$b > 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

Tabel 6.4: Die invloed van a en q op 'n eksponensiële grafiek as $b > 1$.

$0 < b < 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

Tabel 6.5: Die invloed van a en q op 'n eksponensiële grafiek as $0 < b < 1$.

Die standaardvorm van die eksponsiële funksie is $y = ab^x + q$.

Gebied en terrein

Vir $y = ab^x + q$, is die funksie gedefinieer vir alle reële waardes van x. Dus is die gebied $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Die terrein van $y = ab^x + q$ is afhanklik van die teken van a.

Vir $a > 0$:

$$\begin{aligned} b^x &> 0 \\ ab^x &> 0 \\ ab^x + q &> q \\ f(x) &> q \end{aligned}$$

Dus, vir $a > 0$ is die terrein $\{f(x) : f(x) > q\}$.

Vir $a < 0$:

$$\begin{aligned} b^x &> 0 \\ ab^x &< 0 \\ ab^x + q &< q \\ f(x) &< q \end{aligned}$$

Dus, vir $a < 0$ is die terrein $\{f(x) : f(x) < q\}$.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Gebied en terrein van 'n eksponsiële funksie

VRAAG

Vind die gebied en terrein van $g(x) = 5 \ . \ 2^x + 1$

OPLOSSING

Stap 1: Vind die gebied
Die gebied van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Stap 2: Vind die terrein

$$\begin{aligned} 2^x &> 0 \\ 5 \times 2^x &> 0 \\ 5 \times 2^x + 1 &> 1 \end{aligned}$$

Dus is die terrein $\{g(x) : g(x) > 1\}$.

Afsnitte

Die y-afsnit.

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= ab^x + q \\ &= ab^0 + q \\ &= a(1) + q \\ &= a + q \end{aligned}$$

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ word gegee deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= 5 \times 2^x + 1 \\ &= 5 \times 2^0 + 1 \\ &= 5 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 6)$.

Die x-afsnit:

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= 5 \times 2^x + 1 \\ 0 &= 5 \times 2^x + 1 \\ -1 &= 5 \times 2^x \\ 2^x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Daar is geen reële oplossing nie. Dus, die grafiek van $g(x)$ het geen x-afsnitte nie.

Asimptote

Eksponensiële funksies van die vorm $y = ab^x + q$ het 'n enkele horisontale asimptoot, die lyn $x = q$.

Skets grafieke van die vorm $y = ab^x + q$ EMD4Z

Ten einde grafieke te teken van funksies van die vorm, $y = ab^x + q$, moet ons vier eienskappe bepaal:

1. teken van a
2. y-afsnit
3. x-afsnit
4. asimptoot

BESOEK:
Die volgende video toon sommige voorbeelde van die sketsing van eksponensiële funksies.
Sien video: 2JMN at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 14: Skets 'n eksponensiële funksie

VRAAG

Skets die grafiek van $g(x) = 3 \times 2^x + 2$. Merk die as-afsnit en die asimptoot.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Van die vergelyking sien ons dat $a > 1$, dus die grafiek buig opwaarts. $q > 0$, dus die grafiek word vertikaal opwaarts geskuif met 2 eenhede.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 2^x + 2 \\ &= 3 \times 2^0 + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 5)$.

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

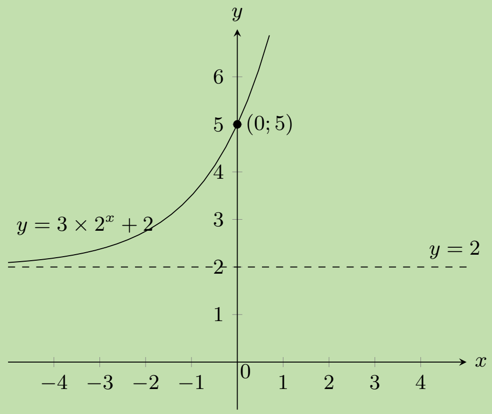
$$\begin{aligned} y &= 3 \times 2^x + 2 \\ 0 &= 3 \times 2^x + 2 \\ -2 &= 3 \times 2^x \\ 2^x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Daar is geen reële oplossing nie, dus daar is geen x-afsnit nie.

Stap 3: Bepaal die asimptoot

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = 2$.

Stap 4: Stip die punte en skets die grafiek



Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ Terrein: $\{g(x) : g(x) > 2\}$

Let daarop dat eksponensiële funksies geen as van simmetrie het nie.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Skets 'n eksponensiële grafiek

VRAAG

Skets die grafiek van $y = -2 \times 3^x + 6$

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Van die vergelyking sien ons dat $a < 0$ en dus buig die kromme afwaarts. $q > 0$ en dus word die grafiek vertikaal opwaarts geskuif met 6 eenhede.

Stap 2: Bereken die afsnitte

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -2 \times 3^x + 6 \\ &= -2 \times 3^0 + 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 4)$.

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

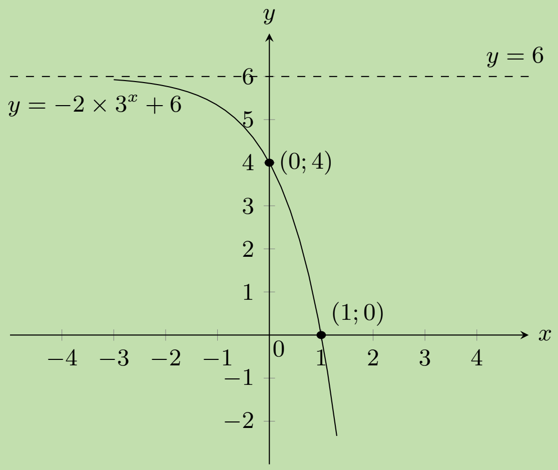
$$\begin{aligned} y &= -2 \times 3^x + 6 \\ 0 &= -2 \times 3^x + 6 \\ -6 &= -2 \times 3^x \\ 3^1 &= 3^x \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(1; 0)$.

Stap 3: Bepaal die asimptoot

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = 6$.

Stap 4: Stip die punte en skets die grafiek

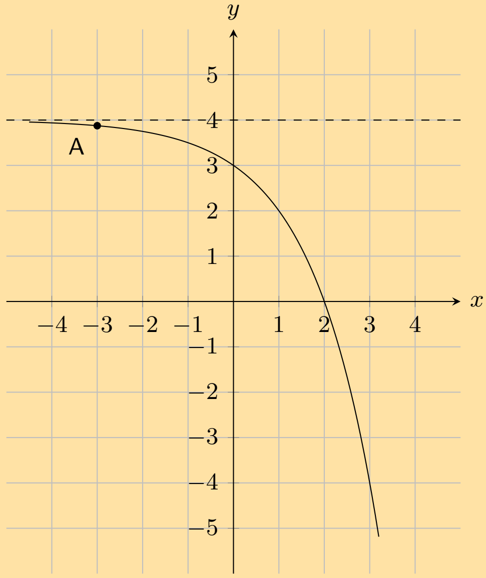


Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

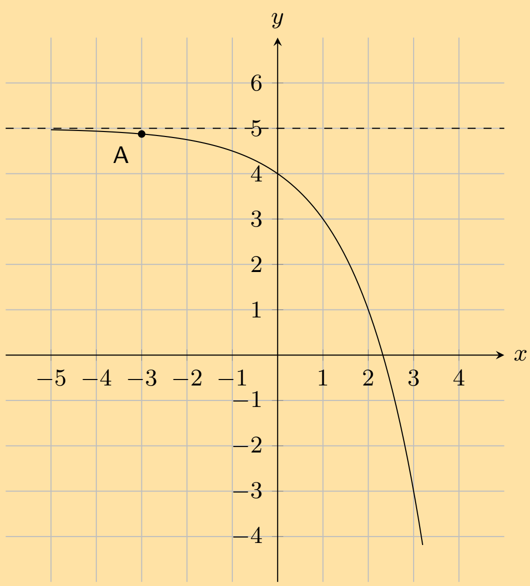
Terrein: $\{g(x) : g(x) < 6\}$

Oefening 6 – 5:

1. Gegewe die volgende vergelyking: $y = -\frac{2}{3}.(3)^x + 1$
   a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
   b) Bereken nou die x-afsnit. Benader jou antwoord tot een desimale plek indien nodig.
2. Die grafiek toon die eksponsiële funksie met die vergelyking $y = a\ .\ 2^x + q$. Een punt op die kromme word gegee: **Punt A** is by $(-3; 3{,}875)$. Bepaal die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.

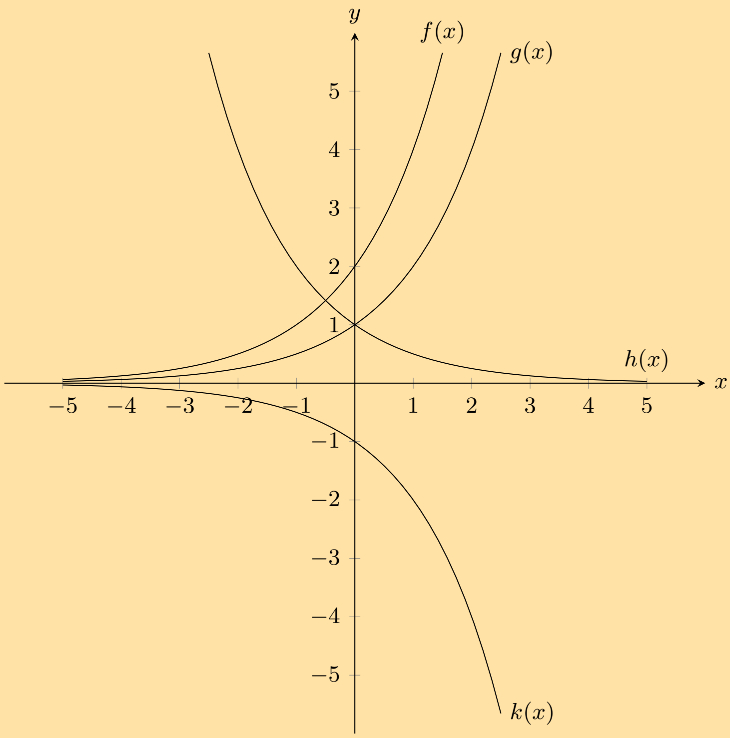


3. Hieronder sien jy 'n grafiek van die eksponensiële funksie met die vergelyking $y = a\ .\ 2^x + q$. Een punt op die kromme is gegee: **Punt A** is by $(-3; 4{,}875)$. Bereken die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.



4. Gegewe die volgende vergelyking:
   $y = \frac{1}{4}\ .\ (4)^x - 1$
   a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
   b) Bereken nou die x-afsnit.

5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:

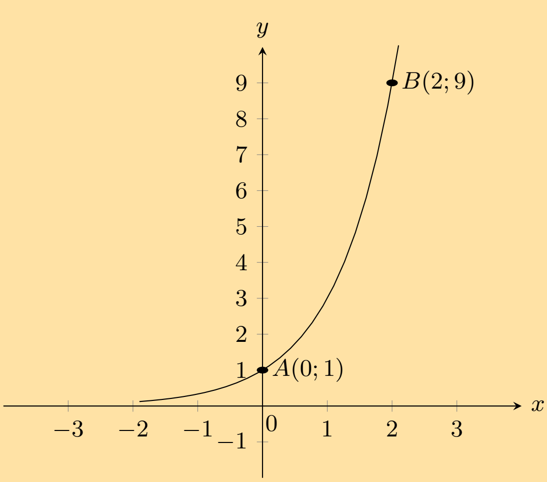


a) $y = 2^x$
b) $y = -2^x$
c) $y = 2 \cdot 2^x$
d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Gegee die funksies $y = 2^x$ en $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Teken die grafieke op dieselfde assestelsel.
b) Is die x-as 'n asimptoot of 'n as van simmetrie vir beide grafieke? Verduidelik jou antwoord.
c) Watter grafiek word verteenwoordig deur die vergelyking $y = 2^{-x}$? Verduidelik jou antwoord.
d) Los die vergelyking $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafies op en kontroleer deur substitusie of jou antwoord reg is.

7. In die bygaande diagram, sien ons die kromme van die eksponensiële funksie f sny die y-as by die punt $A(0; 1)$ en gaan deur die punt $B(2; 9)$.



a) Bepaal die vergelyking van die funksie f.

b) Bepaal die vergelyking van funksie $h(x)$, die refleksie van $f(x)$ in die x-as.

c) Bepaal die terrein van $h(x)$.

d) Bepaal die vergelyking van funksie $g(x)$, die refleksie van $f(x)$ in die y-as.

e) Bepaal die vergelyking van die funksie $j(x)$ as $j(x)$ 'n vertikale strekking is van $f(x)$ met $+2$ eenhede.

f) Bepaal die vergelyking van die funksie $k(x)$ as $k(x)$ 'n vertikale skuif is van $f(x)$ met -3 eenhede.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JMP 2. 2JMQ 3. 2JMR 4. 2JMS 5. 2JMT 6. 2JMV 7. 2JMW

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.6 Trigonometriese funksies EMD52

Hierdie afdeling beskryf die grafieke van trigonometriese funksies.

Sinusfunksie EMD53

Funksies van die vorm $y = \sin\theta$ EMD54

Uitgewerkte voorbeeld 16: Teken van 'n sinusgrafiek

VRAAG

$y = f(\theta) = \sin\theta \quad [0° \leq \theta \leq 360°]$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi.

Kies 'n toepaslike skaal en stip die waardes van θ op die x-as en van $\sin\theta$ op die y-as. Rond antwoorde af tot 2 desimale plekke.

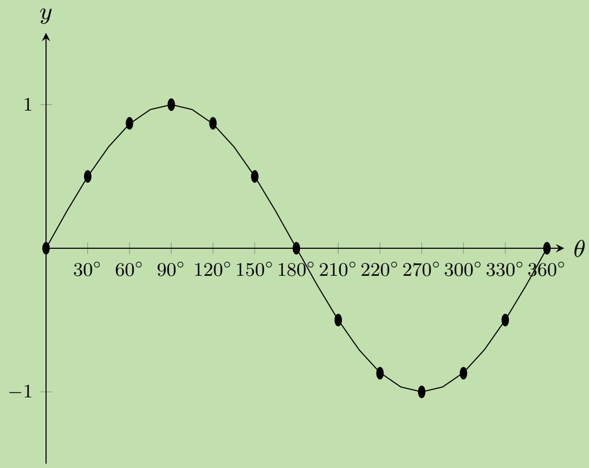
θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$\sin\theta$													

OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes vir θ

θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$\sin\theta$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	$-0,5$	$-0,87$	-1	$-0,87$	$-0,5$	0

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme.



Let op die golf-vorm van die grafiek. Elke volledige golf neem $360°$ om te voltooi. Dit word die periode genoem. Die hoogte van die golf bo en onder die x-as word die grafiek se amplitude genoem. Die maksimumwaarde van $y = \sin\theta$ is 1 en die minimumwaarde is -1.

Gebied: $[0°; 360°]$ Terrein: $[-1; 1]$ x-afsnitte: $(0°; 0)$, $(180°; 0)$, $(360°; 0)$ y-afsnit: $(0°; 0)$ Maksimum draaipunt: $(90°; 1)$ Minimum draaipunt: $(270°; -1)$

Funksies van die vorm $y = a\sin\theta + q$ EMD55

Ondersoek: Die invloed van a en q op 'n sinusgrafiek

In die vergelyking, $y = a\sin\theta + q$, is a en q konstantes met verskillende invloede op die grafiek. Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_1 = \sin\theta - 2$
2. $y_2 = \sin\theta - 1$
3. $y_3 = \sin\theta$
4. $y_4 = \sin\theta + 1$
5. $y_5 = \sin\theta + 2$

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_6 = -2\sin\theta$
2. $y_7 = -\sin\theta$
3. $y_8 = \sin\theta$
4. $y_9 = 2\sin\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

Die effek van q

Die invloed van q word 'n vertikale skuif genoem omdat die hele sinuskurwe op- of afskuif met q eenhede.

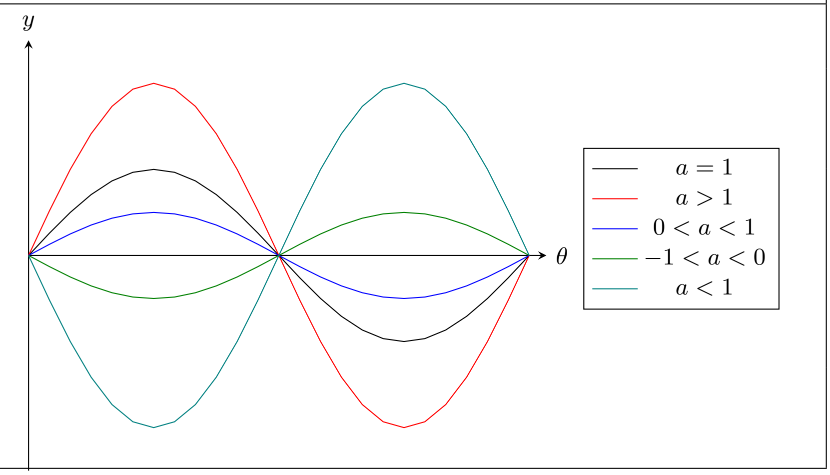
- Vir $q > 0$, skuif die grafiek vertikaal opwaarts met q eenhede.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek vertikaal afwaarts met q eenhede.

Die effek van a

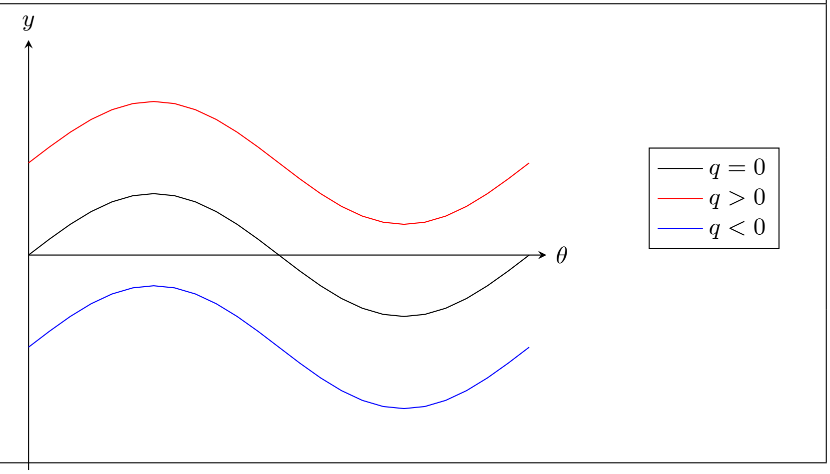
Die waarde van a beïnvloed die amplitude van die grafiek; die hoogte van die pieke en die diepte van die trôe.

- Vir $a > 1$, is daar 'n vertikale strekking en die amplitude neem toe.
  Vir $0 < a < 1$, neem die amplitude af
- Vir $a < 0$, is daar 'n refleksie rondom die x-as.
  Vir $-1 < a < 0$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die amplitude verminder.
  Vir $a < -1$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die amplitude word groter.

Let daarop dat amplitude altyd positief is.

Invloed van a	
$a > 1$: vertikale strekking, amplitude neem toe	
$a = 1$: basiese sinusgrafiek	
$0 < a < 1$: vertikale inkrimping, amplitude neem af	
$-1 < a < 0$: refleksie rondom x-as van $0 < a < 1$	
$a < -1$: refleksie rondom x-as van $a > 1$	

Tabel 6.6: Die invloed van a op 'n sinusgrafiek.

Effect of q	
$q > 0$: vertikale skuif opwaarts met q eenhede	
$q = 0$: basiese sinusgrafiek	
$q < 0$: vertikale skuif afwaarts met q eenhede	

Tabel 6.7: Die invloed van q op 'n sinusgrafiek.

Ontdek die eienskappe EMD56

Gebied en terrein

Vir $f(\theta) = a\sin\theta + q$, is die gebied $[0°; 360°]$

Die terrein van $f(\theta) = a\sin\theta + q$ is afhanklik van die waardes van a en q.

Vir $a > 0$:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\theta &\leq 1 \\ -a \leq a\sin\theta &\leq a \\ -a + q \leq a\sin\theta + q &\leq a + q \\ -a + q \leq f(\theta) &\leq a + q \end{aligned}$$

Vir alle waardes van θ, is $f(\theta)$ altyd tussen $-a + q$ en $a + q$.

Dus vir $a > 0$, is die terrein van $f(\theta) = a\sin\theta + q$ gelyk aan $\{f(\theta) : f(\theta) \in [-a + q, a + q]\}$

Soortgelyk, vir $a < 0$, is die terrein van $f(\theta) = a\sin\theta + q$ gelyk aan $\{f(\theta) : f(\theta) \in [a + q, -a + q]\}$

Periode

Die periode van $y = a\sin\theta + q$ is $360°$. Dit beteken dat 'n volledige sinus-kurwe in $360°$ voltooi word.

Afsnitte

Die y-afsnit van $f(\theta) = a\sin\theta + q$ is eenvoudig die waarde van $f(\theta)$ by $\theta = 0°$

$$\begin{aligned} y &= f(0°) \\ &= a\sin 0° + q \\ &= a(0) + q \\ &= q \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; q)$

Belangrik wanneer jy trigonometriese grafieke teken, begin altyd met die basiese grafiek en oorweeg dan die invloed van a en q.

Uitgewerkte voorbeeld 17: Teken 'n sinusgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = 2\sin\theta + 3$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

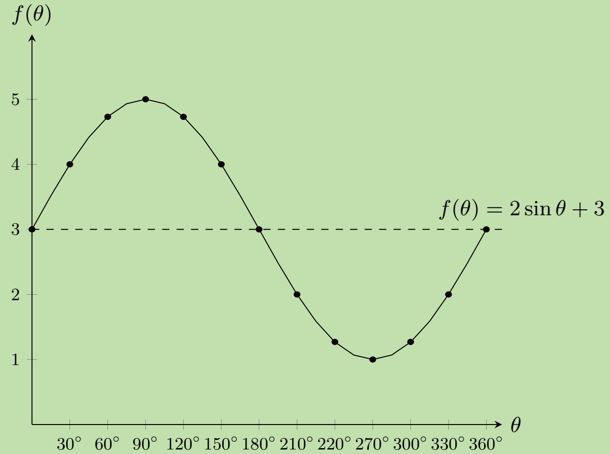
Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Van die vergelyking sien ons dat $a > 1$, dus is die grafiek vertikaal gestrek. Ons sien ook dat $q > 0$, dus is die grafiek vertikaal opwaarts geskuif met 3 eenhede.

Stap 2: Vervang waardes vir θ

θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$f(\theta)$	3	4	4,73	5	4,73	4	3	2	1,27	1	1,27	2	3

Stap 3: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



Gebied: $[0°; 360°]$ Terrein: $[1; 5]$ x-afsnitte: geen y-afsnitte: $(0°; 3)$ Maksimum draaipunt: $(90°; 5)$ Minimum draaipunt: $(270°; 1)$

Cosinusfunksie EMD57

Funksies van die vorm $y = \cos\theta$ EMD58

Uitgewerkte voorbeeld 18: Teken 'n cosinusgrafiek

VRAAG

$y = f(\theta) = \cos\theta \quad [0° \leq \theta \leq 360°]$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi.

Kies 'n toepaslike skaal en stip die waardes van θ op die x-as en $\cos\theta$ op die y-as. Rond jou antwoorde af tot 2 desimale plekke.

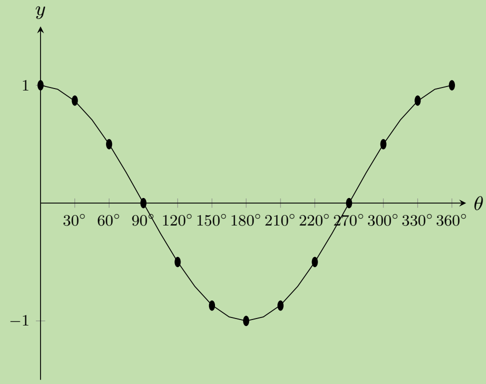
θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$\cos\theta$													

OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes vir θ

θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$\cos\theta$	1	0,87	0,5	0	$-0{,}5$	$-0{,}87$	-1	$-0{,}87$	$-0{,}5$	0	0,5	0,87	1

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme.



Let op die soortgelyke golf-vorm van die grafiek. Die periode is ook $360°$ en die amplitude is 1. Die maksimumwaarde van $y = \cos\theta$ is 1 en die minimumwaarde is -1.

Gebied: $[0°; 360°]$ Terrein: $[-1; 1]$ x-afsnitte: $(90°; 0)$, $(270°; 0)$ y-afsnit: $(0°; 1)$ Maksimum draaipunte: $(0°; 1)$, $(360°; 1)$ Minimum draaipunt: $(180°; -1)$

Funksies van die vorm $y = a\cos\theta + q$ EMD59

Ondersoek: Die invloed van a en q op 'n cosinusgrafiek

In die vergelyking, $y = a\cos\theta + q$, is a en q konstantes met verskillende invloede op die grafiek

Op dieselfde assestelsel, stip die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_1 = \cos\theta - 2$
2. $y_2 = \cos\theta - 1$
3. $y_3 = \cos\theta$
4. $y_4 = \cos\theta + 1$
5. $y_5 = \cos\theta + 2$

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, stip die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_6 = -2\cos\theta$
2. $y_7 = -\cos\theta$
3. $y_8 = \cos\theta$
4. $y_9 = 2\cos\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

Die effek van q

Die effek van q word 'n opwaartse of afwaartse vertikale skuif genoem omdat die hele cosinusgrafiek op- of afskuif met q eenhede.

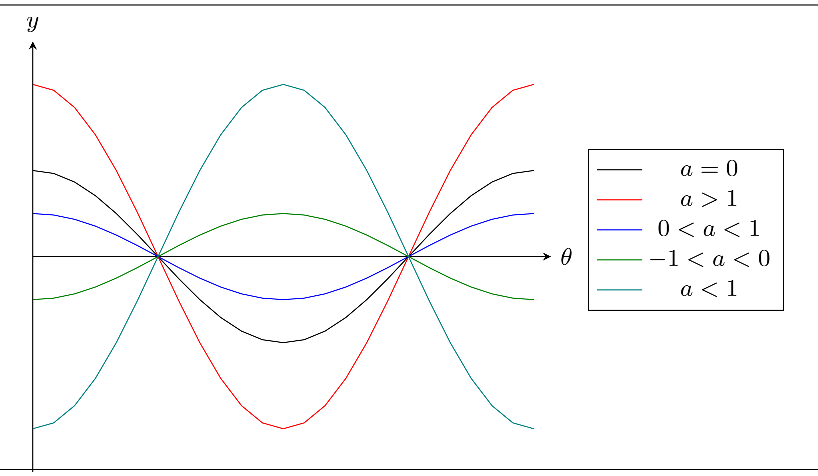
- Vir $q > 0$, skuif die grafiek vertikaal opwaarts met q eenhede.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek vertikaal afwaarts met q eenhede.

Die effek van a

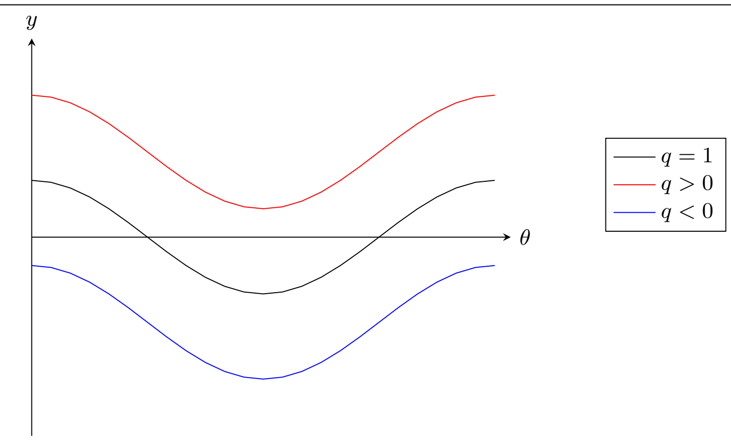
Die waarde van a beïnvloed die amplitude van die grafiek; die hoogte van die pieke en die diepte van die trôe.

- Vir $a > 0$, is daar 'n vertikale strekking en die amplitude neem toe.
  Vir $0 < a < 1$, neem die amplitude af.
- Vir $a < 0$, is daar 'n refleksie rondom die x-as.
  Vir $-1 < a < 0$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die amplitude verminder.
  Vir $a < -1$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die amplitude word groter.

Let daarop dat amplitude altyd positief is.

<table>
<tr><th colspan="2">Invloed van a</th></tr>
<tr><td>$a > 1$: vertikale streking, amplitude neem toe</td><td rowspan="5">
</td></tr>
<tr><td>$a = 1$: basiese cosinusgrafiek</td></tr>
<tr><td>$0 < a < 1$: amplitude neem af</td></tr>
<tr><td>$-1 < a < 0$: refleksie om die x-as, amplitude neem af</td></tr>
<tr><td>$a < -1$: refleksie om die x-as, amplitude neem toe</td></tr>
</table>

Tabel 6.8: Die invloed van a op 'n cosinusgrafiek.

<table>
<tr><th colspan="2">Invloed van q</th></tr>
<tr><td>$q > 0$: vertikale skuif opwaarts met q eenhede</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$q = 0$: basiese cosinusgrafiek</td></tr>
<tr><td>$q < 0$: vertikale skuif afwaarts met q eenhede</td></tr>
</table>

Tabel 6.9: Die invloed van q op 'n cosinusgrafiek.

Gebied en terrein

Vir $f(\theta) = a\cos\theta + q$, is die gebied $[0°; 360°]$

Dit is maklik om te sien dat die terrein van $f(\theta)$ dieselfde is as die terrein van $a\sin\theta + q$. Dit is omdat die maksimum- en minimumwaardes van $a\cos(\theta) + q$ dieselfde sal wees as die maksimum- en minimumwaardes van $a\sin\theta + q$.

Vir $a > 0$ die terrein van $f(\theta) = a\cos\theta + q$ is $\{f(\theta) : f(\theta) \in [-a+q; a+q]\}$

Vir $a < 0$ die terrein van $f(\theta) = a\cos\theta + q$ is $\{f(\theta) : f(\theta) \in [a+q; -a+q]\}$

Periode

Die periode van $y = a\cos\theta + q$ is $360°$. Dit beteken dat een cosinusgolf voltooi word in $360°$.

Afsnitte

Die y-afsnit van $f(\theta) = a\cos\theta + q$ word op dieselfde manier bereken as vir sinus.

$$\begin{aligned} y &= f(0°) \\ &= a\cos 0° + q \\ &= a(1) + q \\ &= a + q \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; a+q)$.

Uitgewerkte voorbeeld 19: Teken 'n cosinusgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = 2\cos\theta + 3$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

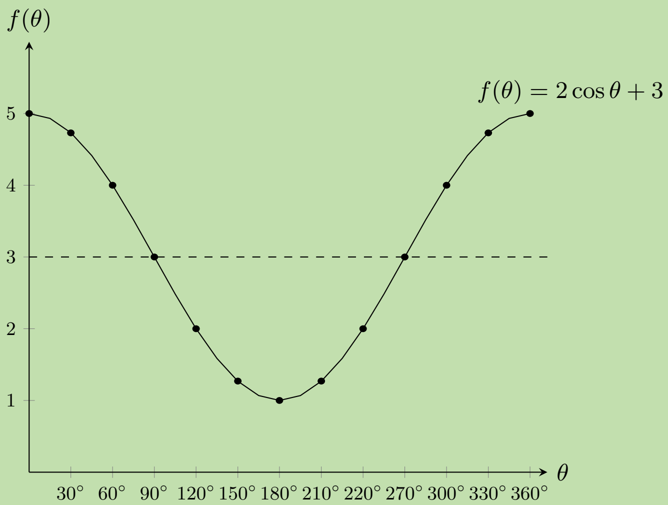
Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Van die vergelyking sien ons dat $a > 1$, dus is die grafiek vertikaal gestrek. Ons sien ook dat $q > 0$, dus is die grafiek vertikaal opwaarts geskuif met 3 eenhede.

Stap 2: Vervang waardes vir θ

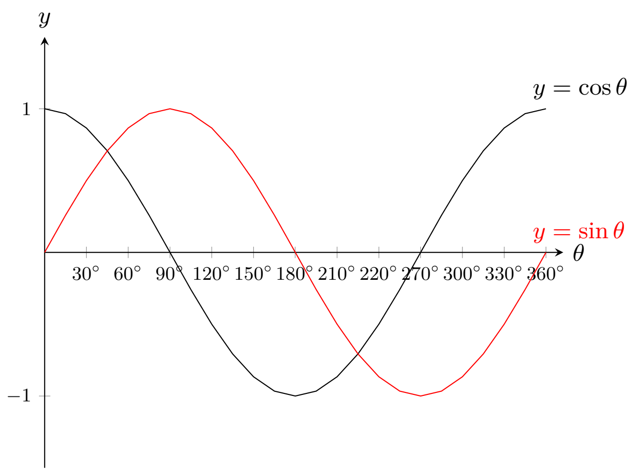
θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$f(\theta)$	5	4,73	4	3	2	1,27	1	1,27	2	3	4	4,73	5

Stap 3: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



Gebied: $[0°; 360°]$; Terrein: $[1; 5]$; x-afsnitte: geen; y-afsnit: $(0°; 5)$; Maksimum draaipunte: $(0°; 5)$, $(360°; 5)$; Minimum draaipunt: $(180°; 1)$

Vergelyking van die grafieke van $y = \sin\theta$ en $y = \cos\theta$ EMD5C



Let daarop dat die twee grafieke baie eenders lyk. Beide golwe beweeg op en af langs die x-as. Die afstande tussen die pieke vir elke grafiek is dieselfde. Die hoogte van die pieke en die diepte van die trôe is ook dieselfde.

As jy die hele cosinusgrafiek $90°$ na regs skuif, sal dit perfek oorvleuel met die sinusgrafiek. As jy die sinusgrafiek $90°$ na links skuif, sal dit perfek oorvleuel met die cosinusgrafiek. Dit beteken dat:

$$\sin\theta = \cos(\theta - 90°) \quad \text{(skuif die cosinusgrafiek na regs)}$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + 90°) \quad \text{(skuif die sinusgrafiek na links)}$$

Tangensfunksie EMD5D

Funksies van die vorm $y = \tan\theta$ EMD5F

Uitgewerkte voorbeeld 20: Teken die tangensgrafiek

VRAAG

$y = f(\theta) = \tan\theta \quad [0° \leq \theta \leq 360°]$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi.

Kies 'n toepaslike skaal en stip die waardes met θ op die x-as en $\tan\theta$ op die y-as. (Rond jou antwoorde af tot 2 desimale plekke.)

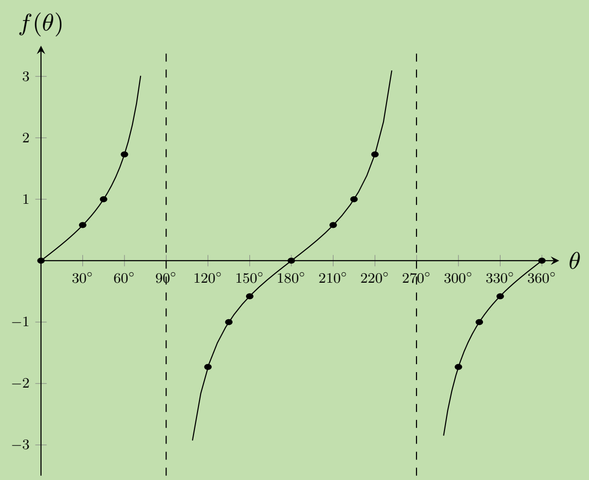
θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\tan\theta$									
θ	$210°$	$235°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	
$\tan\theta$									

OPLOSSING

Stap 1: Vervang waardes vir θ

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\tan\theta$	0	0,58	1	1,73	ongedef	$-1{,}73$	-1	$-0{,}58$	0
θ	$210°$	$235°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	
$\tan\theta$	0,58	1	1,73	undef	$-1{,}73$	-1	$-0{,}58$	0	

Stap 2: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



Daar is 'n maklike manier om die tangensgrafiek te visualiseer. Beskou ons definisies van $\sin\theta$ en $\cos\theta$ vir reghoekige driehoeke:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{\left(\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\right)}{\left(\frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}\right)} \\ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}} \\ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

So vir enige waarde van θ: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Dus weet ons dat vir die waardes van θ waarvoor $\sin\theta = 0$, moet ons ook hê dat $\tan\theta = 0$. Ook as $\cos\theta = 0$, is die waarde van $\tan\theta$ ongedefinieerd omdat ons nie kan deel met 0 nie. Die vertikale stippellyne is die waardes van θ waar $\tan\theta$ nie gedefinieer is nie en word asimptote genoem.

Asimptote: die lyne $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$

Periode: $180°$

Gebied: $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$ Terrein: $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$

x-afsnitte: $(0°; 0)$, $(180°; 0)$, $(360°; 0)$ y-afsnit: $(0°; 0)$

Funksies van die vorm $y = a\tan\theta + q$ EMD5G

Ondersoek: Die invloed van a en q op 'n tangensgrafiek

Op dieselfde assestelsel, stip die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_1 = \tan\theta - 2$
2. $y_2 = \tan\theta - 1$
3. $y_3 = \tan\theta$
4. $y_4 = \tan\theta + 1$
5. $y_5 = \tan\theta + 2$

Gebruik jou resultate om die effek van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, stip die volgende grafieke vir $0° \leq \theta \leq 360°$:

1. $y_6 = -2\tan\theta$
2. $y_7 = -\tan\theta$
3. $y_8 = \tan\theta$
4. $y_9 = 2\tan\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van a af te lei.

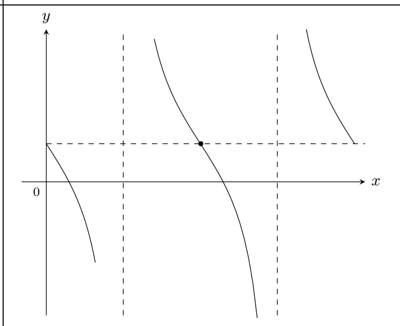
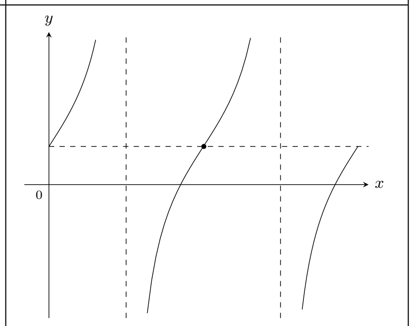
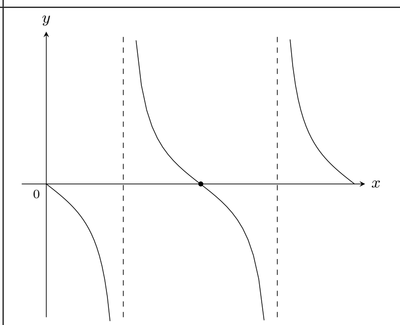
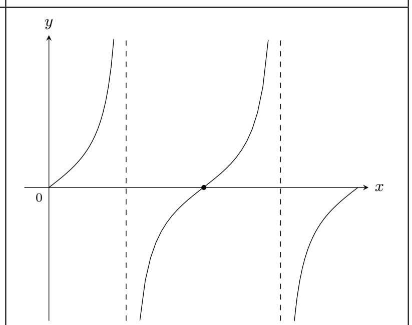
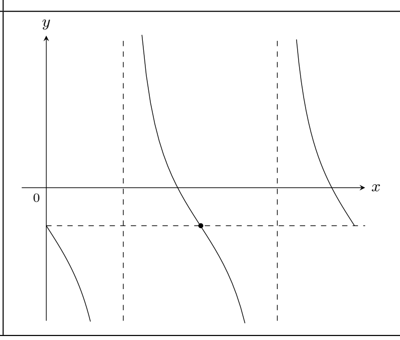
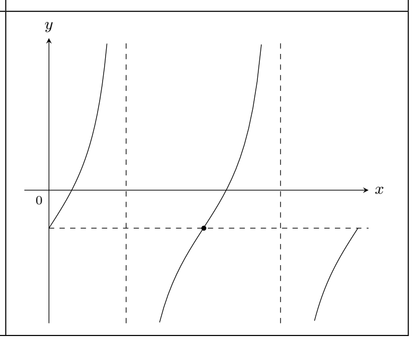
Die effek van q

Die invloed van q word 'n vertikale skuif genoem omdat die hele tangensgrafiek q eenhede op- of afskuif.

- Vir $q > 0$, skuif die grafiek vertikaal opwaarts met q eenhede.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek vertikaal afwaarts met q eenhede.

Die effek van a

Die waarde van a affekteer die steilheid van elk van die takke van die grafiek. Hoe groter die waarde van a, hoe vinniger sal die takke van die grafiek die asimptote benader.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Tabel 6.10: Die invloed van a en q op 'n tangensgrafiek.

Ontdek die eienskappe EMD5H

Gebied en terrein

Van die grafiek sien ons dat $\tan\theta$ ongedefinieerd is by $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$.

Dus is die gebied $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$.

Die terrein is $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Periode

Die periode van $y = a\tan\theta + q$ is $180°$. Dit beteken dat een tangens siklus voltooi word in $180°$.

Afsnitte

Die y-afsnit van $f(\theta) = a\tan\theta + q$ is eenvoudig die waarde van $f(\theta)$ by $\theta = 0°$.

$$\begin{aligned} y &= f(0°) \\ &= a\tan 0° + q \\ &= a(0) + q \\ &= q \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; q)$.

Asimptote

Die grafiek het asimptote by $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$.

Uitgewerkte voorbeeld 21: Teken 'n tangensgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $y = 2\tan\theta + 1$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

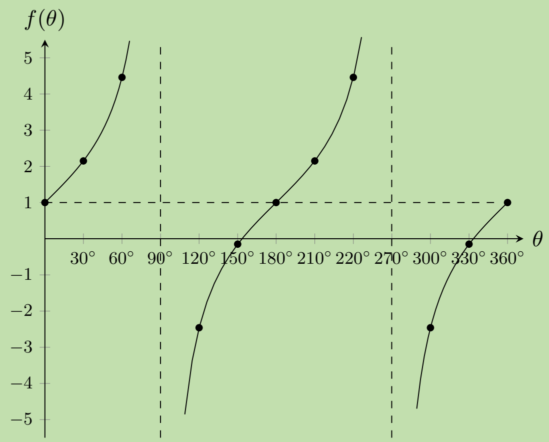
Stap 1: Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Ons sien dat $a > 1$, dus sal die takke van die kromme steiler wees. Ons sien ook dat $q > 0$, dus word die grafiek vertikaal opwaarts geskuif met 1 eenheid.

Stap 2: Vervang waardes vir θ

θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
y	1	2,15	4,46	–	−2,46	−0,15	1	2,15	4,46	–	−2,46	−0,15	1

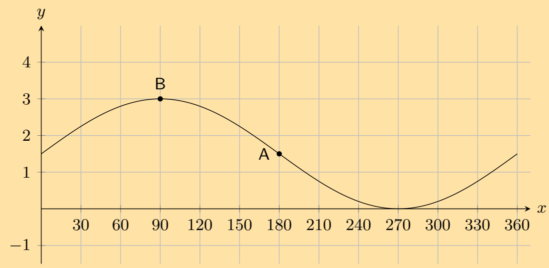
Stap 3: Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



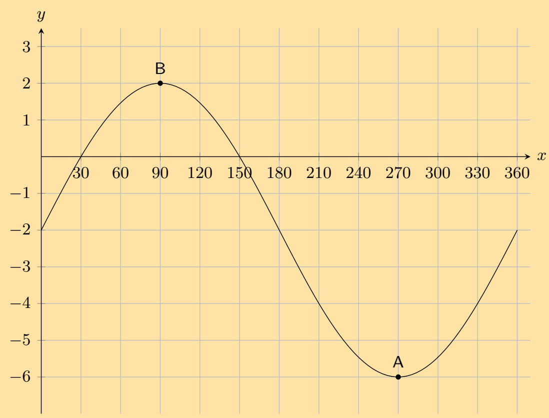
Gebied: $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$ Terrein: $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$

Oefening 6 – 6:

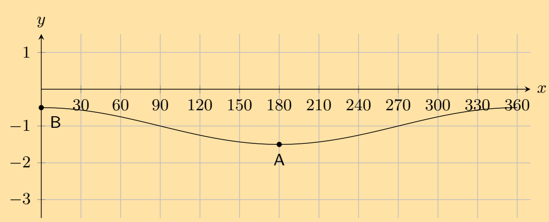
1. Die grafiek van die vorm: $y = a \sin \theta + q$ word gegee. **Punt A** is by $(180°; 1{,}5)$, en **Punt B** is by $(90°; 3)$. Vind die waardes van a en c.



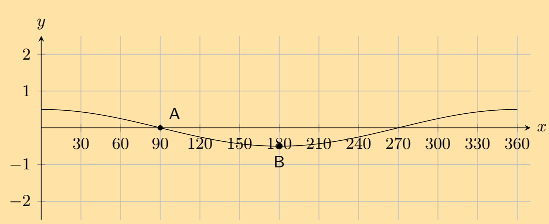
2. Die grafiek van die vorm: $y = a \sin \theta + q$ word gegee. **Punt A** is by $(270°; -6)$, en **Punt B** is by $(90°; 2)$, bepaal die waardes van a en q.



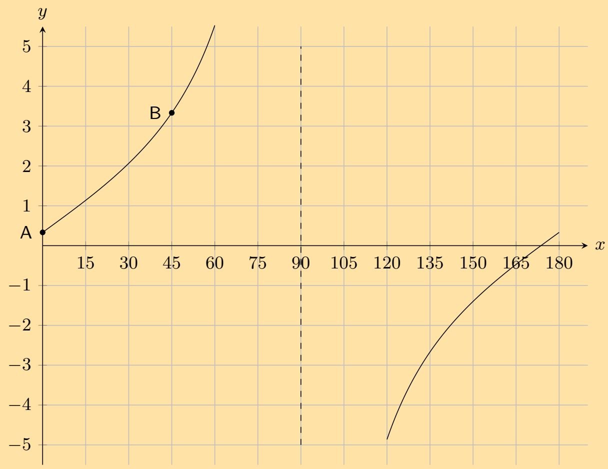
3. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a \cos \theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(180°; -1{,}5)$, en **Punt B**: $(0°; -0{,}5)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



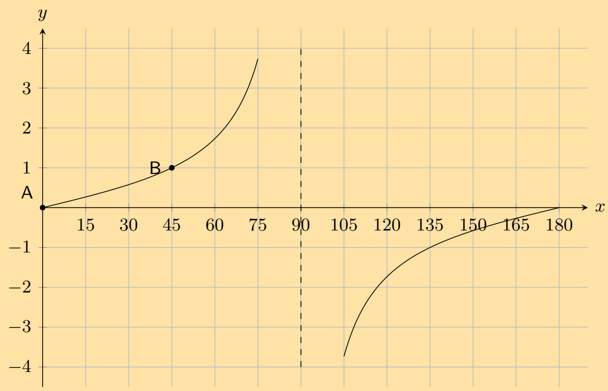
4. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a \cos \theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(90°; 0{,}0)$, en **Punt B**: $(180°; -0{,}5)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



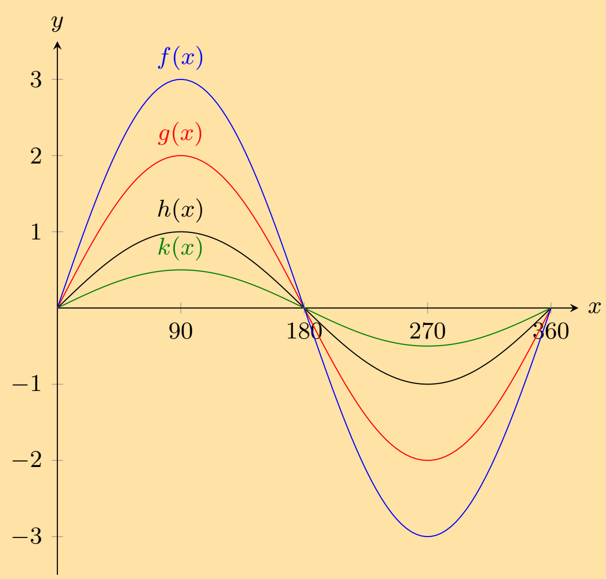
5. Op die grafiek hieronder sien jy 'n tangenskromme van die volgende vorm: $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is $\left(0°; \frac{1}{3}\right)$, en **Punt B** is $\left(45°; \frac{10}{3}\right)$.
   Bereken, of bepaal andersins, die waardes van a en q.



6. Die grafiek hieronder toon 'n tangensgrafiek met 'n vergelyking van die vorm $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is $(0°; 0)$, en **Punt B** is $(45°; 1)$. Vind a en q.



7. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



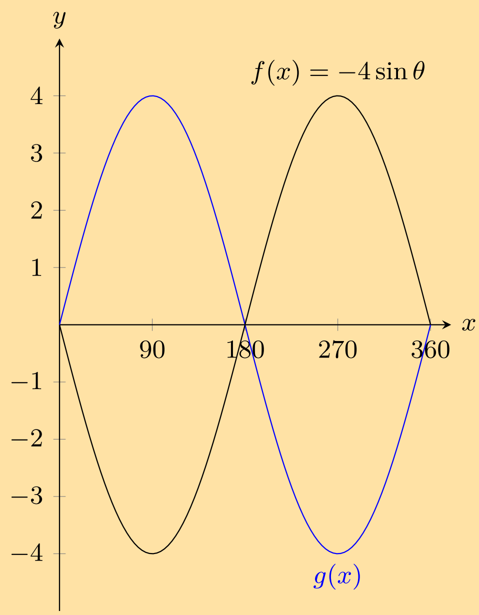
a) $y = \sin\theta$

b) $y = \frac{1}{2}\sin\theta$

c) $y = 3\sin\theta$

d) $y = 2\sin\theta$

8. Die grafiek toon funksies $f(x)$ en $g(x)$



Wat is die vergelyking vir $g(x)$?

9. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

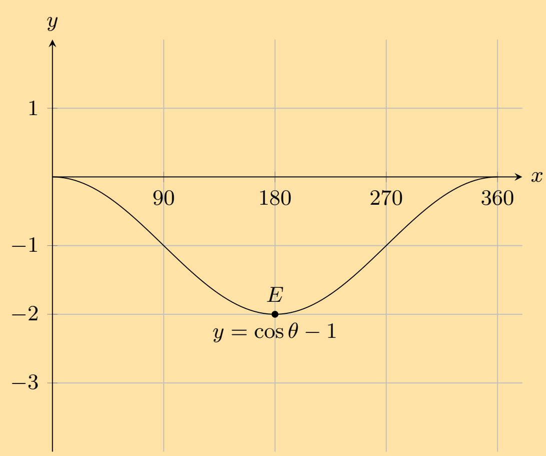
θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\tan\theta$	0	1	ongedefineerd	-1	0	1	ongedefineerd	-1	0
$3\tan\theta$	0	3	ongedefineerd	-3	0	3	ongedefineerd	-3	0
$\frac{1}{2}\tan\theta$	0	$\frac{1}{2}$	ongedefineerd	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	ongedefineerd	$-\frac{1}{2}$	0

10. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

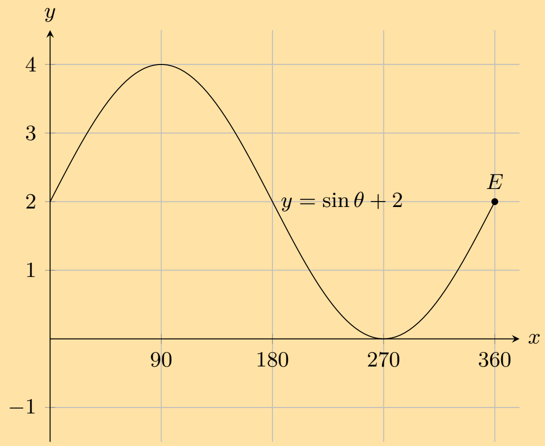
θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos\theta - 2$	-1	-2	-3	-2	-1
$\cos\theta + 4$	5	4	2	4	5
$\cos\theta + 2$	3	2	1	2	3

11. Noem die koördinate by E en die terrein van die funksie.

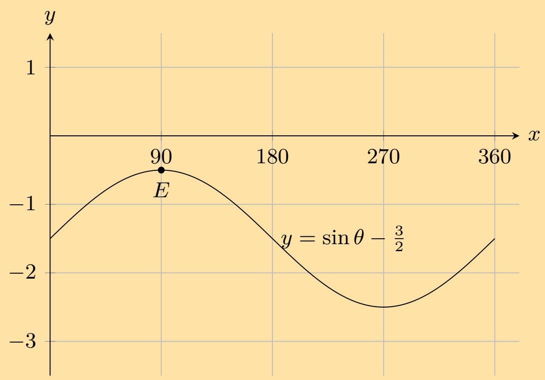
a)



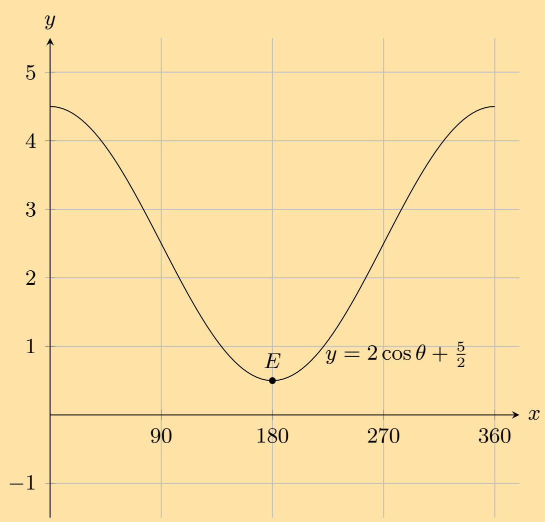
b)



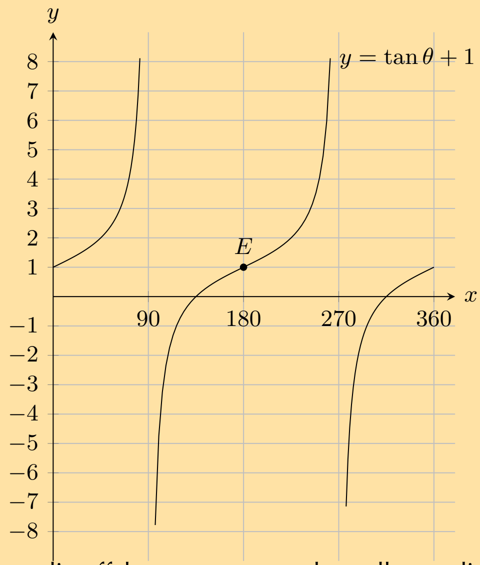
c)



d)



12. Meld die koördinate by E en die gebied en die terrein van die funksie in die gegewe interval.

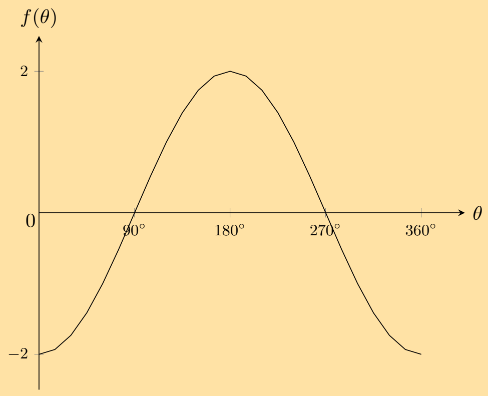


13. Maak gebruik van jou kennis van die effek van a en q en skets elk van die volgende grafieke, sonder die gebruik van 'n tabel van waardes, vir $\theta \in [0°; 360°]$.

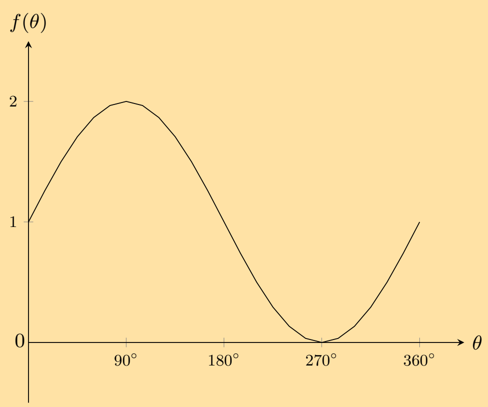
a) $y = 2\sin\theta$
b) $y = -4\cos\theta$
c) $y = -2\cos\theta + 1$
d) $y = \sin\theta - 3$
e) $y = \tan\theta - 2$
f) $y = 2\cos\theta - 1$

14. Gee die vergelykings vir elk van die volgende grafieke:

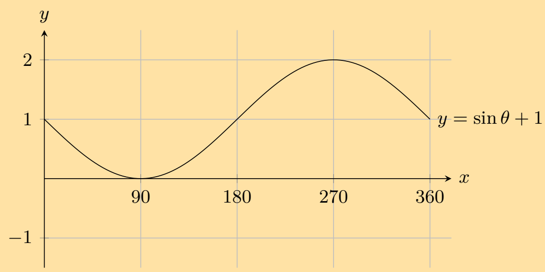
a)



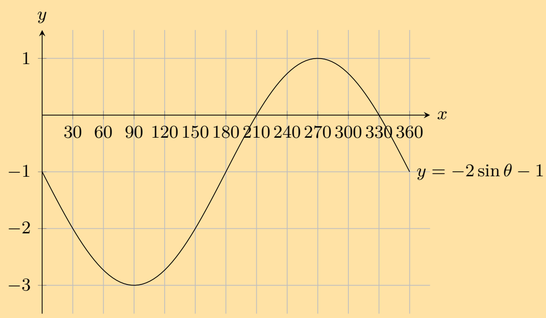
b)



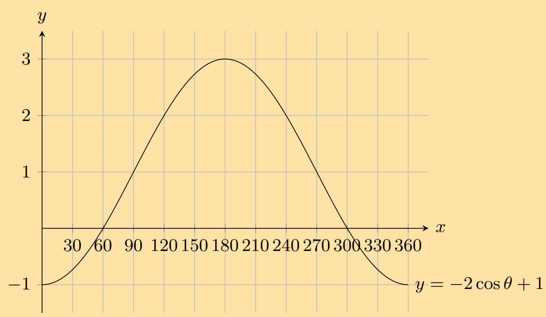
15. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie toenemend?



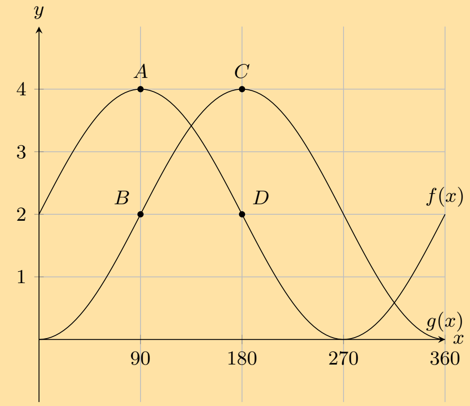
16. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie negatief ?



17. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie positief?

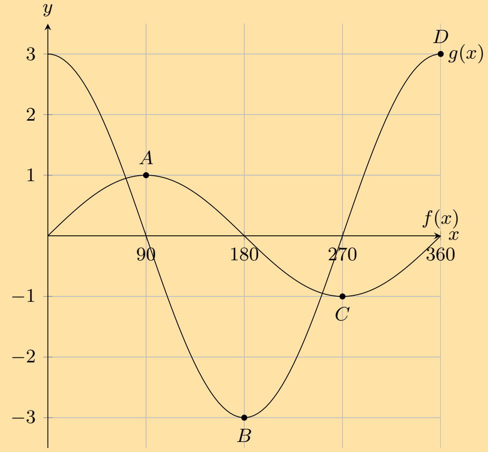


18. Gegewe die volgende grafiek.



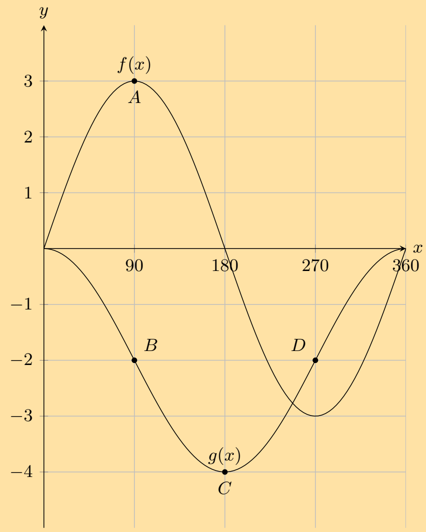
a) Noem die koördinate by A, B, C en D.
b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?
c) Wat is die amplitude van $f(x)$?
d) Bepaal: $f(360°) - g(360°)$.

19. Gegewe die volgende grafiek.



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.
b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?
c) Wat is die amplitude van $g(x)$?
d) Evalueer: $f(90°) - g(90°)$.

20. Gegewe die volgende grafiek:



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.
b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?
c) Wat is die amplitude van $g(x)$?
d) Bepaal: $f(270°) - g(270°)$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

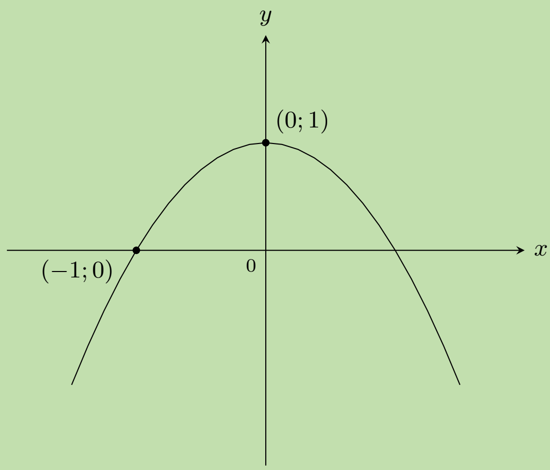
1. 2JMX	2. 2JMY	3. 2JMZ	4. 2JN2	5. 2JN3	6. 2JN4
7. 2JN5	8. 2JN6	9. 2JN7	10. 2JN8	11a. 2JN9	11b. 2JNB
11c. 2JNC	11d. 2JND	12. 2JNF	13a. 2JNG	13b. 2JNH	13c. 2JNJ
13d. 2JNK	13e. 2JNM	13f. 2JNN	14a. 2JNP	14b. 2JNQ	15. 2JNR
16. 2JNS	17. 2JNT	18. 2JNV	19. 2JNW	20. 2JNX	

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 22: Bepaal die vergelyking van 'n parabool

VRAAG

Gebruik die skets hieronder om die waardes te bepaal van a en q vir die parabool van die vorm $y = ax^2 + q$.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die skets

Van die skets sien ons die vorm van 'n grafiek is 'n "frons", dus $a < 0$. Ons sien ook dat die grafiek vertikaal opwaarts geskuif is, dus $q > 0$.

Stap 2: Bepaal q deur gebruik te maak van die y-afsnit

Die y-afsnit is die punt $(0; 1)$.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ 1 &= a(0)^2 + q \\ \therefore q &= 1 \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die ander gegewe punt om a te bepaal

Stel die punt $(-1; 0)$ in die vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ 0 &= a(-1)^2 + 1 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

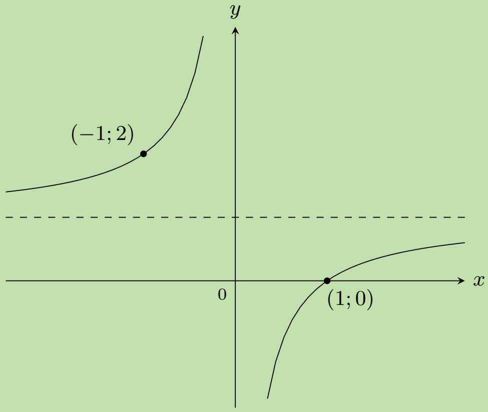
Stap 4: Skryf die finale antwoord

$a = -1$ en $q = 1$, dus die vergelyking van die parabool is $y = -x^2 + 1$.

Uitgewerkte voorbeeld 23: Bepaal die vergelyking van 'n hiperbool

VRAAG

Gebruik die skets hieronder om die waardes te bepaal van a en q vir die hiperbool van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die skets

Die twee krommes van die hiperbool lê in die tweede en vierde kwadrante, dus $a < 0$. Ons sien ook dat die grafiek vertikaal opwaarts geskuif is, dus $q > 0$.

Stap 2: Substitueer die gegewe punte in die vergelyking en los op

Substitueer die punt $(-1; 2)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} + q \\ 2 &= \frac{a}{-1} + q \\ \therefore 2 &= -a + q \end{aligned}$$

Substitueer die punt $(1; 0)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} + q \\ 0 &= \frac{a}{1} + q \\ \therefore a &= -q \end{aligned}$$

Stap 3: Los die gelyktydige vergelykings op deur substitusie te gebruik

$$\begin{aligned} 2 &= -a + q \\ &= q + q \\ &= 2q \\ \therefore q &= 1 \\ \therefore a &= -q \\ &= -1 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

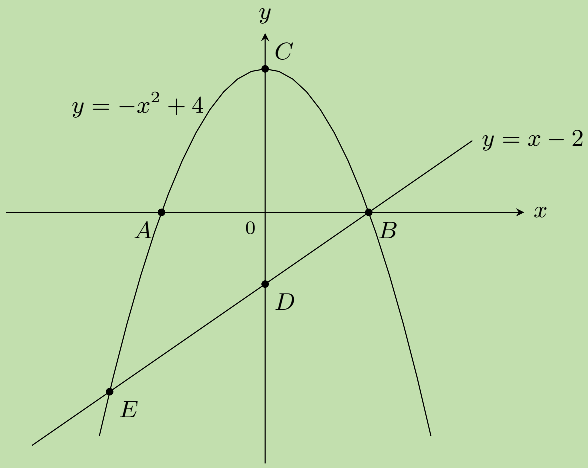
$a = -1$ en $q = 1$, dus die vergelyking van die hiperbool is $y = \frac{-1}{x} + 1$.

Uitgewerkte voorbeeld 24: Interpreteer grafieke

VRAAG

Die grafieke van $y = -x^2 + 4$ en $y = x - 2$ word gegee. Bereken die volgende:

1. koördinate van A, B, C, D
2. koördinate van E
3. afstand CD



OPLOSSING

Stap 1: Bereken die afsnitte

Om die y-afsnit van die parabool te bereken, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4 \\ &= -0^2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $C(0; 4)$.

Om die x-afsnit te bereken, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4 \\ 0 &= -x^2 + 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x + 2)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $A(-2; 0)$ en $B(2; 0)$.

Om die y-afsnit van die reguitlyn te bereken, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ &= 0 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $D(0; -2)$.

Stap 2: Bereken die snypunt E

Die twee grafieke sny by E, dus kan ons die twee uitdrukkings gelykstel:

$$\begin{aligned} x - 2 &= -x^2 + 4 \\ \therefore x^2 + x - 6 &= 0 \\ \therefore (x-2)(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ of } -3 \end{aligned}$$

By E, $x = -3$, dus $y = x - 2 = -3 - 2 = -5$. Dit gee die punt $E(-3;-5)$.

Stap 3: Bereken afstand CD

$$\begin{aligned} CD &= CO + OD \\ &= 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Afstand CD is 6 eenhede.

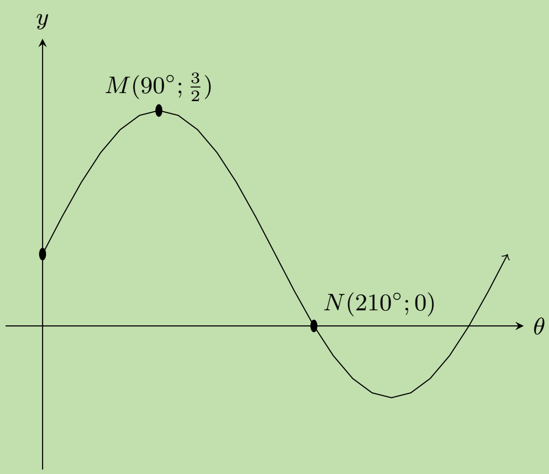
Stap 4: Skryf die finale antwoord

1. koördinate van $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;4)$, $D(0;-2)$
2. koördinate van $E(-3;-5)$
3. afstand $CD = 6$ eenhede

Uitgewerkte voorbeeld 25: Interpretasie van trigonometriese grafieke

VRAAG

Gebruik die skets en bepaal die vergelyking van die trigonometriese funksie f met die vorm $y = af(\theta) + q$.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die skets

Uit die skets sien ons dat die grafiek 'n sinusgrafiek is wat vertikaal opwaarts geskuif is. Die algemene vorm van die vergelyking is $y = a\sin\theta + q$.

Stap 2: Substitueer die gegewe punte in die vergelyking en los op

By N, $\theta = 210°$ en $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= a\sin\theta + q \\ 0 &= a\sin 210° + q \\ &= a\left(-\frac{1}{2}\right) + q \\ \therefore q &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

By M, $\theta = 90°$ en $y = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= a\sin 90° + q \\ &= a + q \end{aligned}$$

Stap 3: Los die gelyktydige vergelykings op deur substitusie te gebruik

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= a + q \\ &= a + \frac{a}{2} \\ 3 &= 2a + a \\ 3a &= 3 \\ \therefore a &= 1 \\ \therefore q &= \frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$y = \sin\theta + \frac{1}{2}$

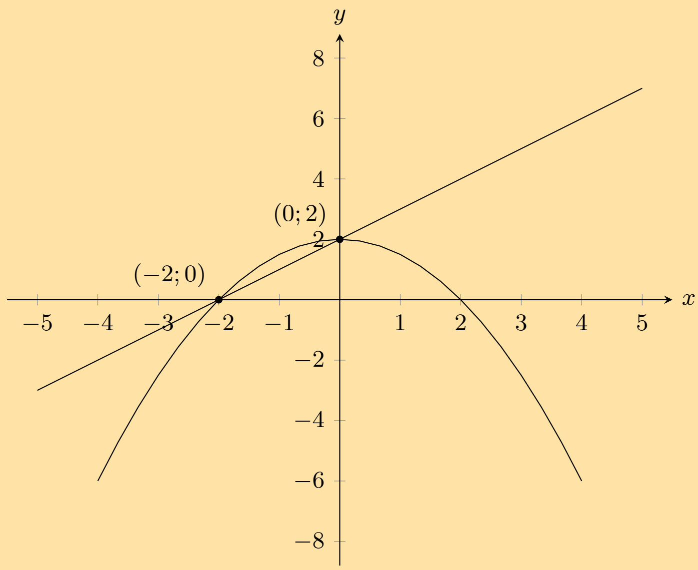
Oefening 6 – 7:

1. Teken die volgende funksies op dieselfde assestelsel en merk al die punte waar die funksies sny.

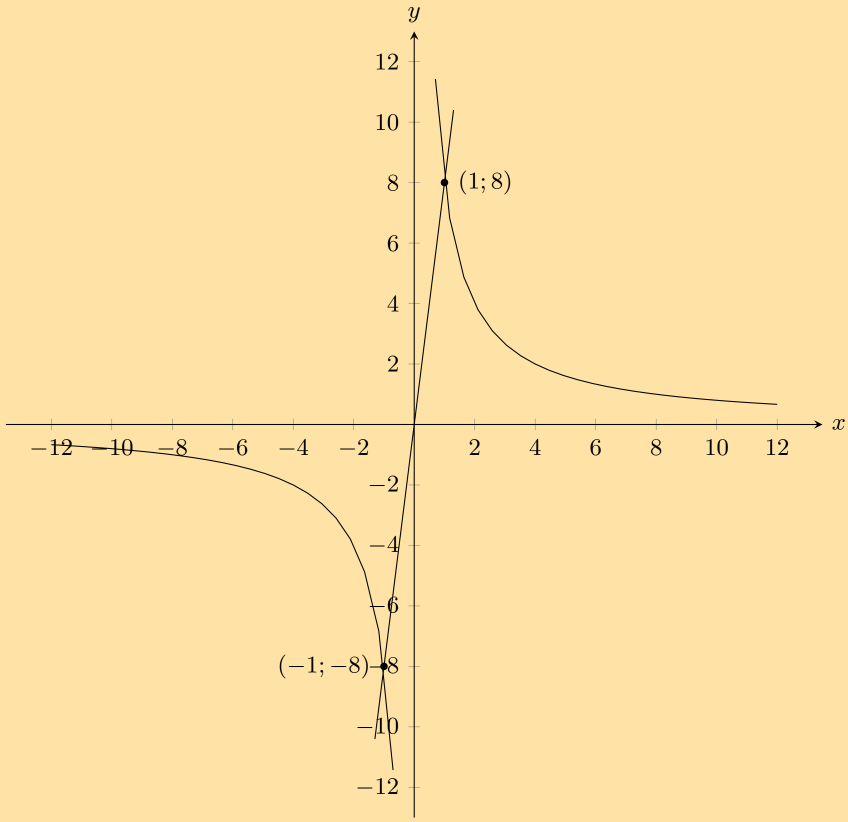
   a) $y = x^2 + 1$ en $y = 3^x$ b) $y = x$ en $y = \frac{2}{x}$ c) $y = x^2 + 3$ en $y = 6$ d) $y = -x^2$ en $y = \frac{8}{x}$

2. Bepaal die vergelykings van die grafieke hieronder.

   a)



   b)



3. Kies die korrekte antwoord:

   a) Die terrein van $y = 2\sin\theta + 1$ is:
   i. $1 \leq \theta \leq 2$ ii. $-2 \leq \theta \leq 2$ iii. $-1 \leq \theta \leq 3$ iv. $-2 \leq \theta \leq 3$

   b) Die terrein van $y = 2\cos\theta - 4$ is:
   i. $-6 \leq \theta \leq 2$ ii. $-4 \leq \theta \leq -2$ iii. $-6 \leq \theta \leq 1$ iv. $-6 \leq \theta \leq -2$

   c) Die y-afsnit van $2^x + 1$ is:

i. 3 ii. 1 iii. 2 iv. 0

d) Watter van die volgende gaan deur $(1;7)$?

i. $y = \frac{7}{x}$ ii. $y = 2x + 3$ iii. $y = \frac{4}{x}$ iv. $y = x^2 + 1$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JNY 1b. 2JNZ 1c. 2JP2 1d. 2JP3 2a. 2JP4 2b. 2JP5
3a. 2JP6 3b. 2JP7 3c. 2JP8 3d. 2JP9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.8 Hoofstuk opsomming EMD5K

Sien aanbieding: 2JPB at www.everythingmaths.co.za

- Kenmerke van funksies:
  - Die gegewe x-waarde staan bekend as die onafhanklike veranderlike omdat die waarde daarvan vrylik gekies kan word. Die berekende y-waarde staan bekend as die afhanklike veranderlike, omdat die waarde daarvan afhanklik is van die x-waarde.
  - Die gebied van 'n funksie is die versameling van alle x-waardes waarvoor daar op die meeste een y-waarde bestaan volgens die funksievoorskrif. Die terrein is die versameling van alle y-waardes wat verkry kan word deur ten minste een x-waarde te gebruik.
  - 'n Asimptoot is 'n reguitlyn waarnatoe die grafiek van 'n funksie al nader sal kom, maar nooit sal raak nie.
- Spesiale funksies en hulle eienskappe:
  - Lineêre funksies van die vorm $y = ax + q$.
  - Paraboliese funksies van die vorm $y = ax^2 + q$.
  - Hiperboliese funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$.
  - Eksponensiële funksies van die vorm $y = ab^x + q$.
  - Trigonometriese funksies van die vorm $y = a \sin \theta + q$ $\quad y = a \cos \theta + q$ $\quad y = a \tan \theta + q$

End of chapter Exercise 6 – 8:

1. Voltooi die volgende tabelle en identifiseer die funksie.

a)

x		2	3	4		6
y	3	6		12	15	

b)

x	1			4	5	6
y	-3	-2	-1		1	2

2. Stip die volgende punte op 'n grafiek.

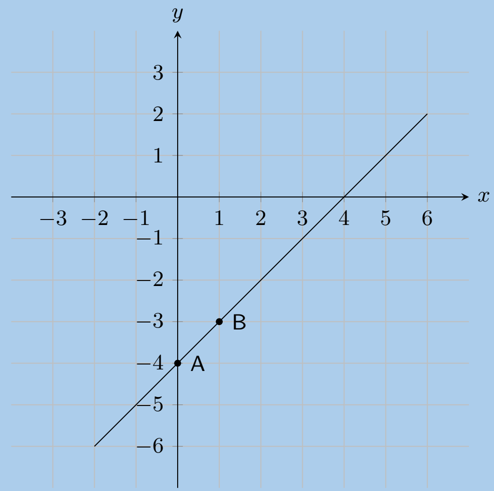
a)

x	1	2	3	4	5	6
y	1	2	3	4	5	6

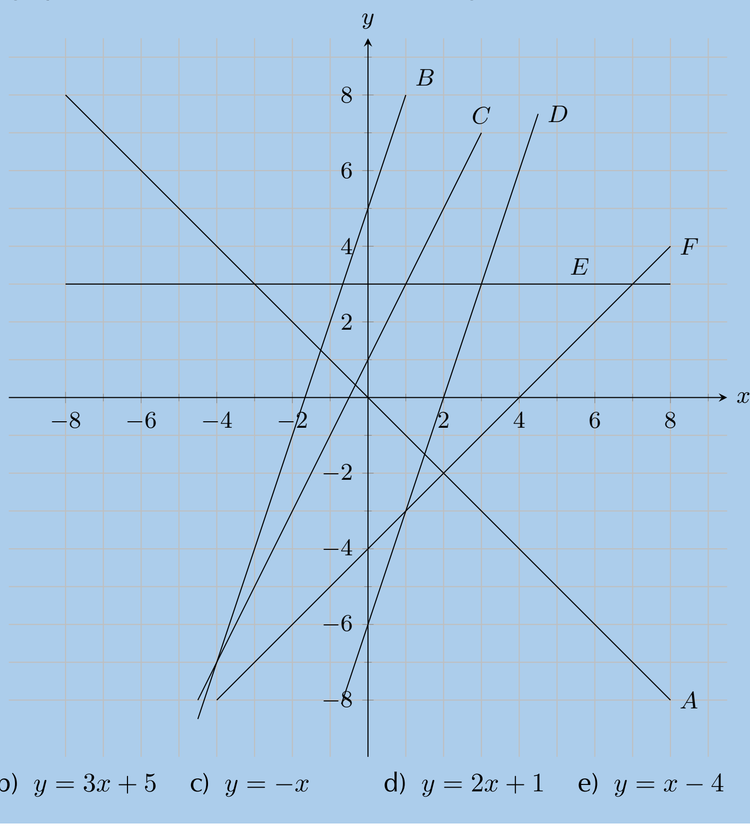
b)

x	50	100	150	200	250	300
y	1	2	3	4	5	6

3. Stel 'n tabel van waardes saam vir die gegewe funksie en skets dan die funksie. Jou tabel moet ten minste 5 geordende getallepare hê.
   a) $x^2 - 4$ b) $y = 4x - 1$
4. Bepaal die y-afsnit en die x-afsnitte van die funksie.
   a) $y = -3x - 5$ b) $y = 2x + 4$
5. Die grafiek hieronder toon 'n vergelyking van die vorm $y = mx + c$. Bereken, of vind andersins, die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).

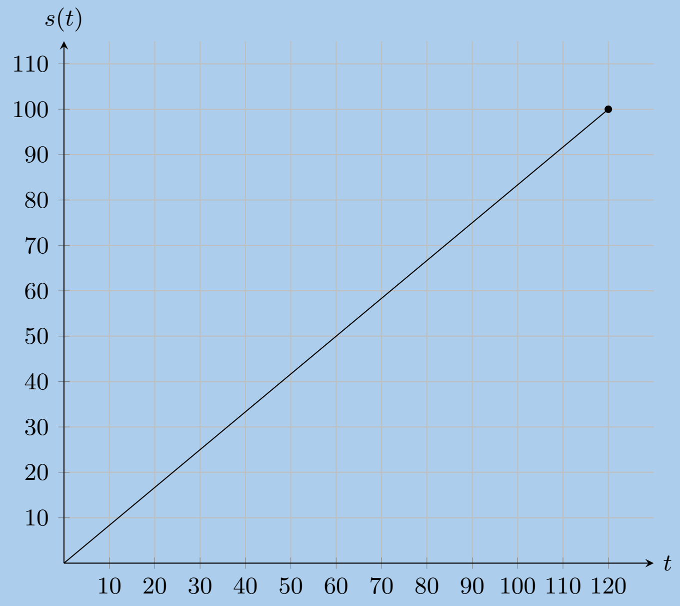


6. Kyk na die grafiek hieronder. Elke grafiek word aangedui met 'n letter. In die vrae wat volg, pas die gegewe vergelyking by die letter van 'n ooreenstemmende grafiek.

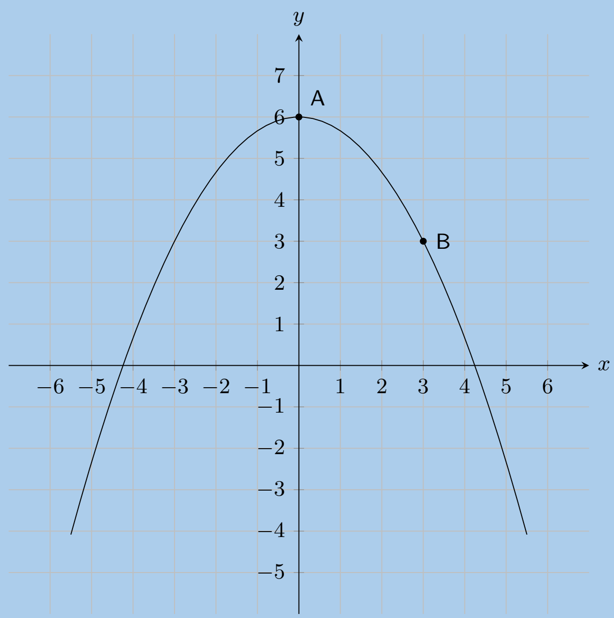


a) $y = 3$ b) $y = 3x + 5$ c) $y = -x$ d) $y = 2x + 1$ e) $y = x - 4$ f) $y = 3x - 6$

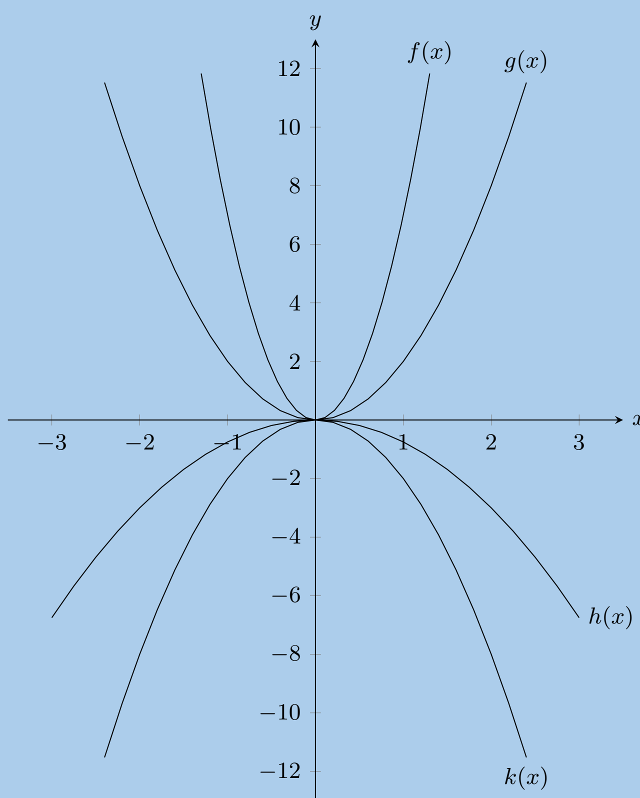
7. Meld of die volgende waar is of nie
   a) Die y-afsnit van $y + 5 = x$ is -5.
   b) Die gradiënt van $-y = x + 2$ is 1.
   c) Die gradiënt van $-4y = 3$ is 1.
8. Skryf die volgende in standaardvorm:
   a) $2y - 5x = 6$
   b) $6y - 3x = 5x + 1$
9. Skets die grafieke van die volgende:
   a) $y = 2x + 4$
   b) $y - 3x = 0$
   c) $2y = 4 - x$
10. Die funksie vir die hoeveelheid water wat 'n kraan lewer, word gegee deur: $V = 60t$, waar x en V in sekondes en mL gemeet word onderskeidelik.
    Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:
    a) Bereken $V(2)$.
    b) Bereken $V(10)$.
    c) Hoe lank sal dit vat om 'n 2 L bottel vol water te maak?
    d) Hoeveel water kan die kraan lewer in 4 s?
11. Die grafiek hieronder toon die afstand afgelê deur 'n motor oor 'n bestek van tyd, waar $s(t)$ die afstand in km en t die tyd in minute gee.



    Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:
    a) Watter afstand het die motor afgelê in 'n uur?
    b) Wat is die gebied van die funksie?
    c) Wat is die terrein van die funksie? Wat verteenwoordig dit?
12. Op die gegewe grafiek sien jy 'n funksie van die vorm: $y = ax^2 + q$.
    Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, is by $(0; 6)$, en **Punt B** is by $(3; 3)$. Bereken die waardes van a en q.

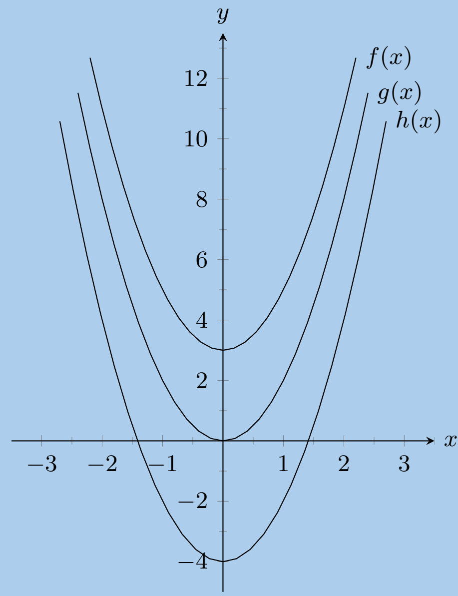


13. Gegewe die volgende vergelyking:
    $y = -5x^2 + 3$
    a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.
    b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
14. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = -2x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = -0{,}75x^2$ d) $y = 7x^2$

15. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:

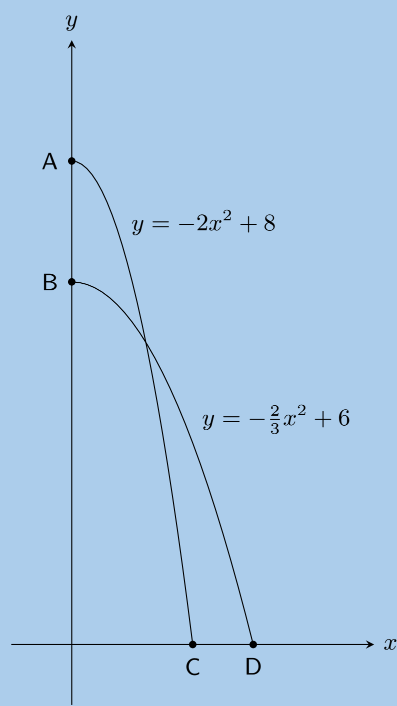


a) $y = 2x^2$ b) $y = 2x^2 + 3$ c) $y = 2x^2 - 4$

16. Skets die volgende funksies:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ c) $y = 2x^2 - 4$

17. Sebastian en Lucas duik in 'n poel water in van verskillende hoogtes af. Hulle paaie deur die lug kan beskryf word deur die volgende kwadratiese vergelykings: $y = -2x^2 + 8$ vir Sebastian en $y = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ vir Lucas.



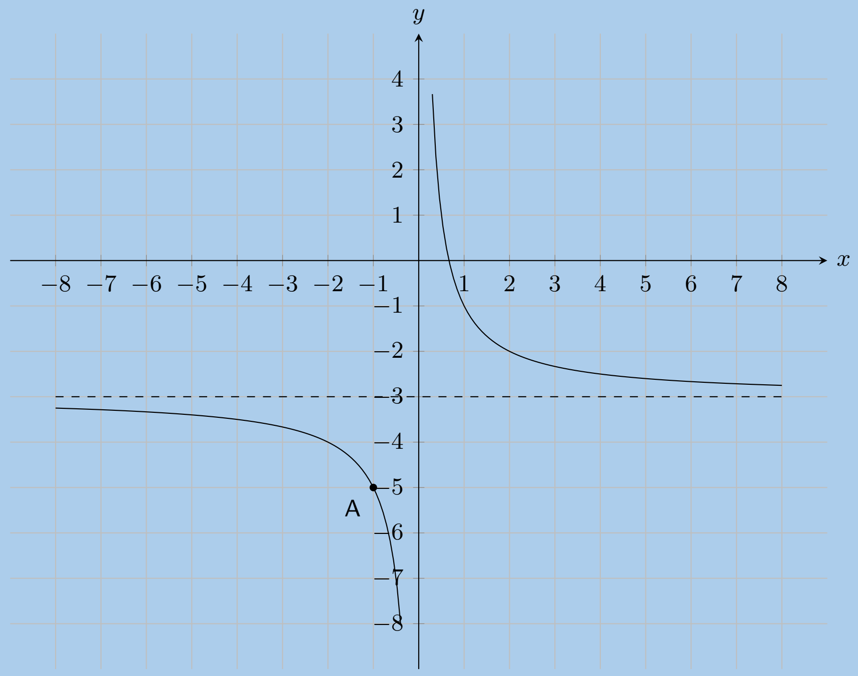
a) Van watter hoogte af het Sebastian geduik?

b) Van watter hoogte af het Lucas geduik?

c) Hoe ver van die poel se kant af het Lucas geland?

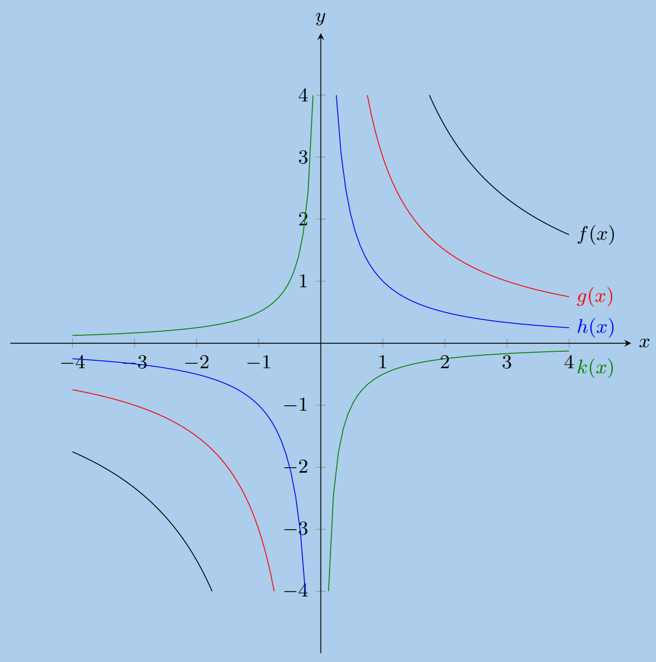
d) Hoeveel nader aan die kant van die poel het Sebastian geland?

18. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $(-1; -5)$. Bereken die waardes van a en q.



19. Gegewe die volgende vergelyking: $y = -\frac{3}{x} + 4$
    a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.
    b) Bepaal die posisie van die x-afsnit.

20. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = -\frac{1}{2x}$ b) $y = \frac{7}{x}$ c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = \frac{1}{x}$

21. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

    a) $y = \frac{3}{x} + 4$
    b) $y = \frac{1}{x}$
    c) $y = \frac{2}{x} - 2$

22. Skets die gegewe funksies en beskryf die transformasie gebruik om die tweede funksie te verkry. Toon alle asimptote.

    a) $y = \frac{2}{x}$ en $\frac{2}{x} + 2$
    b) $y = \frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$
    c) $y = \frac{3}{x}$ en $y = \frac{3x+3}{x}$
    d) $y = \frac{3}{x}$ en $y = -\frac{3}{x}$

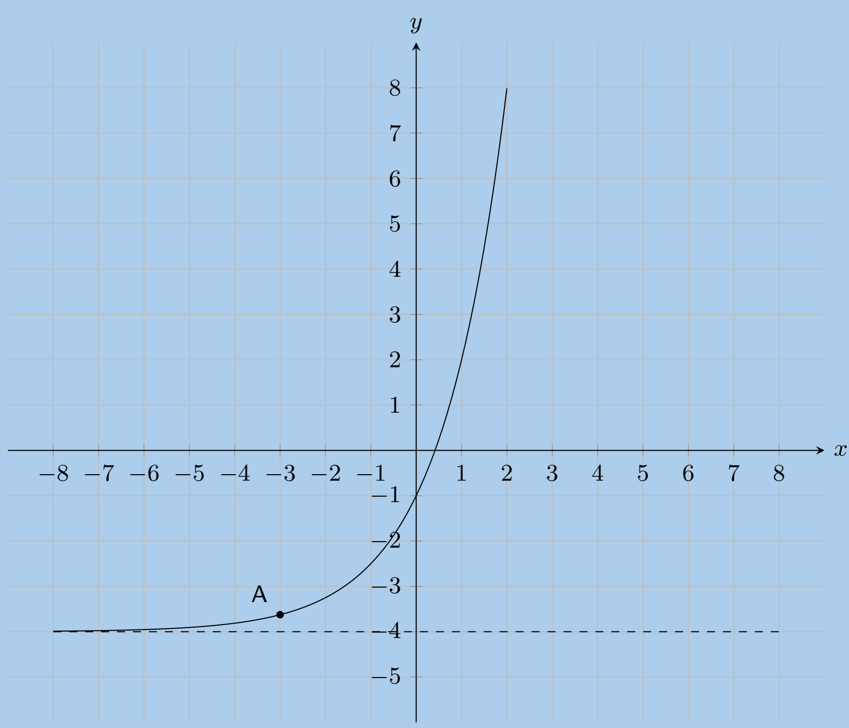
23. Gegewe die volgende vergelyking:
    $y = -\frac{1}{2} \cdot (4)^x + 3$

    a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
    b) Bereken nou die x-afsnit. Benader jou antwoord tot een desimale plek waar nodig.

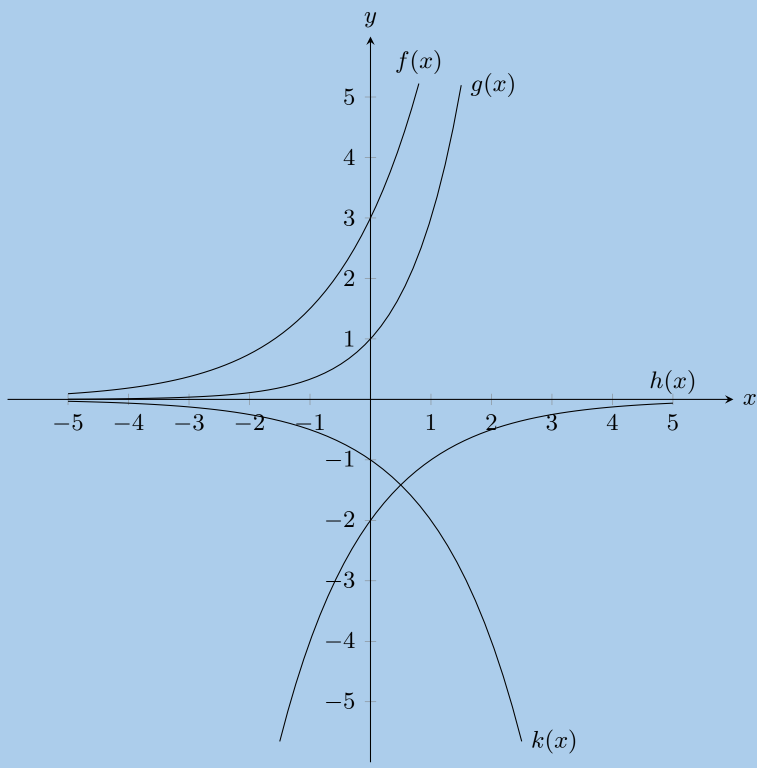
24. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

    a) $y = 3^x + 2$
    b) $y = -4 \times 2^x$
    c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

25. Die vorm van die gegewe kromme is $y = a \cdot 2^x + q$. Een punt op die kromme is gegee: **Punt A** is by $(-3; -3{,}625)$. Vind die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.



26. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y = 3{,}2^x$ c) $y = -2^x$ d) $y = 3^x$

27. Gebruik die funksies $f(x) = 3 - x, g(x) = 2x^2 - 4; h(x) = 3^x - 4; k(x) = \frac{3}{2x} - 1$, om die waarde van die volgende te vind:

a) $f(7)$ b) $g(1)$ c) $h(-4)$ d) $k(5)$
e) $f(-1) + h(-3)$ f) $h(g(-2))$ g) $k(f(6))$

28. Bepaal of die volgende bewerings waar of onwaar is. As die bewering onwaar is, gee redes waarom.

a) Die gegewe of gekose y-waarde staan bekend as die onafhanklike veranderlike.
b) 'n Grafiek is kontinu as daar onderbrekings in die grafiek is.
c) Funksies van die vorm $y = ax + q$ is reguitlyne.
d) Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is eksponensiële funksies.
e) 'n Asimptoot is 'n reguitlyn wat 'n grafiek ten minste eenmaal sal sny.
f) Gegee 'n funksie van die vorm $y = ax + q$. Om die y-afsnit te kry, stel $x = 0$ en los op vir y.

29. Gegee die funksies $f(x) = 2x^2 - 6$ en $g(x) = -2x + 6$.

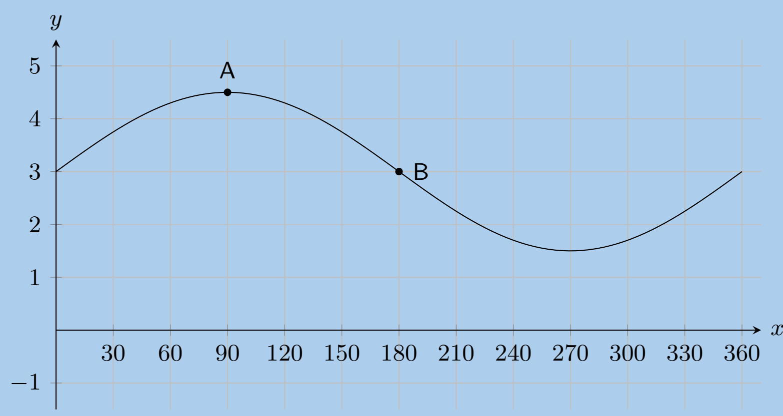
a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel.
b) Bereken die snypunte van f en g.
c) Gebruik jou grafieke en die snypunte om vir x op te los wanneer:
   i. $f(x) > 0$
   ii. $g(x) < 0$
   iii. $f(x) \leq g(x)$
d) Gee die vergelyking van die refleksie van f in die x-as.

30. As 'n bal laat val word, neem die hoogte wat die bal terugbons af met elke bons. Die vergelyking $y = 5(0{,}8)^x$ toon die verband tussen die aantal terugbonse x en die hoogte van die bons y vir 'n sekere bal. Wat is die benaderde hoogte van die vyfde bons van hierdie bal tot die naaste tiende van 'n eenheid?

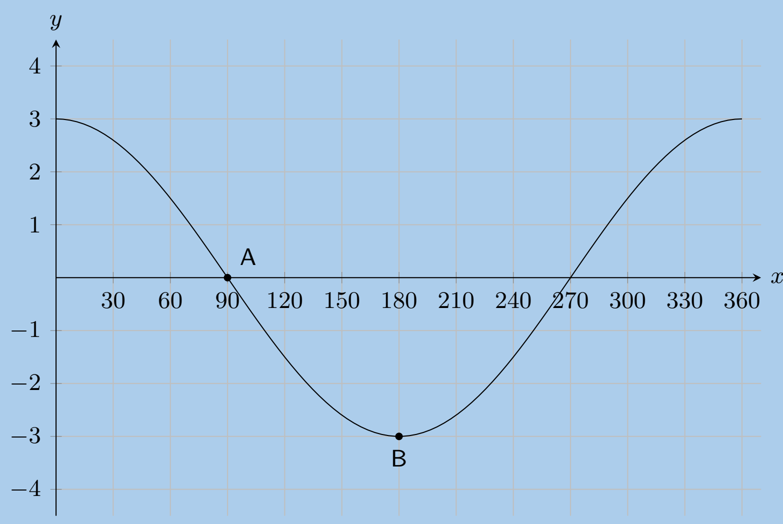
31. Mark het 15 muntstukke in R 5 en R 2 munte. Hy het 3 meer R 2 munte as R 5 munte. Hy stel 'n stelsel van vergelykings op om die situasie voor te stel, waar x die aantal R 5 munte voorstel, terwyl y die aantal R 2 munte voorstel. Toe los hy die vergelykings op met behulp van grafieke.

    a) Skryf die stelsel van vergelykings neer.
    b) Trek die grafieke op dieselfde assestelsel.
    c) Gebruik jou sketse en bepaal hoeveel R 5 en R 2 stukke Mark het.

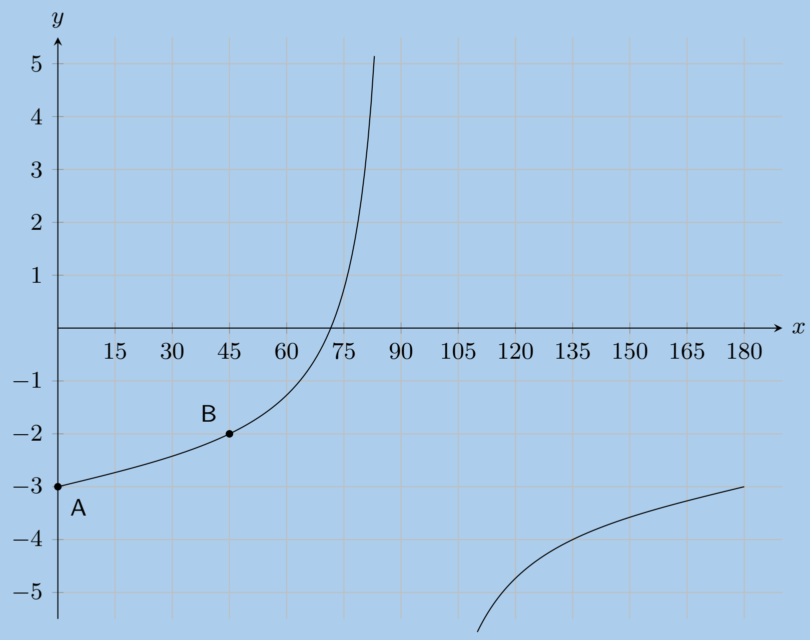
32. Die volgende grafiek toon 'n funksie van die vorm: $y = a\sin\theta + q$ waar **Punt A** is by $(90°; 4{,}5)$, en **Punt B** is by $(180°; 3)$. Bepaal die waardes van a en q.



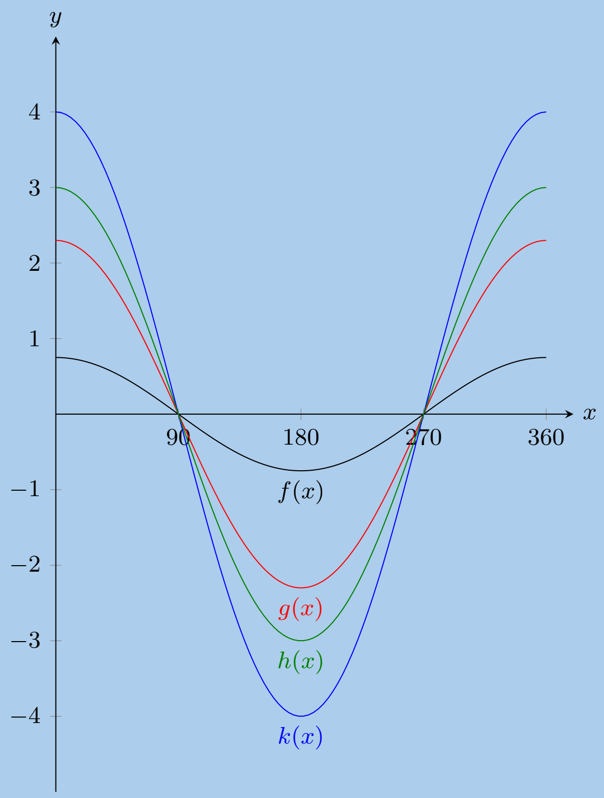
33. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a\cos\theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(90°; 0)$, en **Punt B** is by $(180°; -3)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



34. Op die grafiek hieronder sien jy 'n tangenskromme van die volgende vorm: $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is by $(0°; -3)$, en **Punt B** is by $(45°; -2)$.
Bereken, of bepaal andersins, die waardes van a en q.

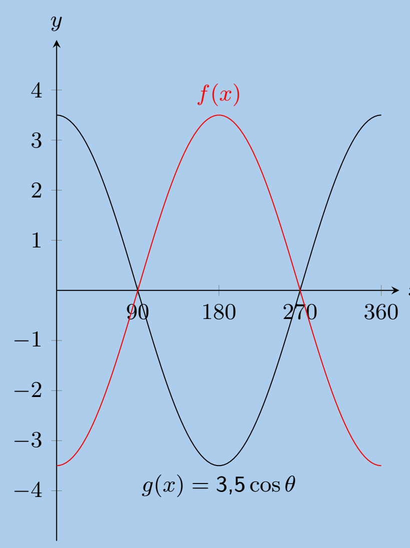


35. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = 2{,}3\cos\theta$
b) $y = 0{,}75\cos\theta$
c) $y = 4\cos\theta$
d) $y = 3\cos\theta$

36. Die grafiek toon funksies $f(x)$ en $g(x)$.



Wat is die vergelyking vir $f(x)$

37. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\tan\theta$	0	1	ongedefinieerd	-1	0	1	ongedefinieerd	-1	0
$2\tan\theta$	0	2	ongedefinieerd	-2	0	2	ongedefinieerd	-2	0
$\frac{1}{3}\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}$	ongedefinieerd	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	ongedefinieerd	$-\frac{1}{3}$	0

38. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

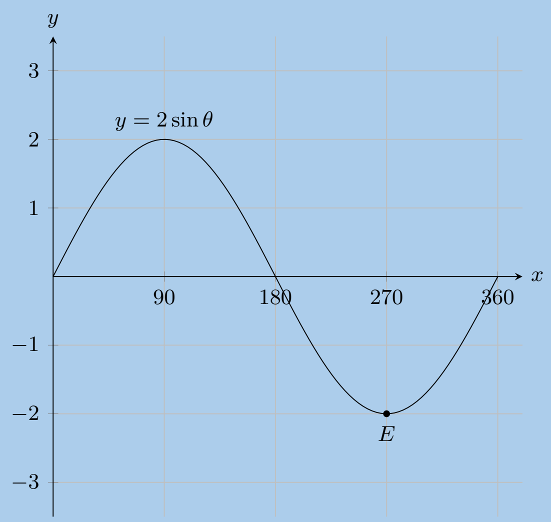
θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta + 1$	1	2	1	0	1
$\sin\theta + 2$	3	2	2	1	2
$\sin\theta - 2$	-2	-1	-2	-3	-2

39. Skets die grafieke van die volgende trigonometriese funksies vir $\theta \in [0°; 360°]$. Toon die afsnitte en asimptote.

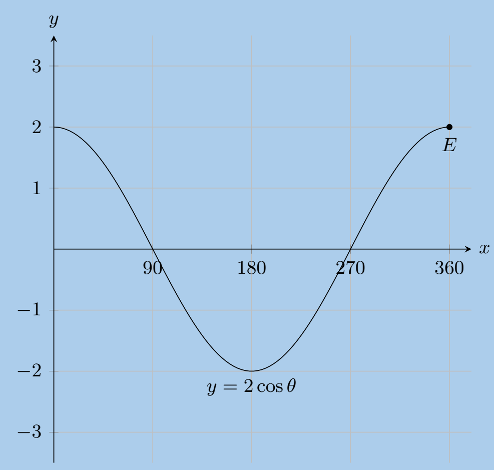
a) $y = -4\cos\theta$ b) $y = \sin\theta - 2$ c) $y = -2\sin\theta + 1$ d) $y = \tan\theta + 2$ e) $y = \dfrac{\cos\theta}{2}$

40. Noem die koördinate by E en die terrein van die funksie.

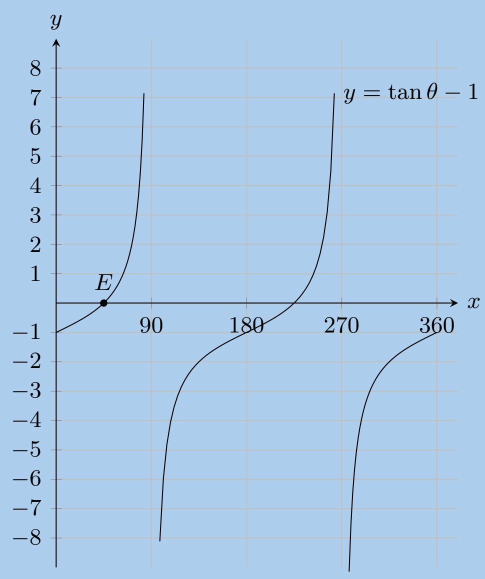
a)



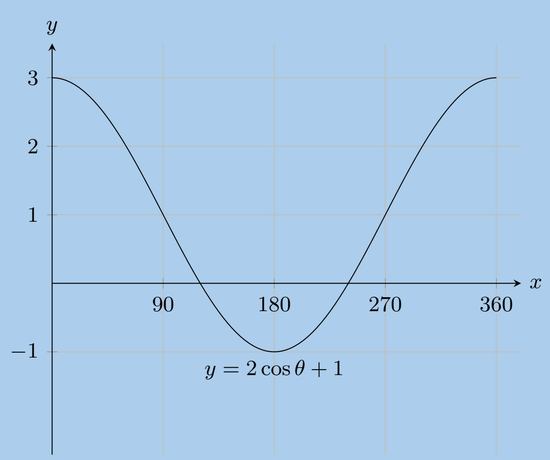
b)



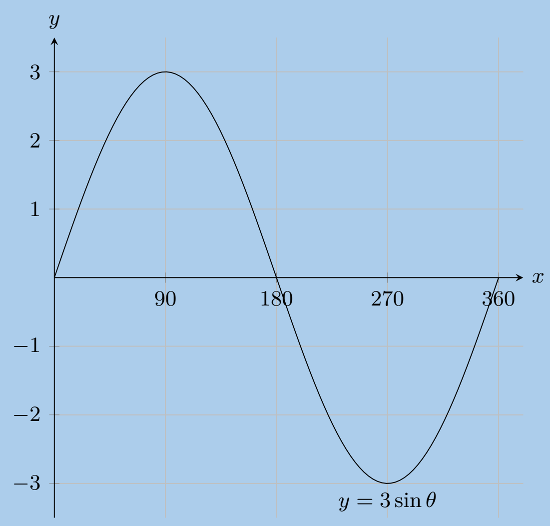
41. Meld die koördinate by E en die gebied en die terrein van die funksie in die gegewe interval.



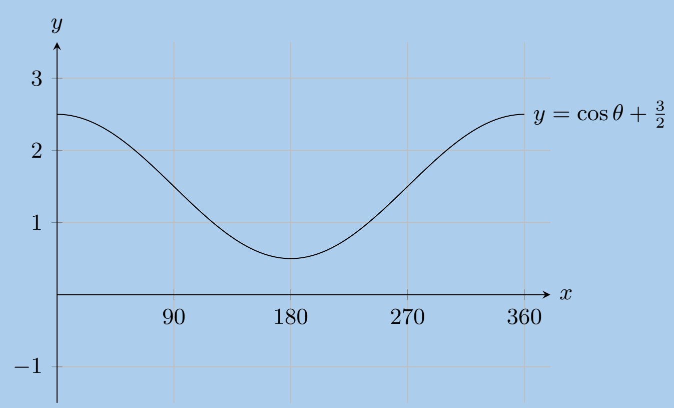
42. Vir watter waardes van θ neem die funksie af in die gegewe interval?



43. Vir watter waardes van θ is die funksie toenemend in die gegewe interval?

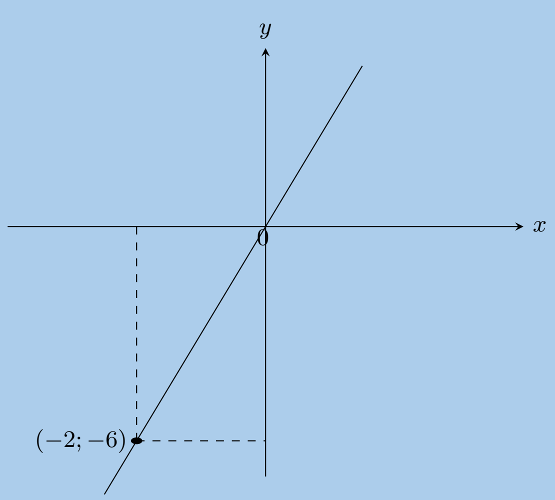


44. Vir watter waardes van θ is die funksie positief in die gegewe interval?

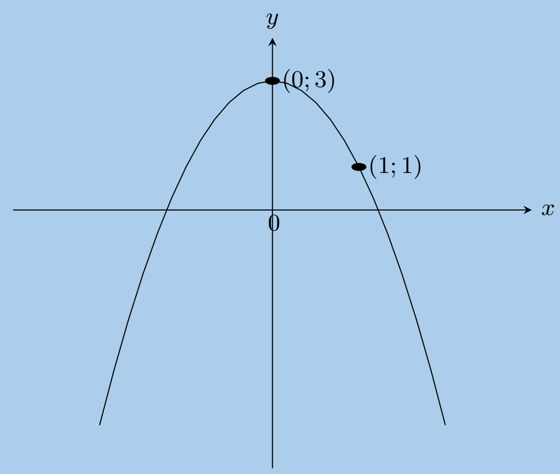


45. Gegee die algemene vergelykings $y = mx + c$, $y = ax^2 + q$, $y = \dfrac{a}{x} + q$, $y = a\,.\,b^x + q$, $y = a\sin\theta + q$, $y = a\cos\theta + q$ en $y = a\tan\theta + q$, bepaal die spesifieke vergelykings vir elk van die volgende grafieke.

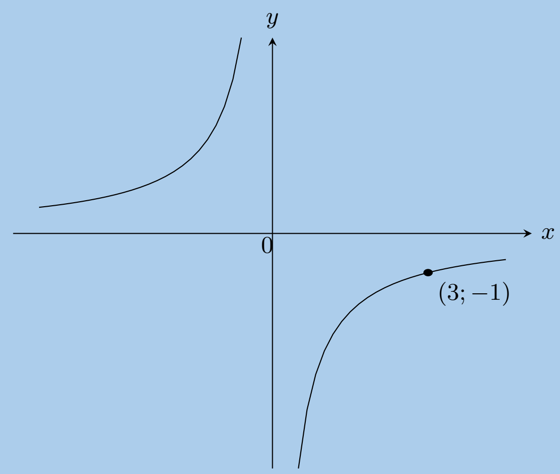
a)



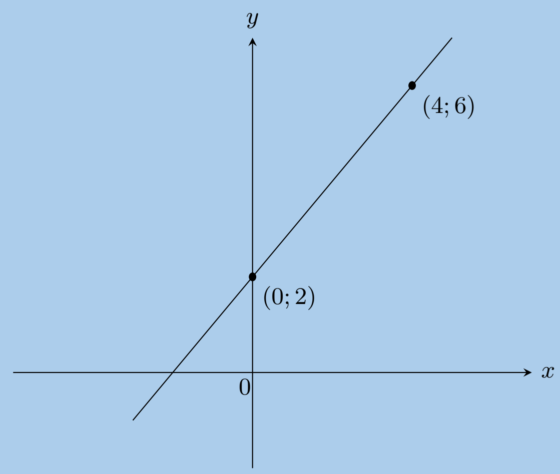
b)



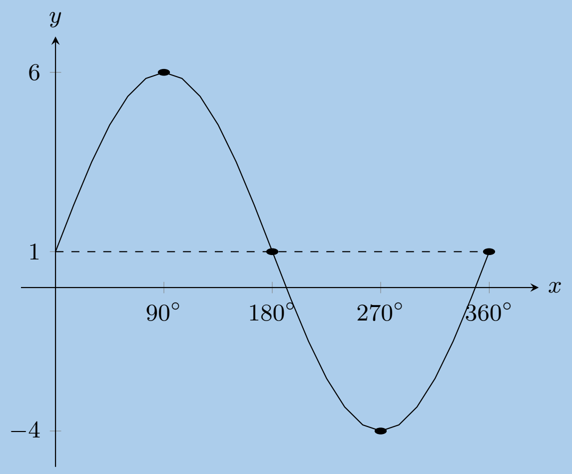
c)



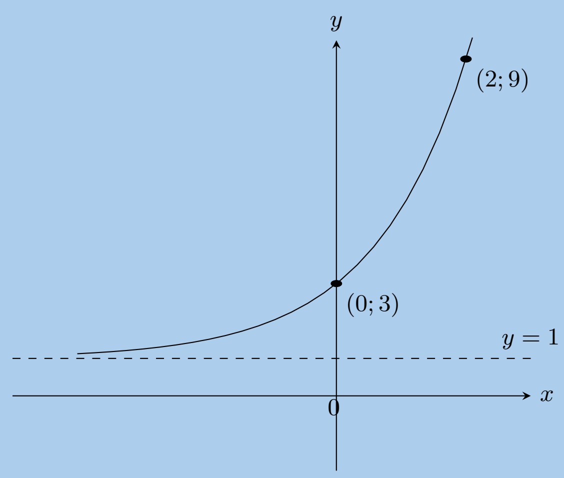
d)



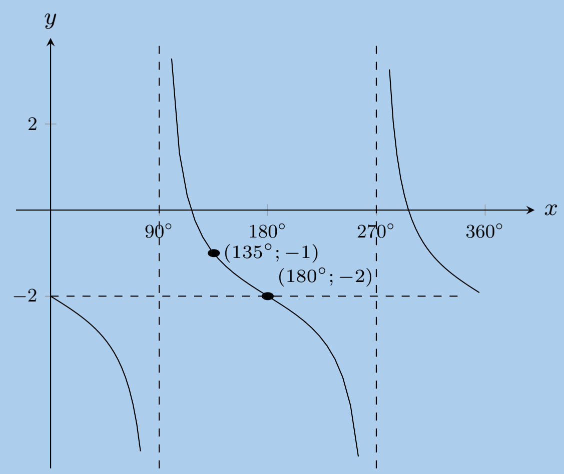
e)



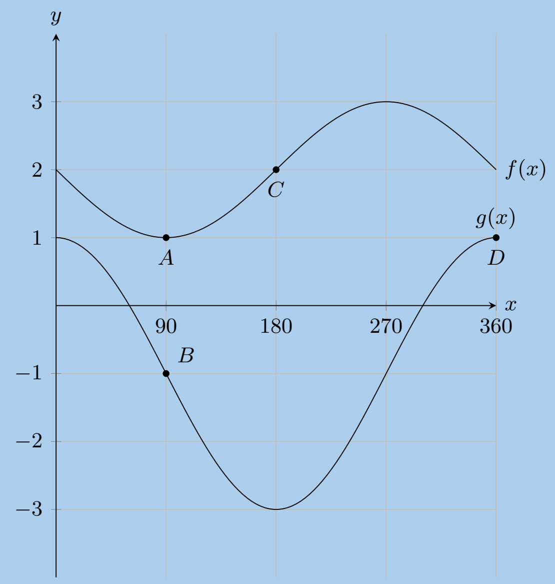
f)



g)



46.



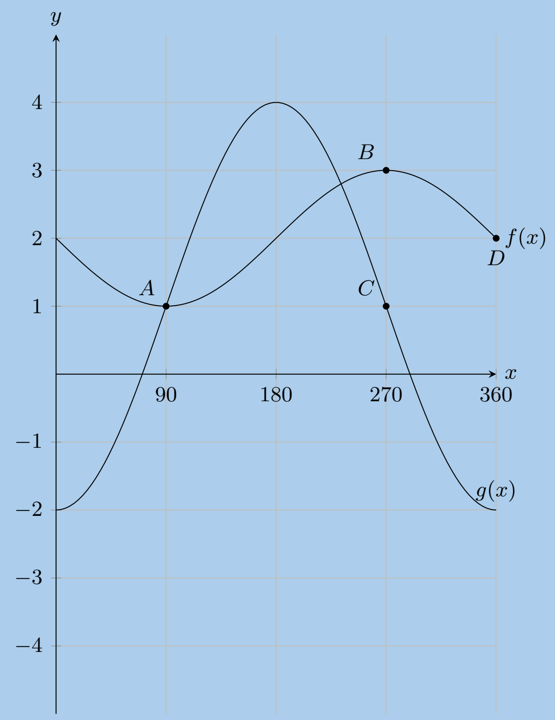
a) Noem die koördinate by $A,\ B,\ C$ en D.

b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?

c) Wat is die amplitude van $f(x)$?

d) Bereken: $f(180°) - g(180°)$.

47.



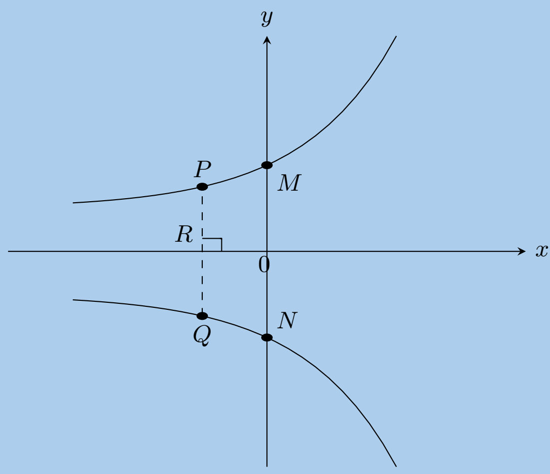
a) Noem die koördinate by $A,\ B,\ C$ en D.

b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?

c) Wat is die amplitude van $g(x)$?

d) Evalueer: $g(180°) - f(180°)$.

48. $y = 2^x$ en $y = -2^x$ is hieronder geskets. Beantwoord die volgende vrae.

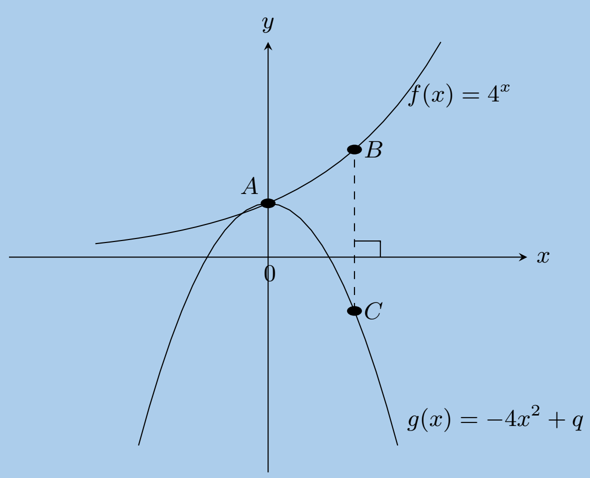


a) Bereken die koördinate van M en N.
b) Bereken die lengte van MN.
c) Bereken die lengte van PQ as $OR = 1$ eenheid.
d) Gee die vergelyking van $y = 2^x$ gereflekteer rondom die y-as.
e) Gee die terrein van beide grafieke.

49. Teken die volgende funksies op dieselfde assestelsel en merk al die snypunte duidelik.

a) $y = -2x^2 + 3$ en $y = 2x + 4$
b) $y = x^2 - 4$ en $y = 3x$

50. $f(x) = 4^x$ en $g(x) = -4x^2 + q$ is hieronder geskets. Die punte $A(0; 1)$ en $B(1; 4)$ word gegee. Beantwoord die volgende vrae.



a) Bepaal die waarde van q.
b) Bereken die lengte van BC.
c) Gee die vergelyking van $f(x)$ gereflekteer rondom die x-as.
d) Gee die vergelyking van$f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met 1 eenhede.
e) Gee die vergelyking van die asimptote van $f(x)$.
f) Gee die terrein van $f(x)$ en $g(x)$.

51. Gegee $h(x) = x^2 - 4$ en $k(x) = -x^2 + 4$. Beantwoord die vrae wat volg.

a) Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel.

b) Beskryf die verband tussen h en k.

c) Gee die vergelyking van $k(x)$ gereflekteer in die lyn $y = 4$.

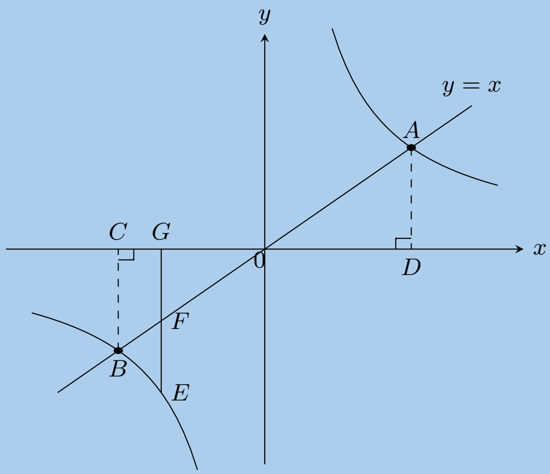
d) Gee die gebied en terrein van h.

52. Skets die grafieke van $f(\theta) = 2\sin\theta$ en $g(\theta) = \cos\theta - 1$ op dieselfde assestelsel. Gebruik jou skets om die volgende te bepaal:

a) $f(180°)$ b) $g(180°)$ c) $g(270°) - f(270°)$

d) Die gebied en terrein van g. e) Die amplitude en periode van f.

53. Die grafieke van $y = x$ en $y = \frac{8}{x}$ word getoon in die volgende diagram.



Bereken:

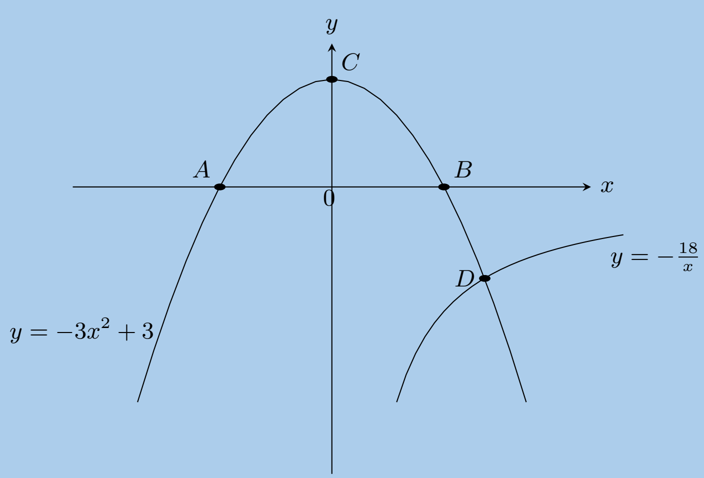
a) Die koördinate van punte A en B.

b) Die lengte van CD.

c) Die lengte van AB.

d) Die lengte van EF, gegewe $G(-2; 0)$.

54. Gegee die diagram met $y = -3x^2 + 3$ en $y = -\frac{18}{x}$.



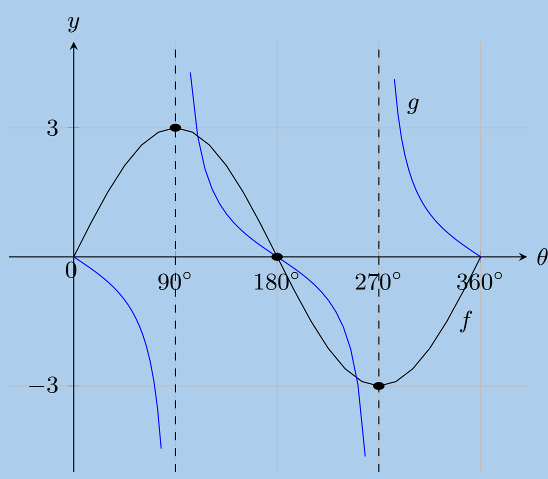
a) Bereken die koördinate van A, B en C.

b) Beskryf in woorde wat gebeur by die punt D.

c) Bereken die koördinate van D.

d) Bereken die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punte C en D gaan.

55. Die diagram toon die grafiek van $f(\theta) = 3\sin\theta$ en $g(\theta) = -\tan\theta$



a) Gee die gebied van g.

b) Wat is die amplitude van f?

c) Bepaal vir watter waardes van θ:

i. $f(\theta) = 0 = g(\theta)$

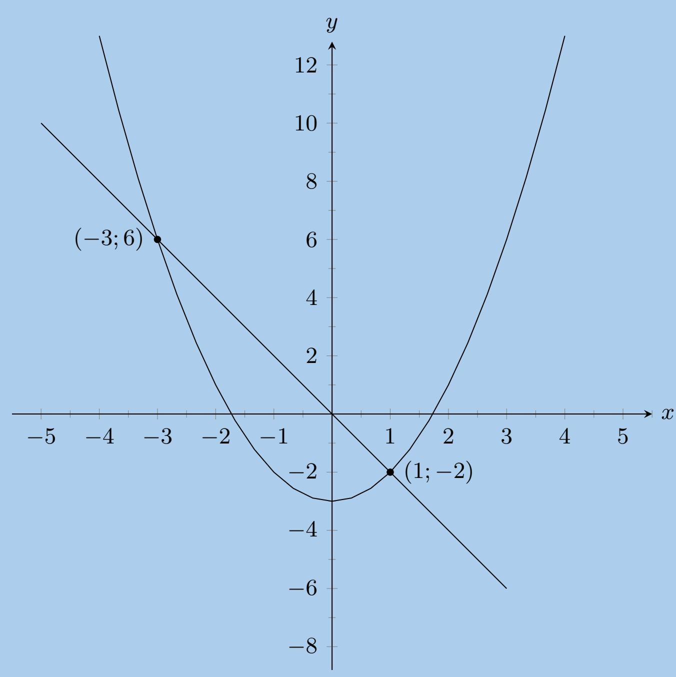
ii. $f(\theta) \times g(\theta) < 0$

iii. $\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)} > 0$

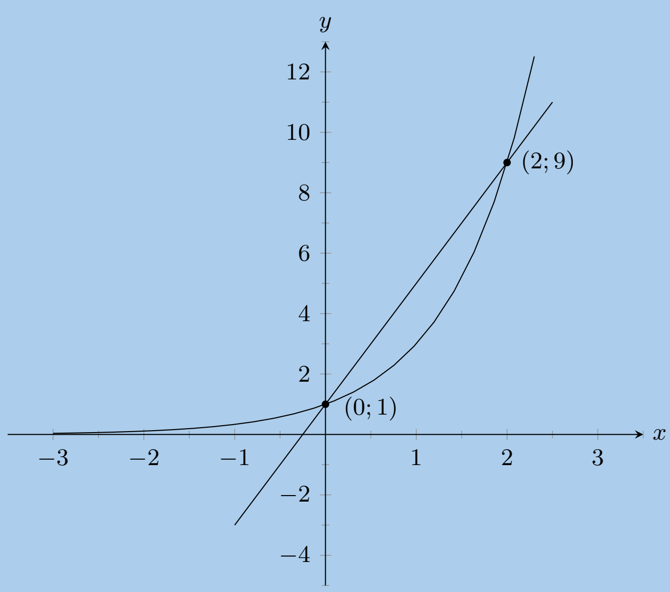
iv. neem $f(\theta)$ toe

56. Bepaal die vergelykings van die grafieke hieronder.

a)



b)



57. Kies die korrekte antwoord:

    a) Watter van die volgende het nie 'n gradiënt van 3 nie?

       i. $y = 3x + 6$ ii. $3y = 9x - 1$ iii. $\frac{1}{3}(y - 1) = x$ iv. $\frac{1}{2}(y - 3) = 6x$

    b) Die asimptoot van $xy = 3 + x$ is:

       i. 3 ii. 1 iii. -3 iv. -1

58. Skets die volgende

    a) $y = -1{,}5^x$

    b) $xy = 5 + 2x$

    c) $2y + 2x = 3$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JPC	1b. 2JPD	2a. 2JPF	2b. 2JPG	3a. 2JPH	3b. 2JPJ
4a. 2JPK	4b. 2JPM	5. 2JPN	6. 2JPP	7a. 2JPQ	7b. 2JPR
7c. 2JPS	8a. 2JPT	8b. 2JPV	9a. 2JPW	9b. 2JPX	9c. 2JPY
10. 2JPZ	11. 2JQ2	12. 2JQ3	13. 2JQ4	14. 2JQ5	15. 2JQ6
16a. 2JQ7	16b. 2JQ8	16c. 2JQ9	17. 2JQB	18. 2JQC	19. 2JQD
20. 2JQF	21a. 2JQG	21b. 2JQH	21c. 2JQJ	22a. 2JQK	22b. 2JQM
22c. 2JQN	22d. 2JQP	23. 2JQQ	24a. 2JQR	24b. 2JQS	24c. 2JQT
25. 2JQV	26. 2JQW	27. 2JQX	28a. 2JQY	28b. 2JQZ	28c. 2JR2
28d. 2JR3	28e. 2JR4	28f. 2JR5	29. 2JR6	30. 2JR7	31. 2JR8
32. 2JR9	33. 2JRB	34. 2JRC	35. 2JRD	36. 2JRF	37. 2JRG
38. 2JRH	39a. 2JRJ	39b. 2JRK	39c. 2JRM	39d. 2JRN	39e. 2JRP
40a. 2JRQ	40b. 2JRR	41. 2JRS	42. 2JRT	43. 2JRV	44. 2JRW
45. 2JRX	46. 2JRY	47. 2JRZ	48. 2JS2	49a. 2JS3	49b. 2JS4
50. 2JS5	51. 2JS6	52. 2JS7	53. 2JS8	54. 2JS9	55. 2JSB
56a. 2JSC	56b. 2JSD	57a. 2JSF	57b. 2JSG	58a. 2JSH	58b. 2JSJ
58c. 2JSK					

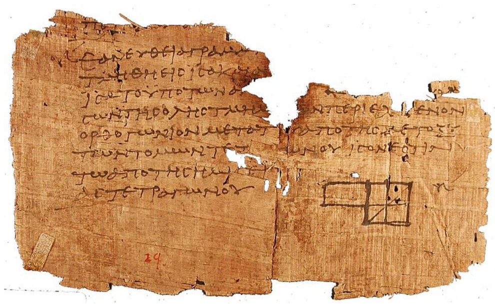
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 7

Euklidiese meetkunde

Meetkunde of Geometrie (vanaf Grieks “geo” = aarde en “metria” = meting) het ontstaan as die veld van kennis wat ruimtelike verwantskappe hanteer. Meetkundige kennis kan op verskillende maniere ondersoek en gebruik word, onder andere as Euklidiese meetkunde of as analitiese meetkunde. Analitiese meetkunde hanteer ruimte en vorm met behulp van algebra en ’n koördinaatstelsel. Euklidiese meetkunde hanteer ruimte en vorm met ’n sisteem van logiese afleidings.

Eukildiese meetkunde is eerste aangewend in landmeting en dit word vandag nog uitgebreid gebruik vir die opmeting van grond. Eukilidiese meetkunde word ook gebruik in argitektuur en die ontwerp van nuwe geboue. Ander gebruike van Euklidiese meetkunde is in kuns en om die beste ruimtelike verpakking van verskeie voorwerpe te bepaal.



Figuur 7.1: ’n Klein stukkie van die oorspronklike kopie van Euklides se Elemente. Euklidies word beskou as die vader van moderne meetkunde. Euklides se Elemente is vir baie jare gebruik as die standaardwerk vir meetkunde.

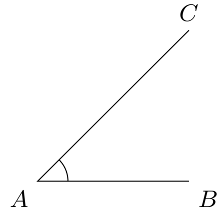
BESOEK:
Hierdie video beklemtoon sommige van die basiese konsepte wat gebruik word in meetkunde.
Sien video: 2JSM at www.everythingmaths.co.za

HET JY GEWEET?
In Eukildiese meetkunde gebruik ons twee fundamentele tipes meting: die meting van hoeke en van afstande.

7.1 Inleiding EMD5M

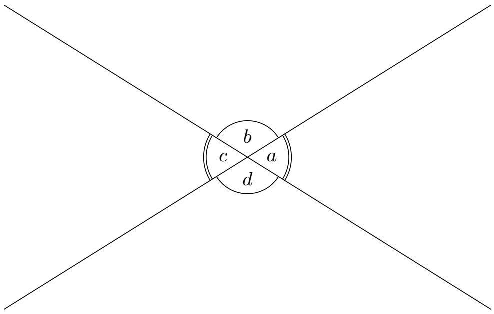
Hoeke EMD5N

’n Hoek word gevorm wanneer twee reguitlyne ontmoet by ’n punt, ook genoem die hoekpunt. Hoeke word aangedui met ’n kappie op ’n letter, byvoorbeeld, $\hat{B}$. Hoeke kan ook benoem word volgens die lynsegmente wat die hoek vorm, byvoorbeeld $C\hat{B}A$ of $A\hat{B}C$. Die $\angle$ simbool is ’n kort metode om ’n hoek te skryf in meetkunde en dit word dikwels gebruik in frases soos ”$\angle$e van $\triangle$”. Hoeke word gemeet in grade wat aangedui word deur °, ’n klein sirkeltjie regs bokant die syfer, soortgelyk aan ’n eksponent.



Eienskappe en notasie EMD5P

In die diagram hieronder sny twee reguitlyne in 'n punt en vier hoeke word gevorm: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ en $\hat{d}$.



Die volgende tabel som die verskillende tipes hoeke op, met voorbeelde uit die figuur hierbo.

Term	**Eienskap**	**Voorbeelde**
Skerphoek	$0° <$ hoek $< 90°$	$\hat{a}$; $\hat{c}$
Regte hoek	Hoek $= 90°$	
Stomphoek	$90° <$ hoek $< 180°$	$\hat{b}$; $\hat{d}$
Reguitlyn	Hoek $= 180°$	$\hat{a}+\hat{b}$; $\hat{b}+\hat{c}$
Reflekse hoek	$180° <$ hoek $< 360°$	$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}$
Aangrensende hoeke	Hoeke wat 'n hoekpunt en 'n gemeenskaplike sy deel.	$\hat{a}$ en $\hat{d}$; $\hat{c}$ en $\hat{d}$
Regoorstaande hoeke	Hoeke regoor mekaar wanneer twee lyne sny. Hulle deel 'n hoekpunt en is ewe groot.	$\hat{a}=\hat{c}$; $\hat{b}=\hat{d}$
Supplementêre hoeke	Twee hoeke wat saam $180°$ is	$\hat{a}+\hat{b}=180°$; $\hat{b}+\hat{c}=180°$
Komplementêre hoeke	Twee hoeke wat saam $90°$ is	
Omwenteling	Die som van alle hoeke rondom 'n punt.	$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}=360°$

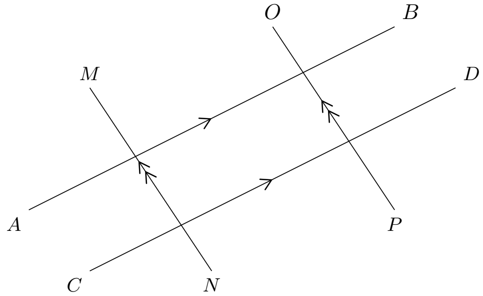
Let op dat aangrensende hoeke op 'n reguitlyn supplementêr is.

BESOEK:
Die volgende video verskaf 'n opsomming van die terme gebruik om te verwys na hoeke.
Sien video: 2JSN at www.everythingmaths.co.za

Ewewydige lyne en snydende lyne EMD5Q

Twee lyne sny as hulle mekaar by 'n punt kruis. Byvoorbeeld, by 'n verkeerskruising kruis twee of meer strate en die middel van die kruising is die gemeenskaplike punt tussen die strate.

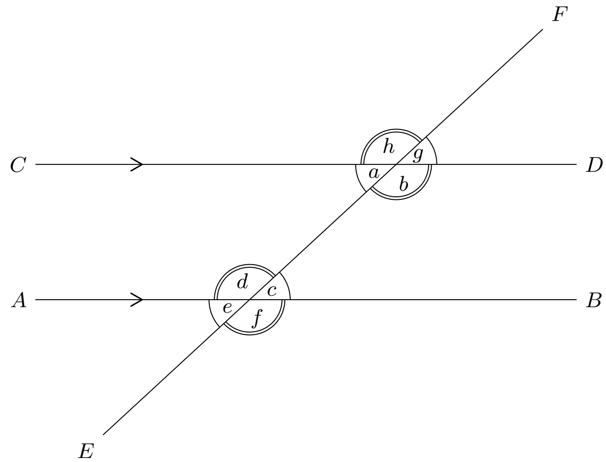
Ewewydige lyne is altyd dieselfde afstand van mekaar en hulle word aangedui met pyltjie-simbole soos hieronder aangedui.



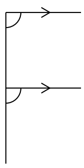
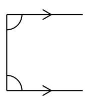
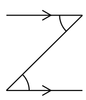
In skryfwerk gebruik ons twee vertikale strepies om aan te dui dat twee lyne ewewydig is:

$$AB \parallel CD \text{ en } MN \parallel OP$$

'n Snydende lyn twee of meer ewewydig lyne mekaar sny. In die diagram hieronder, $AB \parallel CD$ en EF is 'n snydende lyn.



Die eienskappe van die hoeke wat gevorm word deur hierdie snydende lyne, word opgesom in die volgende tabel:

Naam van hoek	Definisie	Voorbeelde	Notas
Binnehoeke	Hoeke wat tussen ewewydige lyne lê	$\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ en $\hat{d}$ is binnehoeke.	Binne beteken 'ingeslote tussen'.
Buitehoeke	Hoeke wat buite die ewewydige lyne lê.	$\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ en $\hat{h}$ is buitehoeke.	Buite beteken 'aan die buitekant van'.
Ooreenkomstige hoeke	Hoeke aan dieselfde kante van die lyne en aan dieselfde kant van die snylyn. As die lyne ewewydig is, sal die ooreenstemmende hoeke ewe groot wees.	$\hat{a}$ en $\hat{e}$, $\hat{b}$ en $\hat{f}$, $\hat{c}$ en $\hat{g}$, $\hat{d}$ en $\hat{h}$ is pare ooreenstemmende hoeke. $\hat{a} = \hat{e}$, $\hat{b} = \hat{f}$, $\hat{c} = \hat{g}$ en $\hat{d} = \hat{h}$.	 F vorm
Ko-binnehoeke	Hoeke wat tussen die lyne lê en aan dieselfde kant van die snylyn. As die lyne ewewydig is, is die hoeke supplementêr.	$\hat{a}$ en $\hat{d}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$ is pare van ko-binnehoeke. $\hat{a} + \hat{d} = 180°$, $\hat{b} + \hat{c} = 180°$.	 C vorm
Verwisselende binnehoeke	Binnehoeke wat binne die lyne lê en aan teenoorgestelde kante van die snylyn. As die lyne ewewydig is, sal die verwisselende binnehoeke ewe groot wees.	$\hat{a}$ en $\hat{c}$, $\hat{b}$ en $\hat{d}$ is pare verwisselende binnehoeke. $\hat{a} = \hat{c}$, $\hat{b} = \hat{d}$	 Z vorm

BESOEK:
Die video gee 'n kort opsomming van sommige van die hoeke wat gevorm word deur snydende lyne.
Sien video: 2JSP at www.everythingmaths.co.za

As twee lyne gesny word deur 'n snylyn sodat:

- ooreenstemmende hoeke ewe groot is; of
- verwisselende binnehoeke ewe groot is; of
- ko-binnehoeke aan dieselfde kant van die snylyn supplementêr is,

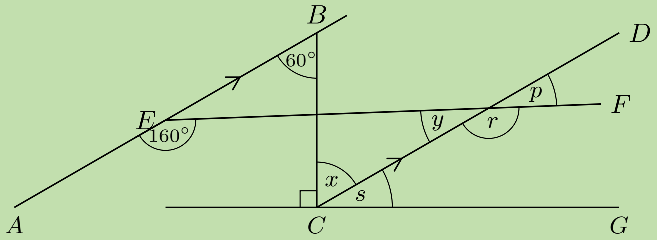
dan is die twee lyne ewewydig.

NOTA:
Wanneer ons verwys na lyne, kan ons of skryf EF, bedoelende die lyn deur punte E en F, of $\overline{EF}$, bedoelende die lyn segment van punt E tot punt F.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Vind hoeke

VRAAG

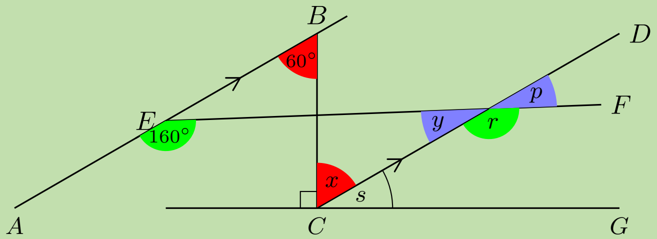
Vind al die onbekende hoeke. Is $EF \parallel CG$? Verduidelik jou antwoord.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die eienskappe van ewewydige lyne om alle gelyke hoeke op die diagram te vind

Teken die diagram oor en merk al die gelyke hoeke.



Stap 2: Bepaal die onbekende hoeke

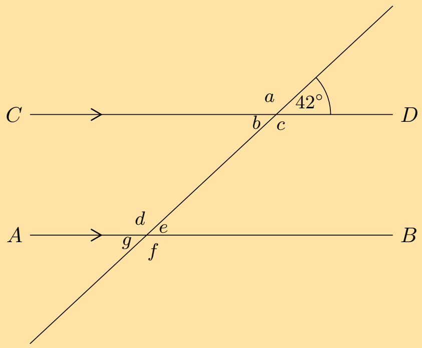
$$
\begin{aligned}
AB &\parallel CD && \text{(gegee)}\\
\therefore \hat{x} &= 60° && \text{(verw. } \angle\text{e; } AB \parallel CD)\\
\hat{y} + 160° &= 180° && \text{(ko-binne } \angle\text{e; } AB \parallel CD)\\
\therefore \hat{y} &= 20° && \\
\hat{p} &= \hat{y} && \text{(regoorst. } \angle\text{e)}\\
\therefore \hat{p} &= 20° && \\
\hat{r} &= 160° && \text{(ooreenk } \angle\text{e; } AB \parallel CD)\\
\hat{s} + \hat{x} + 90° &= 180° && (\angle\text{e op reguit lyn)}\\
\hat{s} + 60° &= 90° && \\
\therefore \hat{s} &= 30° &&
\end{aligned}
$$

Stap 3: Bepaal of $EF \parallel CG$

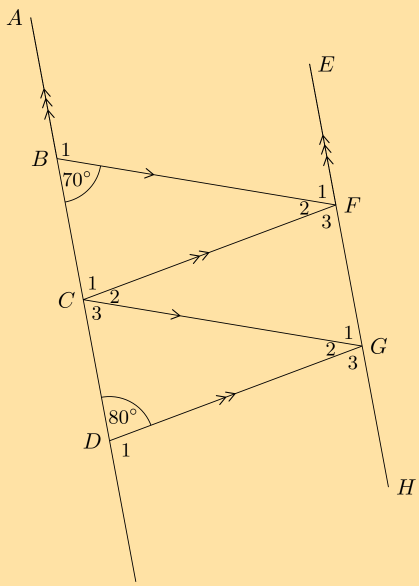
As $EF \parallel CG$ dan sal $\hat{p}$ gelyk wees aan ooreenstemmende hoek $\hat{s}$, maar $\hat{p} = 20°$ en $\hat{s} = 30°$. Dus is EF nie ewewydig aan CG nie.

Oefening 7 – 1:

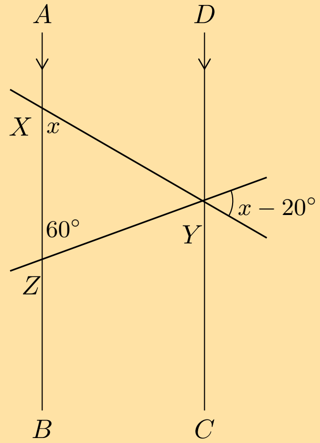
1. Gebruik aangrensende, ooreenstemmende, ko-binnehoeke en verwisselende binnehoeke om al die hoeke in die diagram met letters te bereken:



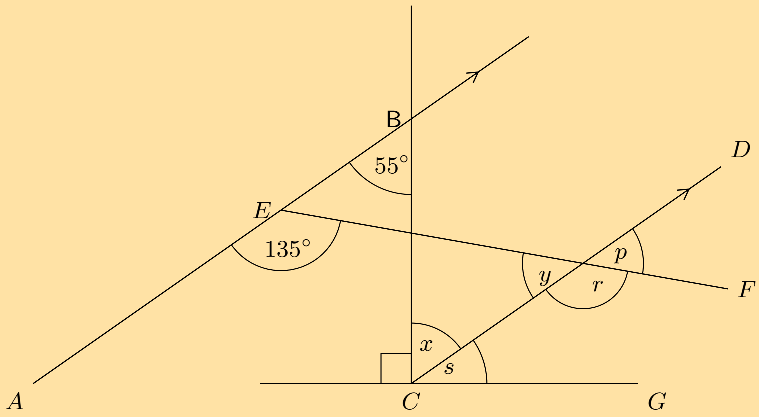
2. Vind al die onbekende hoeke in die figuur:



3. Vind die waarde van x in die figuur:

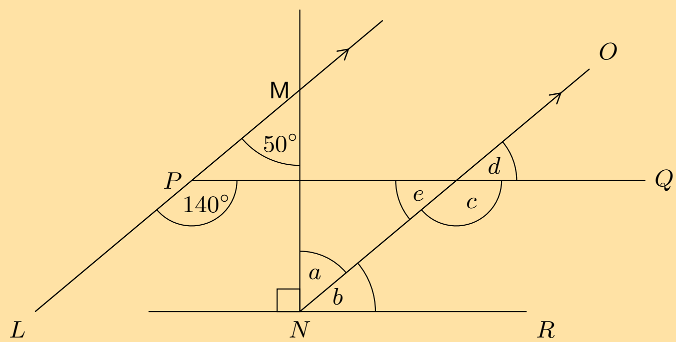


4. Gegee die diagram hieronder:



   a) Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat tot die antwoord sal lei in een enkele stap.
   b) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $EF \parallel CG$?

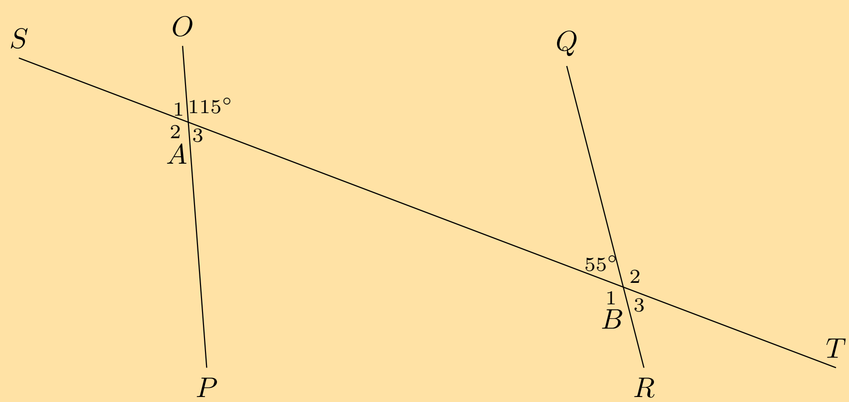
5. Gegee die die diagram hieronder:



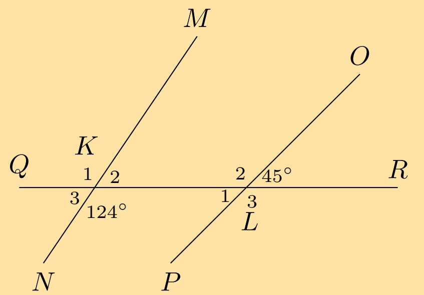
   a) Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat tot die antwoord sal lei in een enkele stap.
   b) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $PQ \parallel NR$?

6. Bepaal of die pare lyne in die volgende figure ewewydig is:

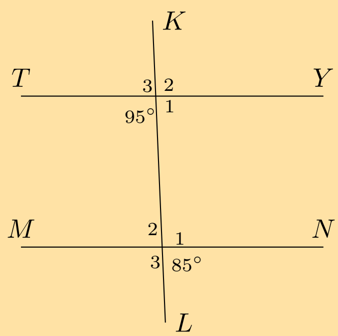
   a)



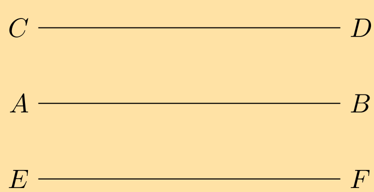
b)



c)



7. As AB ewewydig is aan CD en AB ewewydig is aan EF, verduidelik waarom CD ewewydig moet wees aan EF.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JSQ 2. 2JSR 3. 2JSS 4. 2JST 5. 2JSV 6a. 2JSW 6b. 2JSX 6c. 2JSY 7. 2JSZ

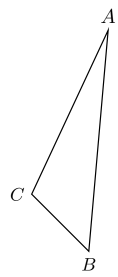
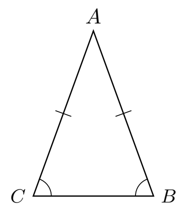
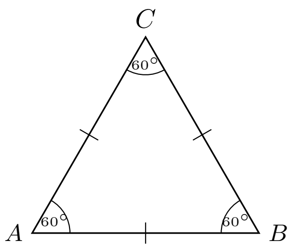
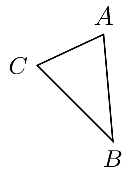
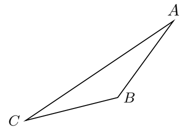
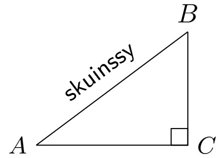
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.2 Driehoeke EMD5R

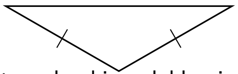
Klassifikasie van driehoeke EMD5S

'n Driehoek is 'n driekantige veelhoek. Driehoeke kan geklassifiseer word volgens sye: gelyksydig, gelykbenig en ongelyksydig. Driehoeke kan ook geklassifiseer word volgens hoeke: skerphoekig, stomphoekig en reghoekig.

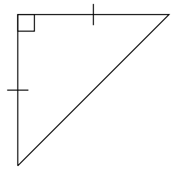
Ons gebruik die notasie $\triangle ABC$ om te verwys na 'n driehoek met hoekpunte A, B en C.

Naam	Diagram	Eienskappe
Ongelyksydig		Al die sye en hoeke is verskillend.
Gelykbenig		Twee sye is ewe lank. Die hoeke teenoor gelyke sye is ook ewe groot.
Gelyksydig		Al drie sye is ewe lank en al drie hoeke is ewe groot.
Skerphoekig		Elk van die drie binnehoeke is kleiner as $90°$.
Stomphoekig		Een binnehoek is groter as $90°$.
Reghoekig		Een binnehoek is $90°$.

Verskillende kombinasies van hierdie eienskappe is ook moontlik. Byvoorbeeld, 'n stomphoekige gelykbenige driehoek en 'n reghoekige gelykbenige driehoek word hieronder getoon.



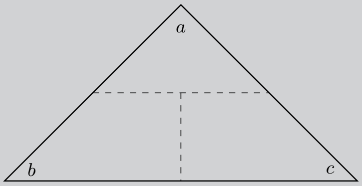
stomphoekig gelykbenige



reghoekige gelykbenige

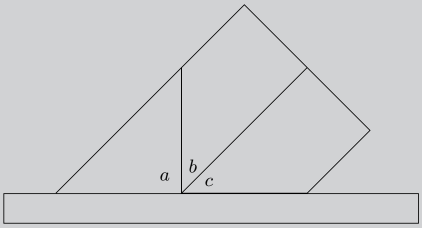
BESOEK:
Die video toon die verskillende maniere om driehoeke te klassifiseer.
Sien video: 2JT2 at www.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Binnehoeke van ’n driehoek

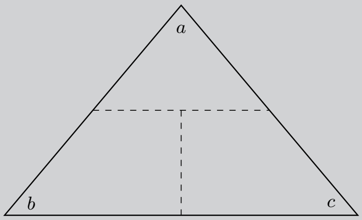


1. Trek ’n driehoek van enige grootte en vorm op ’n stuk papier.
2. Sny dit uit en benoem die hoeke $\hat{a}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$ op beide kante van die papier.
3. Trek stippellyne soos getoon en sny langs die lyne om drie stukkies papier te kry.
4. Plaas hulle langs jou liniaal soos getoon in die figuur hieronder.
5. Tot watter gevolgtrekking kan ons kom?

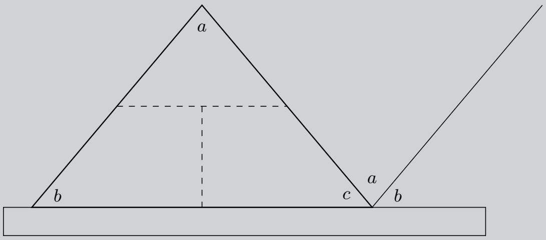
Wenk: Wat is die som van die hoeke op ’n reguitlyn?



Ondersoek: Buitehoeke van ’n driehoek



1. Trek ’n driehoek van enige grootte en vorm op ’n stuk papier. Maak ’n kopie van die driehoek op ’n ander stuk papier.
2. Sny beide uit en benoem die hoeke van beide driehoeke $\hat{a}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$ aan beide kante van die papier.
3. Trek stippellyne op **een** driehoek soos getoon en sny langs die lyne.
4. Plaas die tweede driehoek en die uitgesnyde stukkies soos getoon in die figuur hieronder.
5. Tot watter gevolgtrekking kan ons kom?

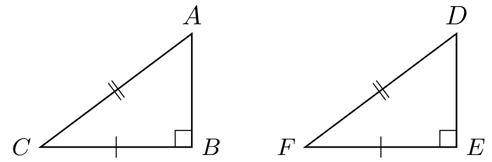
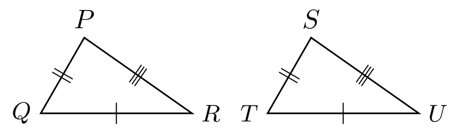
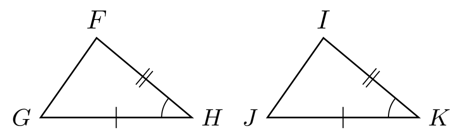
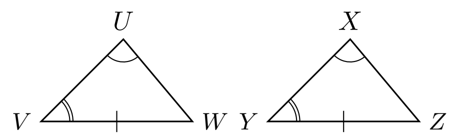


BESOEK:
Ons kan die feit gebruik dat die hoeke in 'n driehoek saam 180° is om uit te werk wat die som van die buitehoeke van 'n pentagoon, of 'n vyfhoek, is. Die video wys jou hoe om dit te doen.
Sien video: 2JT3 at www.everythingmaths.co.za

Kongruensie EMD5T

Twee driehoeke is kongruent as die een presies op die ander een pas. Dit beteken die driehoeke het hoeke en sye wat ooreenstemmend ewe groot is. Om te bepaal of die twee driehoeke kongruent is, is dit nodig om elke sy en elke hoek te kontroleer. Ons dui kongruensie aan met $\equiv$.

Die volgende tabel beskryf die voorwaardes vir kongruensie:

Reël	Beskrywing	Diagram
90°SkS (90°,skuinssy, sy)	As die skuinssy en een ander sy van 'n reghoekige driehoek ooreenstemmend gelyk is aan die skuinssy en 'n nog 'n sy van 'n ander reghoekige driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$
SSS (sy,sy,sy)	As drie sye van 'n driehoek ooreenstemmend net so lank is as die sye van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle PQR \equiv \triangle STU$
SHS of S∠S (sy,hoek,sy)	As twee sye en die **ingeslote** hoek van 'n driehoek ooreenstemmend gelyk is aan twee sye en die **ingeslote** hoek van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle FGH \equiv \triangle IJK$
HHS of ∠∠S (hoek,hoek,sy)	As een sy en twee hoeke van 'n driehoek ooreenstemmend gelyk is aan een sy en twee hoeke van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle UVW \equiv \triangle XYZ$

Die volgorde van die letters wanneer ons kongruente driehoeke benoem, is baie belangrik.

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Hierdie notasie dui die volgende eienskappe van twee driehoeke aan $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$, $AB = DE$, $AC = DF$ en $BC = EF$.

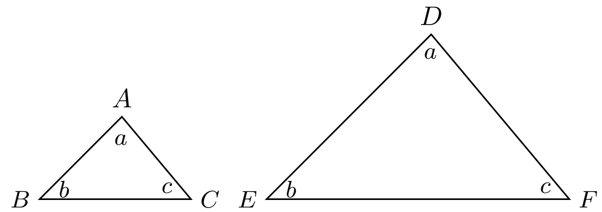
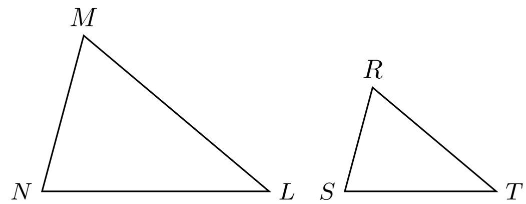
NOTA:
Jy mag $\cong$ sien wat gebruik word om te wys dat twee driehoeke kongruent is. Dit is die internasionaal erkende simbool vir kongruensie.

BESOEK:
Hierdie video toon 'n aantal oefenvoorbeelde vir die vind van kongruente driehoeke.
Sien video: 2JT4 at www.everythingmaths.co.za

Gelykvormigheid EMD5V

Twee driehoeke is gelykvormig as een driehoek 'n groter of kleiner, op-skaal weergawe van die ander een is. Dit beteken dat hulle ooreenstemmende hoeke ewe groot is en dat die verhouding van hulle ooreenstemmende sye eweredig is. Die twee driehoeke het dieselfde vorm, maar verskillende groottes. Kongruente driehoeke is gelykvormige driehoeke, maar nie alle gelykvormige driehoeke is kongruent nie. Ons gebruik $|||$ om aan te dui dat twee driehoeke gelykvormig is.

Die volgende tabel beskryf die vereistes vir gelykvormigheid:

Reël	**Beskrywing**	**Diagram**
HHH (hoek,hoek,hoek)	As al drie pare hoeke van twee ooreenstemmende driehoeke gelyk is, dan is die driehoeke gelykvormig.	 $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ $\therefore \triangle ABC \ \|\|\| \ \triangle DEF$
SSS (sy,sy,sy)	As al drie pare sye van twee ooreenstemmende driehoeke eweredig is, dan is die twee driehoeke gelykvormig.	 $\frac{MN}{RS} = \frac{ML}{RT} = \frac{NL}{ST}$ $\therefore \triangle MNL \ \|\|\| \ \triangle RST$

Die volgorde van letters vir gelykvormige driehoeke is baie belangrik. Benoem altyd gelykvormige driehoeke in ooreenstemmende volgorde. Byvoorbeeld:

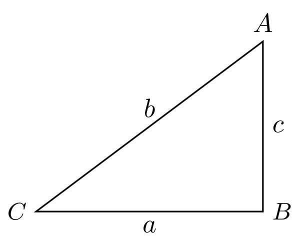
$\triangle MNL \ ||| \ \triangle RST$ is korrek; maar

$\triangle MNL \ ||| \ \triangle RTS$ is verkeerd

NOTA:
Jy mag $\sim$ sien wat gebruik word om te toon dat twee driehoeke gelykvormig is. Dit is die internasionaal erkende simbool vir gelykvormigheid.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik gelykvormige driehoeke.
Sien video: 2JT5 at www.everythingmaths.co.za

Die stelling van Pythagoras EMD5W



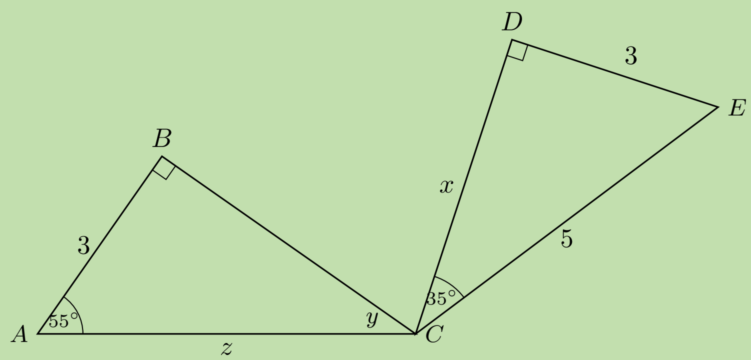
As $\triangle ABC$ 'n reghoekige driehoek is met $\hat{B} = 90°$, dan $b^2 = a^2 + c^2$.
Omgekeerde: As $b^2 = a^2 + c^2$, dan is $\triangle ABC$ reghoekig met $\hat{B} = 90°$.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik die stelling van Pythagoras en toon sommige voorbeelde van die gebruik van die stelling van Pythaogras.
Sien video: 2JT6 at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Driehoeke

VRAAG

Bepaal of die twee driehoeke kongruent is. Gebruik die resultaat om x, $\hat{y}$ en z te vind.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die inligting wat gegee is vir beide driehoeke

Stap 2: Bepaal of $\triangle CDE \equiv \triangle CBA$

In $\triangle CDE$:

$$\begin{aligned} \hat{D} + \hat{C} + \hat{E} &= 180° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ 90° + 35° + \hat{E} &= 180° \\ \therefore \hat{E} &= 55° \end{aligned}$$

In $\triangle CDE$ en $\triangle CBA$:

$$\begin{array}{rll} D\hat{E}C & = B\hat{A}C = 55° & \text{(bewys)} \\ C\hat{D}E & = C\hat{B}A = 90° & \text{(gegee)} \\ DE & = BA = 3 & \text{(gegee)} \\ \therefore \triangle CDE & \equiv \triangle CBA & \text{(HHS)} \end{array}$$

Stap 3: Bepaal die onbekende hoeke en sye

In $\triangle CDE$:

$$\begin{aligned} CE^2 &= DE^2 + CD^2 \qquad \text{(Pythagoras)} \\ 5^2 &= 3^2 + x^2 \\ x^2 &= 16 \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

In $\triangle CBA$:

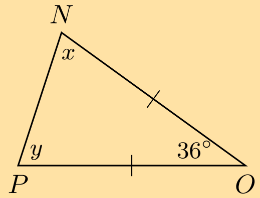
$$\begin{aligned} \hat{B} + \hat{A} + \hat{y} &= 180° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ 90° + 55° + \hat{y} &= 180° \\ \therefore \hat{y} &= 35° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle CDE &\equiv \triangle CBA \qquad (\text{bewys}) \\ \therefore CE &= CA \\ \therefore z &= 5 \end{aligned}$$

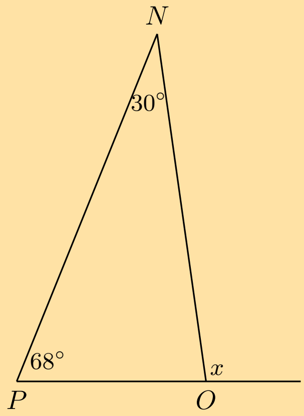
Oefening 7 – 2:

1. Bereken die onbekende veranderlikes in elk van die volgende figure.

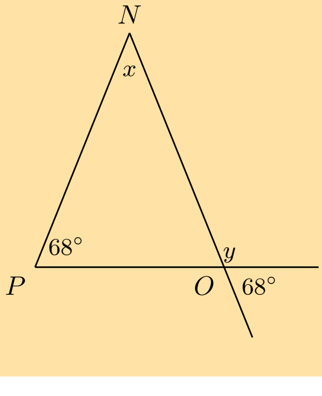
a)



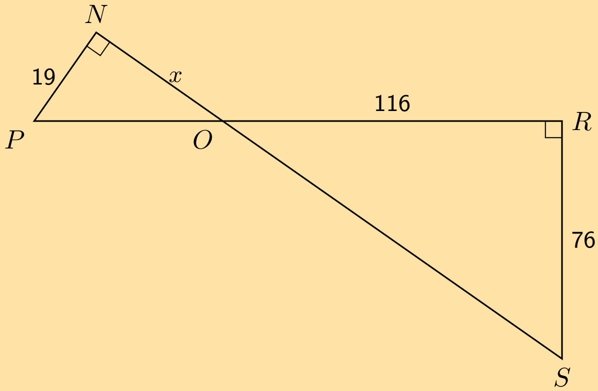
b)



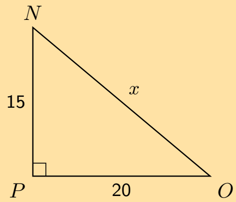
c)



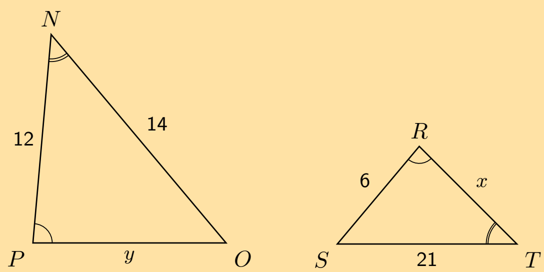
d)



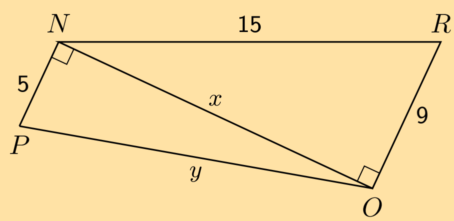
e)



f)



g)



2. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

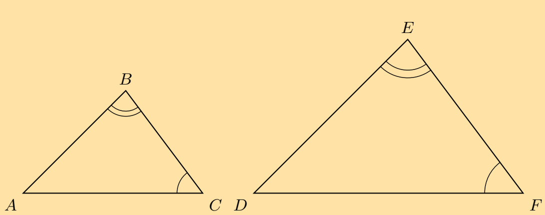
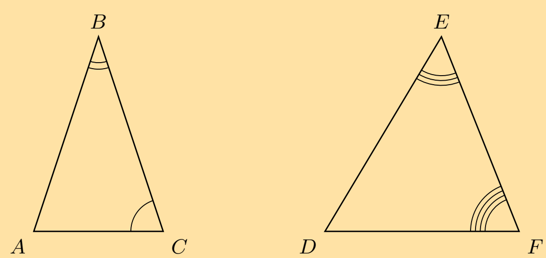


Diagram B



Watter diagram gee ’n paar driehoeke wat gelykvormig is?

3. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

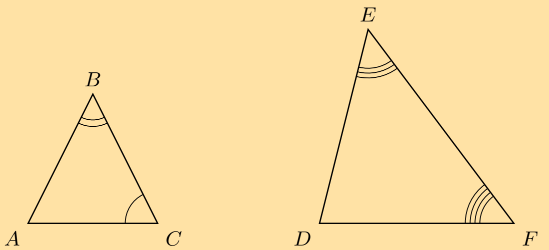
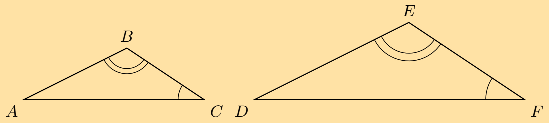
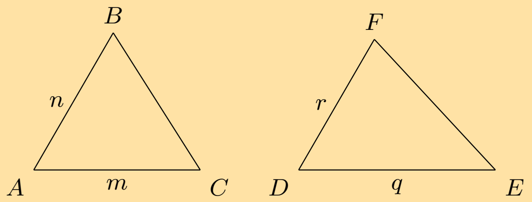


Diagram B



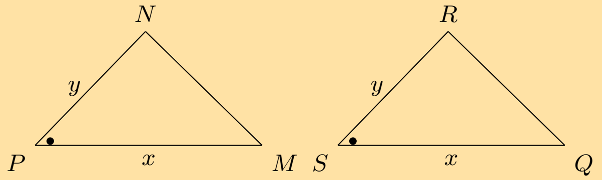
Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?

4. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



Is die twee driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om kongruensie aan te dui.

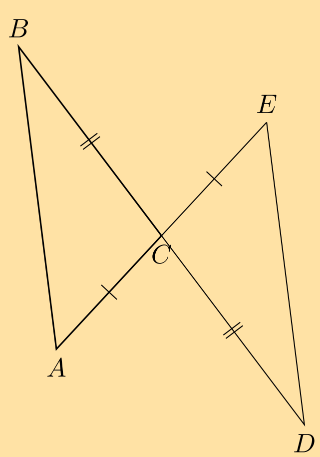
5. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



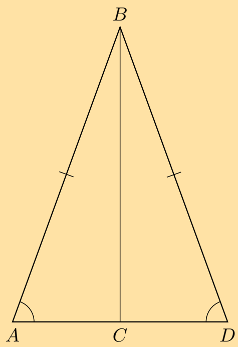
Is die twee driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om kongruensie aan te dui.

6. Meld of die volgende pare driehoeke kongruent is of nie. Gee redes vir jou antwoorde. As daar nie genoeg inligting is om 'n besluit te neem nie, verduidelik hoekom.

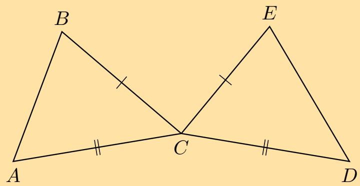
   a)



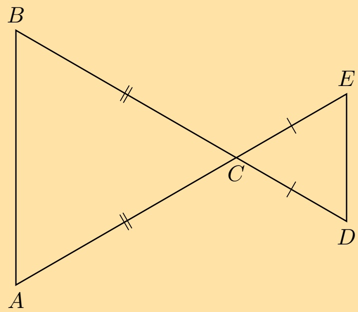
b)



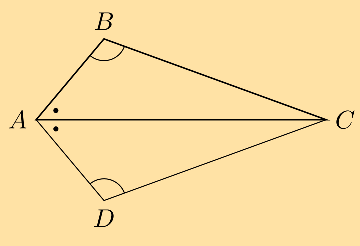
c)



d)



e)



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JT7 1b. 2JT8 1c. 2JT9 1d. 2JTB 1e. 2JTC 1f. 2JTD 1g. 2JTF 2. 2JTG
3. 2JTH 4. 2JTJ 5. 2JTK 6a. 2JTM 6b. 2JTN 6c. 2JTP 6d. 2JTQ 6e. 2JTR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.3 Vierhoeke EMD5X

DEFINISIE: *Vierhoek*

'n Vierhoek is 'n geslote vorm wat bestaan uit vier reguitlyn segmente.

NOTA:
Die binnehoeke van 'n vierhoek is saam 360°.

Parallelogram EMD5Y

DEFINISIE: *Parallelogram*

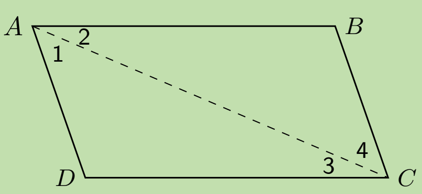
'n Parallelogram is vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Eienskappe van 'n parallelogram

VRAAG

$ABCD$ is 'n parallelogram met $AB \parallel DC$ en $AD \parallel BC$. Toon dat:

1. $AB = DC$ en $AD = BC$
2. $\hat{A} = \hat{C}$ en $\hat{B} = \hat{D}$



OPLOSSING

Stap 1: Verbind AC om $\triangle ABC$ en $\triangle CDA$ te vorm
Teken die diagram oor en trek lyn AC.

Stap 2: Gebruik eienskappe van ewewydige lyne om alle hoeke in die diagram wat ewe groot is, aan te dui
Merk alle ewe groot hoeke op jou diagram.

Stap 3: Bewys $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$
In $\triangle ABC$ en $\triangle CDA$:

$$\begin{array}{rll} \hat{A}_2 & = \hat{C}_3 & \text{(verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC) \\ \hat{C}_4 & = \hat{A}_1 & \text{(verw } \angle\text{e; } BC \parallel AD) \\ AC & & \text{(gemene sy)} \\ \therefore \triangle ABC & \equiv \triangle CDA & \text{(HHS)} \\ \therefore AB = CD & \text{en} \quad BC = DA & \end{array}$$

$\therefore$ Teenoorstaande sye van 'n parallelogram is ewe lank.

Ons het alreeds $\hat{A}_2 = \hat{C}_3$ en $\hat{A}_1 = \hat{C}_4$ getoon. Dus,

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C}_3 + \hat{C}_4 = \hat{C}$$

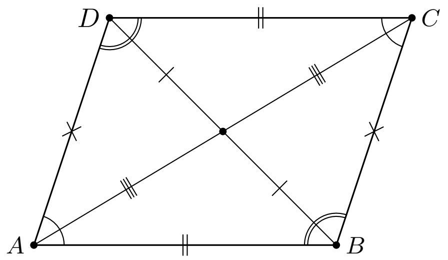
Verder,

$$\hat{B} = \hat{D} \quad (\triangle ABC \equiv \triangle CDA)$$

Dus teenoorstaande hoeke van 'n parallelogram is gelyk.

Opsomming van die eienskappe van 'n parallelogram:

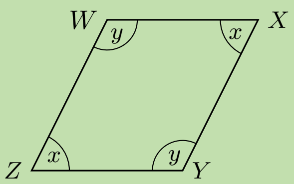
- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.



Uitgewerkte voorbeeld 4: Bewys 'n vierhoek is 'n parallelogram

VRAAG

Bewys dat as beide pare teenoorstaande hoeke in 'n vierhoek gelyk is, is die vierhoek 'n parallelogram.



OPLOSSING

Stap 1: Vind die verwantskap tussen $\hat{x}$ en $\hat{y}$

In $WXYZ$:

$$\begin{aligned}
\hat{W} = \hat{Y} &= \hat{y} && \text{(gegee)}\\
\hat{Z} = \hat{X} &= \hat{x} && \text{(gegee)}\\
\hat{W} + \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} &= 360^\circ && (\angle\text{e van vierhoek})\\
\therefore 2\hat{x} + 2\hat{y} &= 360^\circ\\
\therefore \hat{x} + \hat{y} &= 180^\circ\\
\hat{W} + \hat{Z} &= \hat{x} + \hat{y}\\
&= 180^\circ
\end{aligned}$$

Maar, hierdie is ko-binnehoeke tussen lyne WX en ZY. Dus $WX \parallel ZY$.

Stap 2: Vind ewewydige lyne

$\hat{W} + \hat{X} = 180^\circ$. Hierdie is ko-binnehoeke tussen lyneXY en WZ. Dus $XY \parallel WZ$.

Beide pare teenoorstaande sye van 'n vierhoek is ewewydig, dus $WXYZ$ is 'n parallelogram.

Ondersoek: Bewys 'n vierhoek is 'n parallelogram

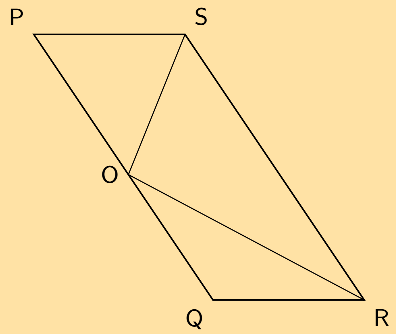
1. Bewys dat as beide pare teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.
2. Bewys dat as die hoeklyne van 'n vierhoek mekaar halveer, dan is die vierhoek 'n parallelogram.
3. Bewys dat as een paar teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk en ewewydig is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.

'n Vierhoek is 'n parallelogram as:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye gelyk is.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Die hoeklyne of diagonale mekaar halveer.
- Een paar teenoorstaande sye beide gelyk en ewewydig is.

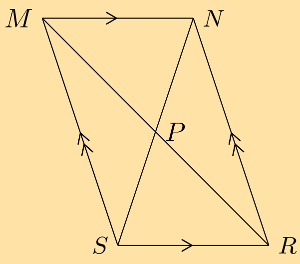
Oefening 7 – 3:

1. $PQRS$ is 'n parallelogram. $PS = OS$ en $QO = QR$. $S\hat{O}R = 96°$ en $Q\hat{O}R = x$.



   a) Vind, met redes, twee ander hoeke gelyk aan x.
   b) Skryf $\hat{P}$ in terme van x.
   c) Bereken die waarde van x.

2. Bewys dat die hoeklyne van parallelogram $MNRS$ mekaar halveer by P.



   Wenk: Gebruik kongruensie.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTS 2. 2JTT

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Reghoek

EMD5Z

DEFINISIE: *Reghoek*

'n Reghoek is 'n parallelogram met al vier hoeke gelyk aan $90°$.

'n Reghoek het al die eienskappe van 'n parallelogram:

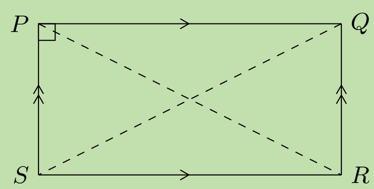
- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.

Dit het ook die volgende spesiale eienskap:

Uitgewerkte voorbeeld 5: Spesiale eienskap van 'n reghoek

VRAAG

$PQRS$ is 'n reghoek. Bewys dat die hoeklyne ewe lank is.



OPLOSSING

Stap 1: Verbind P met R en Q met S om $\triangle PSR$ en $\triangle QRS$ te vorm

Stap 2: Gebruik die definisie van 'n reghoek om op die diagram alle gelyke hoeke en sye in te vul.

Stap 3: Bewys $\triangle PSR \equiv \triangle QRS$

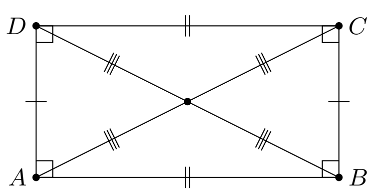
In $\triangle PSR$ en $\triangle QRS$:

$$\begin{aligned} PS &= QR && \text{(teenoorst sye van reghoek)} \\ SR & && \text{(gemene sy)} \\ P\hat{S}R &= Q\hat{R}S = 90° && (\angle\text{e van reghoek}) \\ \therefore \triangle PSR &\equiv \triangle QRS &&)90°\text{SkS}) \\ \text{Dus } PR &= QS \end{aligned}$$

Die hoeklyne van 'n reghoek is ewe lank.

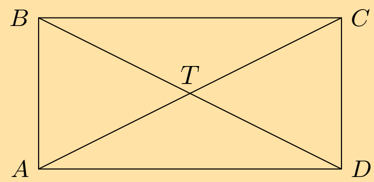
Opsomming van die eienskappe van 'n reghoek:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.
- Hoeklyne is ewe lank.
- Alle binnehoeke is gelyk aan 90°



Oefening 7 – 4:

1. $ABCD$ is vierhoek. Hoeklyne AC en BD sny by T. $AC = BD$, $AT = TC$, $DT = TB$. Bewys dat:



a) $ABCD$ 'n parallelogram is

b) $ABCD$ 'n reghoek is

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Rombus of ruit EMD62

DEFINISIE: *Rombus of ruit*

'n Rombus of ruit is 'n parallelogram waarvan al vier sye ewe lank is.

'n Ruit het al die eienskappe van 'n parallelogram:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.

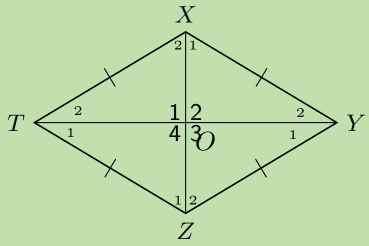
Dit het ook twee spesiale eienskappe:

Uitgewerkte voorbeeld 6: Spesiale eienskappe van 'n ruit

VRAAG

$XYZT$ is ruit. Bewys dat:

1. die hoeklyne mekaar loodreg halveer;
2. die hoeklyne die binnehoeke halveer.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die definisie van 'n ruit om op die diagram alle gelyke hoeke en sye in te vul

Stap 2: Bewys $\triangle XTO \equiv \triangle ZTO$

$$\begin{aligned} XT &= ZT && \text{(sye van ruit)} \\ TO & && \text{(gemene sy)} \\ XO &= OZ && \text{(hoeklyne van ruit)} \\ \therefore \triangle XTO &\equiv \triangle ZTO && \text{(SSS)} \\ \therefore \hat{O}_1 &= \hat{O}_4 && \\ \text{Maar } \hat{O}_1 + \hat{O}_4 &= 180^\circ && (\angle\text{e op reguitlyn}) \\ \therefore \hat{O}_1 &= \hat{O}_4 = 90^\circ && \end{aligned}$$

Ons kan verder tot die gevolgtrekking kom dat $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^\circ$.

Dus halveer die hoeklyne mekaar loodreg.

Stap 3: Gebruik eienskappe van kongruente driehoeke om te bewys die hoeklyne die binnehoeke halveer

$$\begin{aligned} \hat{X}_2 &= \hat{Z}_1 && (\triangle XTO \equiv \triangle ZTO) \\ \text{en } \hat{X}_2 &= \hat{Z}_2 && (\text{verw } \angle\text{e; } XT \parallel YZ) \\ \therefore \hat{Z}_1 &= \hat{Z}_2 && \end{aligned}$$

Dus hoeklyn XZ halveer $\hat{Z}$. Net so, kan ons toon dat XZ halveer ook $\hat{X}$; en dat hoeklyne TY halveer $\hat{T}$ en $\hat{Y}$.

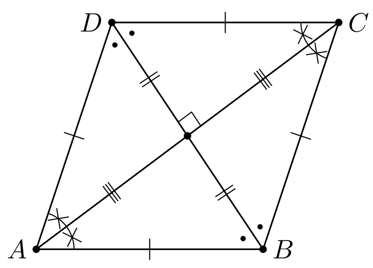
Ons kom tot die gevolgtrekking dat die hoeklyne van 'n ruit die binnehoeke halveer.

Om te bewys 'n parallelogram is 'n ruit, moet ons een van die volgende aantoon:

- Alle sye is ewe lank.
- Hoeklyne sny mekaar reghoekig.
- Hoeklyne halveer die binnehoeke.

Opsomming van die eienskappe van 'n ruit:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.
- Alle sye is ewe lank.
- Die hoeklyne halveer mekaar loodreg 90°
- Die hoeklyne halveer beide pare teenoorstaande hoeke.



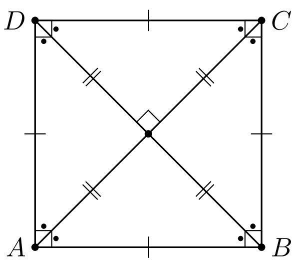
Vierkant EMD63

DEFINISIE: *Vierkant*

'n Vierkant is 'n ruit met al vier binnehoeke gelyk aan 90°
OF
'n Vierkant is 'n reghoek met al vier sye ewe lank.

'n Vierkant het al die eienskappe van 'n ruit:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.
- Alle sye is ewe lank.
- Die hoeklyne halveer mekaar loodreg $90°$
- Die hoeklyne halveer beide pare teenoorstaande hoeke.



Dit het ook die volgende eienskappe:

- Alle binnehoeke is gelyk aan $90°$
- Hoeklyne is ewe lank.
- Hoeklyne halveer beide pare teenoorstaande binnehoeke (d.w.s. almal is $45°$)

Om te bewys 'n parallelogram is 'n vierkant, moet ons een van die volgende toon:

- Dit is 'n ruit (al vier sye ewe lank) met binnehoeke gelyk aan $90°$.
- Dit is 'n reghoek (binnehoeke gelyk aan $90°$).

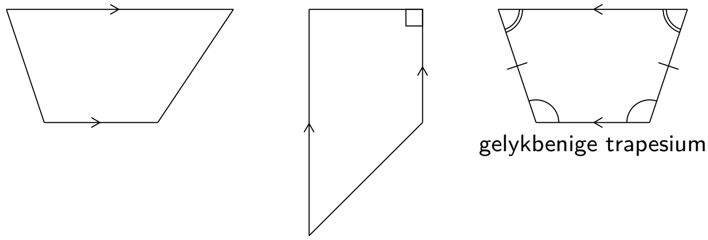
Trapesium EMD64

DEFINISIE: *Trapesium*

'n Trapesium is 'n vierhoek met een paar teenoorstaande sye ewewydig.

NOTA:
'n Trapesium word soms 'n trapesoïde genoem.

Sommige voorbeeld van trapesiums word hieronder gegee:



Vlieër EMD65

DEFINISIE: *Vlieër*

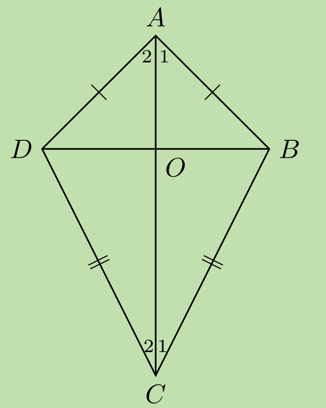
'n Vlieër is 'n vierhoek met twee pare aangrensende sye gelyk.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Eienskappe van 'n vlieër

VRAAG

$ABCD$ is 'n vlieër met $AD = AB$ en $CD = CB$. Bewys dat:

1. $A\hat{D}C = A\hat{B}C$
2. Hoeklyn AC halveer $\hat{A}$ en $\hat{C}$



OPLOSSING

Stap 1: Bewys $\triangle ADC \equiv \triangle ABC$

In $\triangle ADC$ en $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} AD &= AB && \text{(gegee)} \\ CD &= CB && \text{(gegee)} \\ AC & && \text{(gemene sy)} \\ \therefore \triangle ADC &\equiv \triangle ABC && \text{(SSS)} \\ \therefore A\hat{D}C &= A\hat{B}C \end{aligned}$$

Dus is een paar teenoorstaande hoeke gelyk in 'n vlieër $ABCD$.

Stap 2: Gebruik eienskappe van kongruente driehoeke om te bewys AC halveer $\hat{A}$ en $\hat{C}$

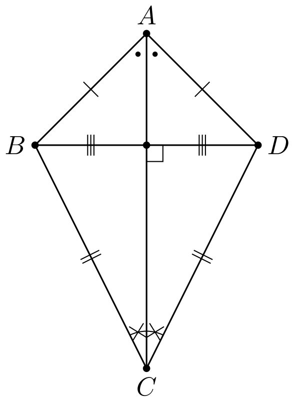
$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \quad (\triangle ADC \equiv \triangle ABC) \\ \text{en } \hat{C}_1 &= \hat{C}_2 \quad (\triangle ADC \equiv \triangle ABC) \end{aligned}$$

Dus halveer hoeklyn AC $\hat{A}$ en $\hat{C}$.

Ons kom tot die gevolgtrekking dat die hoeklyn tussen die gelyke sye van 'n vlieër die twee binnehoeke halveer en 'n as van simmetrie is.

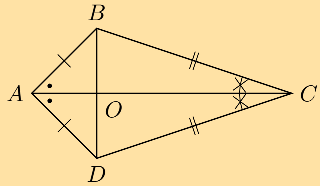
Opsomming van die eienskappe van 'n vlieër:

- Hoeklyn tussen gelyke sye halveer die ander hoeklyn.
- Een paar teenoorstaande hoeke is gelyk (die hoeke tussen ongelyke sye)
- Hoeklyn tussen gelyke sye halveer die binnehoeke en is 'n as van simmetrie.
- Hoeklyne sny mekaar loodreg $90°$

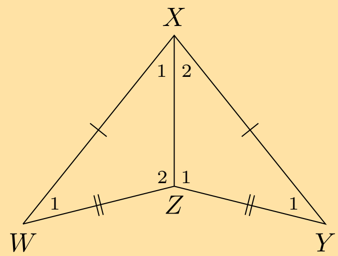


Oefening 7 – 5:

1. Gebruik die skets van vierhoek $ABCD$ om te bewys die hoeklyne van 'n vlieër is loodreg op mekaar.



2. Verduidelik waarom vierhoek $WXYZ$ 'n vlieër is. Skryf al die eienskappe neer van vierhoek $WXYZ$.



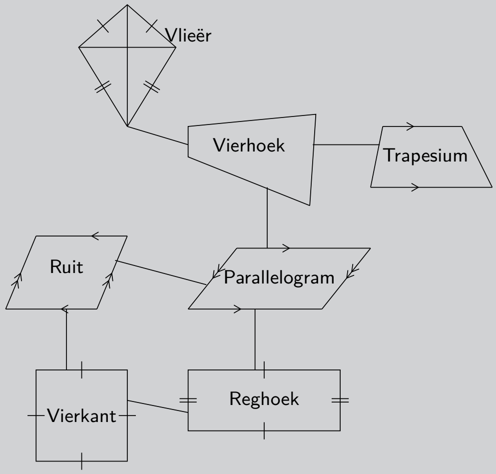
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTW 2. 2JTX

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

BESOEK:
Hierdie video verskaf 'n opsomming van die verskillende tipes vierhoeke en hulle eienskappe.
Sien video: 2JTY at www.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Verwantskappe tussen die verskillende vierhoeke

Heather trek die volgende diagram ter illustrasie van haar begrip van die verwantskappe tussen die verskillende vierhoeke. Die volgende diagram som die verskillende tipes spesiale vierhoeke op.



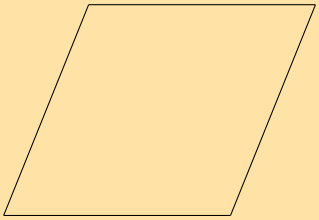
1. Verduidelik hoe sy moontlik geredeneer het om die diagram te struktureer soos getoon.
2. Ontwerp jou eie diagram om die verwantskappe tussen die verskillende vierhoeke te wys en skryf 'n kort verduideliking van jou ontwerp.

Oefening 7 – 6:

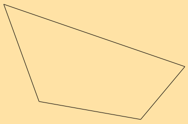
1. Die volgende vorm is **op skaal** geteken:

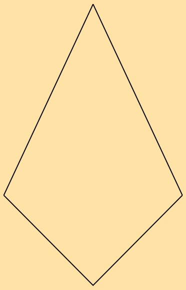
   Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.
2. Die volgende vorm is **op skaal** geteken:

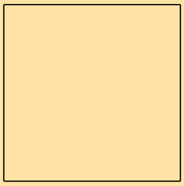
   Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.
3. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.

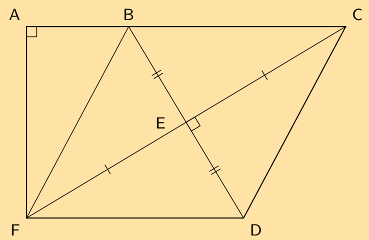
4. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.

5. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.



6. Vind die oppervlakte van $ACDF$ as $AB = 8,\ BF = 17,\ FE = EC,\ BE = ED,\ \hat{A} = 90°,\ C\hat{E}D = 90°$



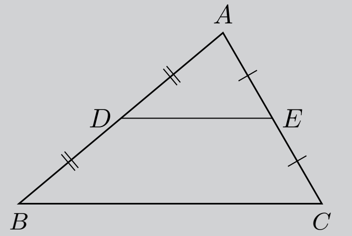
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JTZ 2. 2JV2 3. 2JV3 4. 2JV4 5. 2JV5 6. 2JV6

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

7.4 Die middelpuntstelling EMD66

Ondersoek: Bewys die middelpuntstelling

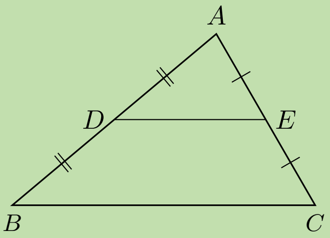


1. Trek 'n groot ongelyksydige driehoek op 'n vel papier.
2. Benoem die hoekpunte A, B en C. Vind die middelpunte (D en E) van twee sye en verbind hulle.
3. Sny $\triangle ABC$ uit en sny langs lyn DE.
4. Plaas $\triangle ADE$ op vierhoek $BDEC$ met hoekpunt E op hoekpunt C. Skryf jou waarnemings neer.
5. Skuif $\triangle ADE$ om hoekpunt D op hoekpunt B te plaas. Skryf jou waarnemings neer.
6. Wat let jy op in verband met die lengtes van DE en BC?
7. Formuleer 'n vermoede aangaande die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Middelpuntstelling

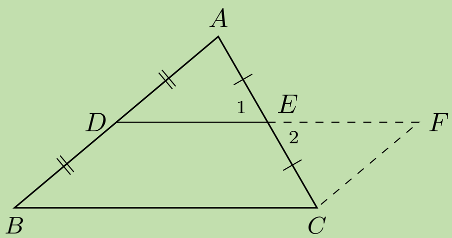
VRAAG

Bewys dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig is aan die derde sy en gelyk is aan die helfte van die lengte van die derde sy.



OPLOSSING

Stap 1: Verleng DE na F sodat $DE = EF$ en verbind FC



Stap 2: Bewys $BCFD$ is 'n parallelogram

In $\triangle EAD$ en $\triangle ECF$:

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= \hat{E}_2 && \text{(regoorst } \angle\text{e)} \\ AE &= CE && \text{(gegee)} \\ DE &= EF && \text{(deur konstruksie)} \\ \therefore \triangle EAD &\equiv \triangle ECF && \text{(SHS)} \\ \therefore A\hat{D}E &= C\hat{F}E \end{aligned}$$

Maar hierdie is verwisselende binnehoeke, dus $BD \parallel FC$

$$\begin{aligned} BD &= DA && \text{(gegee)} \\ DA &= FC && (\triangle EAD \equiv \triangle ECF) \\ \therefore BD &= FC \\ \therefore BCFD & \text{ is a parallelogram} && \text{(een paar teenorst sye } = \text{ en } \parallel \text{)} \end{aligned}$$

Dus $DE \parallel BC$.

Ons kom tot die gevolgtrekking dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig is aan die derde sy.

Stap 3: Gebruik die eienskappe van 'n parallelogram $BCFD$ om te bewys dat $DE = \frac{1}{2}BC$

$$\begin{aligned} DF &= BC && \text{(teenorst. sye van parm)} \\ \text{en } DF &= 2\,(DE) && \text{(deur konstruksie)} \\ \therefore 2DE &= BC \\ \therefore DE &= \tfrac{1}{2}BC \end{aligned}$$

Ons kom tot die gevolgtrekking dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, gelyk is aan die helfte van die lengte van die derde sy.

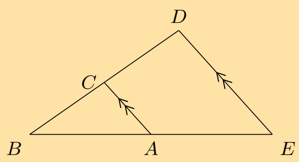
Omgekeerde

Die omgekeerde van hierdie stelling sê: As 'n lyn getrek word deur die middelpunt van 'n sy van 'n driehoek ewewydig aan die tweede sy, sal dit die derde sy halveer.

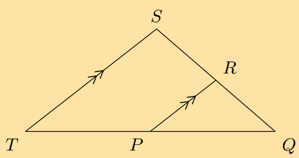
BESOEK:
Jy kan GeoGebra gebruik om te toon dat die omgekeerde van die middelpuntstelling waar is.

Oefening 7 – 7:

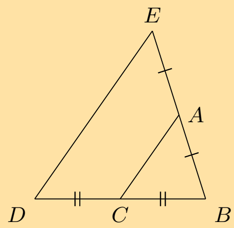
1. Punte C en A is die middelpunte van lyne BD en BE. Bestudeer $\triangle EDB$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, gebruik die inligting soos gegee, tesame met dit wat jy weet van die middelpuntstelling. Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv. FG.



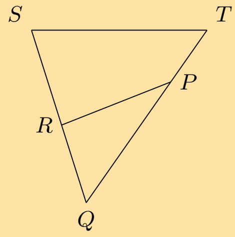
2. Punte R en P is die middelpunte van lyne QS en QT. Bestudeer $\triangle TSQ$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, gebruik die inligting soos gegee, tesame met dit wat jy weet van die middelpuntstelling. Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv. FG.



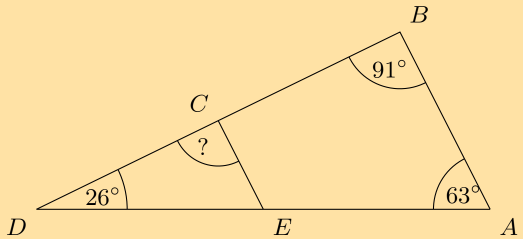
3. Punte C en A op die lyne BD en BE word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, identifiseer en benoem die ewewydige lyne.



4. Punte R en P op die lyne QS en QT word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, identifiseer en benoem die ewewydige lyne.

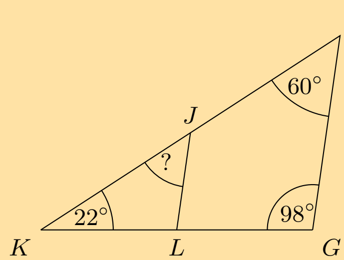


5. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte A, B en D, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by C, D en E. Punt C is die middelpunt van BD en punt E is die middelpunt van AD.



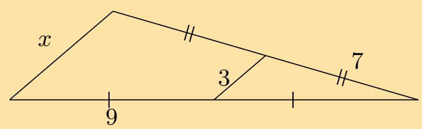
   a) Drie hoeke word gegee: $\hat{A} = 63°$, $\hat{B} = 91°$ en $\hat{D} = 26°$; bepaal die waarde van $D\hat{C}E$.
   b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).
   $\triangle DEC \ ||| \ \triangle ?$

6. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte G, H en K, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by J, K en L. Punt J is die middelpunt van HK en punt L is die middelpunt van GK.

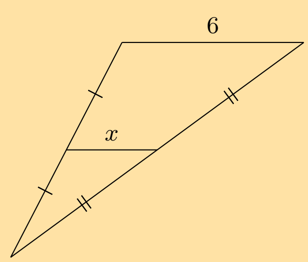


   a) Drie hoeke word gegee: $\hat{G} = 98°$, $\hat{H} = 60°$, en $\hat{K} = 22°$; bepaal die waarde van $K\hat{J}L$.
   b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).
   $\triangle HKG \ ||| \ \triangle ?$

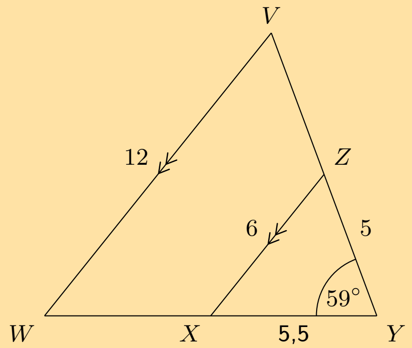
7. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. Daar loop 'n lyn deur die groot driehoek. Let op dat sommige lyne in die figuur gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek het 'n lengte van 3. Bepaal die waarde van x.



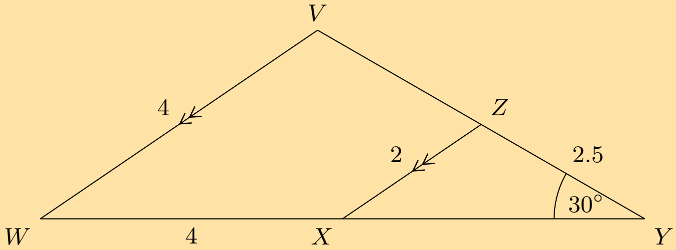
8. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. 'n Snylyn loop deur die groot driehoek. Let op dat sommige lyne in die figuur gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek is 6 eenhede lank. Bepaal die waarde van x.



9. In die figuur hieronder, $VW \parallel ZX$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $VW = 12$; $ZX = 6$; $XY = 5{,}5$; $YZ = 5$ en $\hat{V} = 59°$. Die figuur is op skaal geteken. Bepaal die lengte van WY.

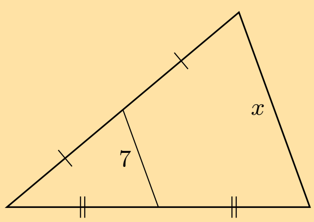


10. In die figuur hieronder, $VW \parallel ZX$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $VW = 4$; $ZX = 2$; $WX = 4$; $YZ = 3{,}5$ en $\hat{Y} = 30°$. Die figuur is op skaal geteken. Bepaal die lengte van XY.

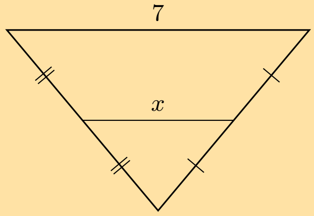


11. Vind x en y in die volgende:

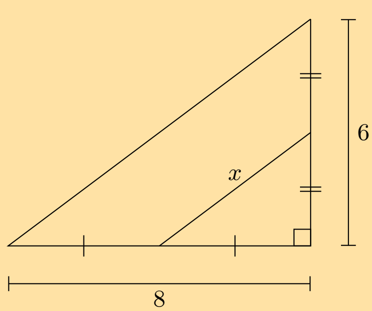
a)



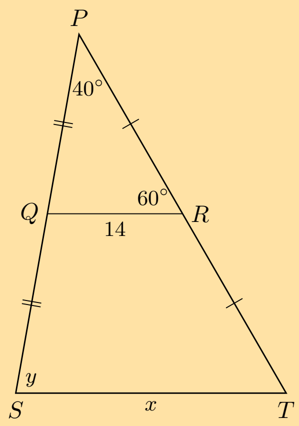
b)



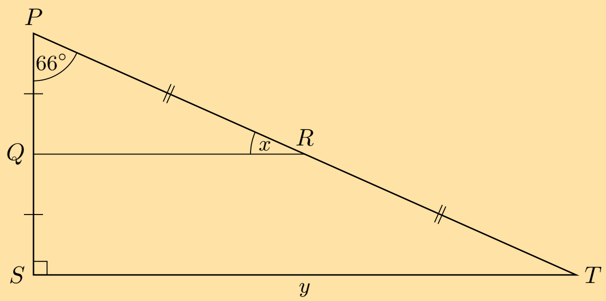
c)



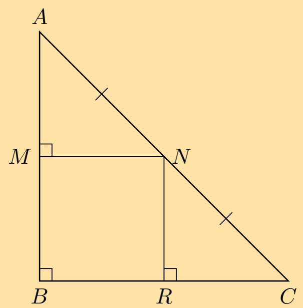
d)



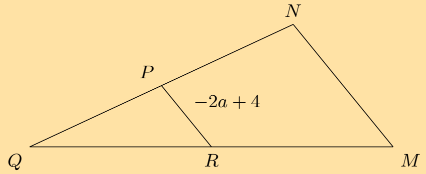
e) In die volgende diagram is $PQ = 2{,}5$ en $RT = 6{,}5$.



12. Toon dat M die middelpunt is van AB en dat $MN = RC$.



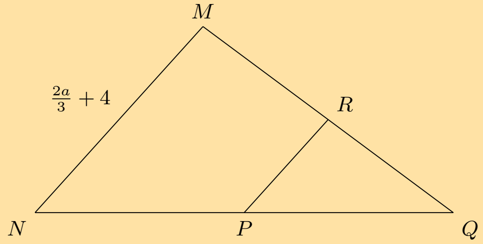
13. In die diagram hieronder is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Die segment binne-in die groot driehoek word aangedui met 'n lengte van $-2a + 4$.



a) Bereken die waardes van MN in terme van a.

b) Dit word verder gegee dat MN 'n lengte het van 18. Wat is die waarde van a? Gee jou antwoord as 'n breuk.

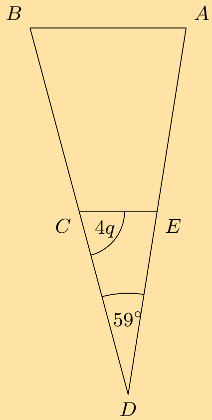
14. In die diagram hieronder, is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Een sy van die driehoek het 'n lengte van $\frac{2a}{3} + 4$.



a) Vind die waarde van PR in terme van a.

b) Dit word verder gegee dat PR 'n lengte het van 8. Wat is die waarde van a?

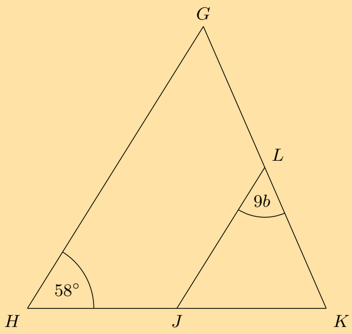
15. Die figuur hieronder toon $\triangle ABD$ wat gesny word deur EC. Punte C en E halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Die hoeke $\hat{D} = 59°$ en $E\hat{C}D = 4q$ word gegee; bepaal die waarde van $\hat{A}$ in terme van q.

b) Dit word verder gegee dat $E\hat{C}D = 72°$. Bereken die waarde van q.

16. Die figuur hieronder toon $\triangle GHK$ wat gesny word deur LJ. Punte J en L halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Gegee die hoeke $\hat{H} = 58°$ en $K\hat{L}J = 9b$, bepaal die waarde van $\hat{K}$ in terme van b.

b) Dit word verder gegee dat $\hat{K} = 74°$. Bepaal die waarde van b. Gee jou antwoord as 'n breuk.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JV7 2. 2JV8 3. 2JV9 4. 2JVB 5. 2JVC 6. 2JVD 7. 2JVF 8. 2JVG
9. 2JVH 10. 2JVJ 11a. 2JVK 11b. 2JVM 11c. 2JVN 11d. 2JVP 11e. 2JVQ 12. 2JVR
13. 2JVS 14. 2JVT 15. 2JVV 16. 2JVW

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

7.5 Hoofstuk opsomming EMD67

Sien aanbieding: 2JVX at www.everythingmaths.co.za

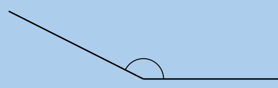
- ’n Vierhoek is ’n geslote vorm wat bestaan uit vier reguitlyn segmente.
- ’n Parallelogram is vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
  - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
  - Beide hoeklyne halveer mekaar.
- ’n Reghoek is ’n parallelogram met al vier hoeke gelyk aan $90°$
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
  - Die hoeklyne of diagonale halveer mekaar.
  - Die hoeklyne is ewe lank.
  - Alle binnehoeke is gelyk aan $90°$.
- ’n Ruit is ’n parallelogram wat vier ewe lang sye het.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Alle sye is ewe lank.
  - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
  - Die hoeklyne halveer mekaar loodreg $90°$.
  - Die hoeklyne van ’n ruit halveer beide pare teenoorstaande hoeke.
- ’n Vierkant is ’n ruit met al vier binnehoeke gelyk aan $90°$.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Die hoeklyne halveer mekaar loodreg $90°$.
  - Alle binnehoeke is gelyk aan $90°$.
  - Die hoeklyne is ewe lank.
  - Die hoeklyne halveer beide pare teenoorstaande binnehoeke (almal is $45°$)
- ’n Trapesium is ’n vierhoek met een paar teenoorstaande sye ewewydig.
- ’n Vlieër is ’n vierhoek met twee pare aangrensende sye gelyk.
  - Een paar teenoorstaande binnehoeke is ewe groot (die hoeke is tussen die sye wat nie ewe lank is nie).
  - Die hoeklyn tussen gelyke sye halveer die ander hoeklyn.
  - Die hoeklyn tussen gelyke sye halveer die binnehoeke.
  - Die hoeklyne sny mekaar loodreg $90°$.
- Die middelpuntstelling stel dit dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van ’n driehoek verbind, ewewydig is aan die derde sy en gelyk is aan die helfte van die lengte van die derde sy.

End of chapter Exercise 7 – 8:

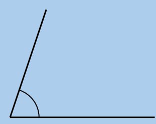
1. Identifiseer die tipes hoeke hieronder getoon:

   a)

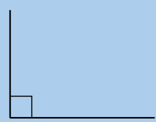
b)



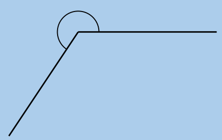
c)



d)



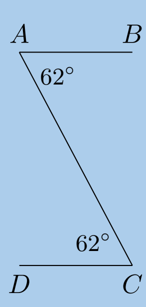
e)



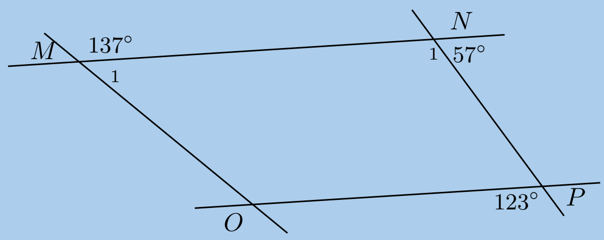
f) ’n Hoek van 91°
g) ’n Hoek van 180°
h) ’n Hoek van 210°

2. Besluit of die volgende stellings waar of vals is. As die stelling vals is, verduidelik hoekom:
   a) ’n Trapesium is ’n vierhoek met twee pare teenoorstaande sye wat ewewydig is.
   b) Beide hoeklyne van ’n parallelogram halveer mekaar.
   c) ’n Reghoek is ’n parallelogram met alle binnehoeke gelyk aan 90°.
   d) Twee aangrensende sye van ’n ruit het verskillende lengtes.
   e) Die hoeklyne van ’n vlieër sny reghoekig.
   f) Alle vierkante is parallelogramme.
   g) ’n Ruit is ’n vlieër met ’n paar gelyke teenoorstaande sye.
   h) Die hoeklyne van ’n parallelogram is asse van simmetrie.
   i) Die hoeklyne van ’n ruit is ewe lank.
   j) Beide hoeklyne van ’n vlieër halveer die binnehoeke.

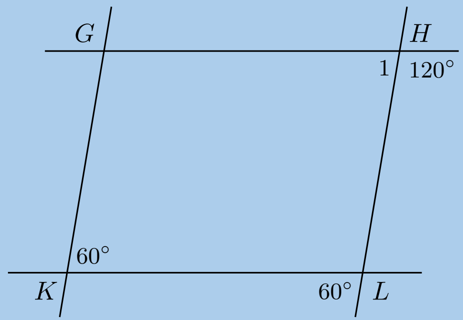
3. Vind alle pare ewewydige lyne in die volgende figure, en gee redes in elke geval.
   a)



b)

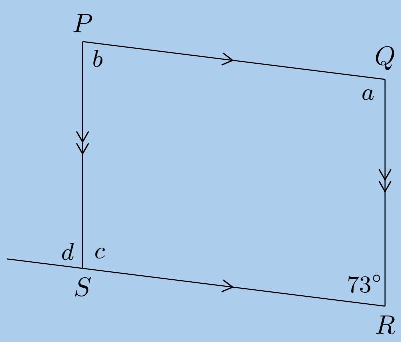


c)

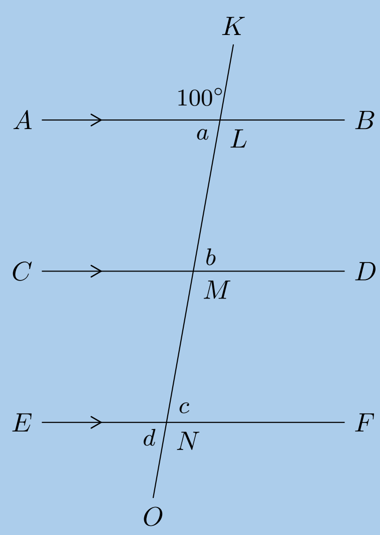


4. Vind hoeke a, b, c en d in elke geval en gee redes:

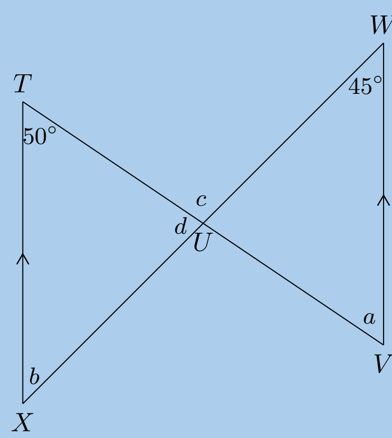
a)



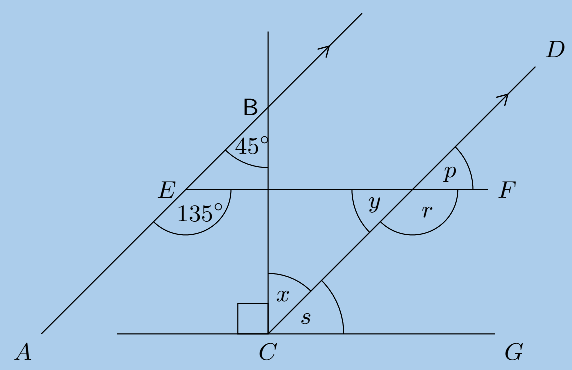
b)



c)



5. Gegee die diagram hieronder:



a) Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat in een enkele stap tot die antwoord sal lei.

b) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $EF \parallel CG$?

6. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

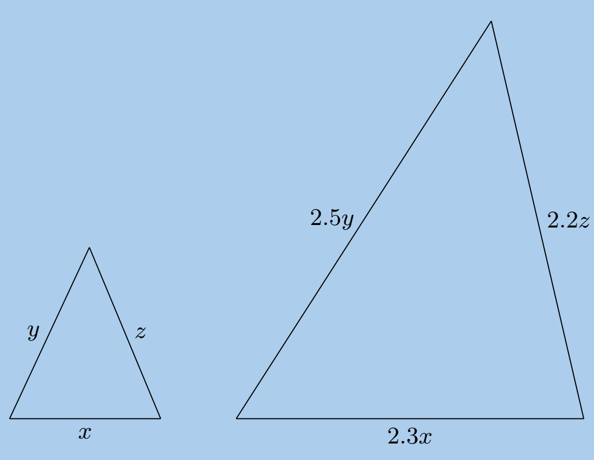
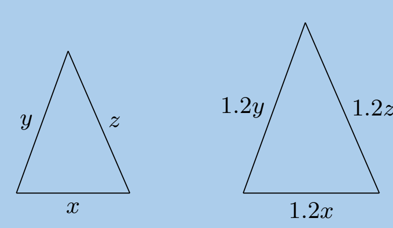


Diagram B



Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?

7. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

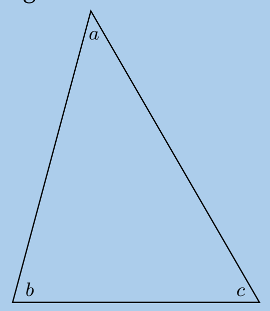
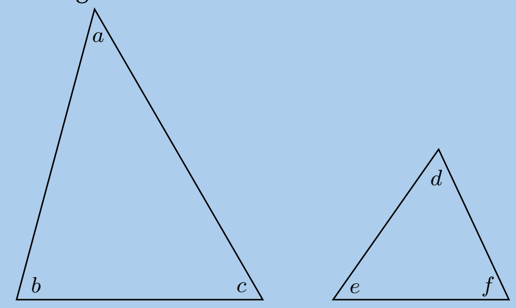
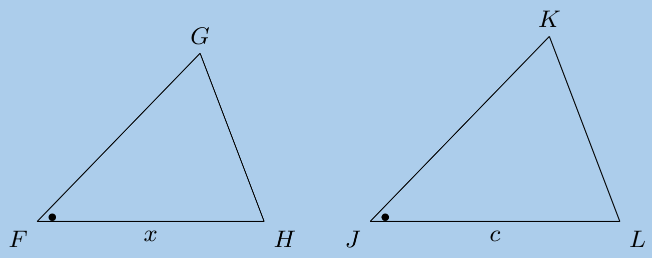


Diagram B



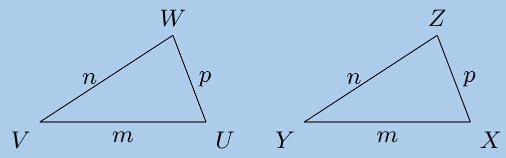
Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?

8. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



Is die driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om aan te toon dat hulle kongruent is.

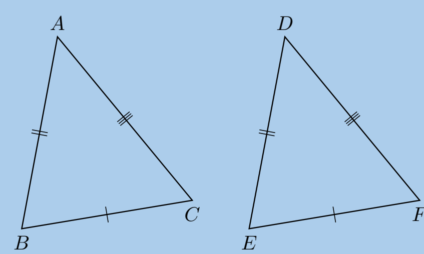
9. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



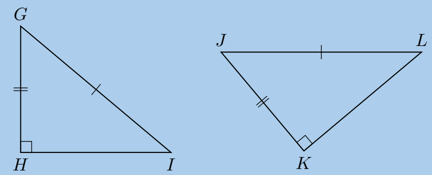
Is die driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om aan te toon dat hulle kongruent is.

10. Sê watter van die volgende pare driehoeke is kongruent en gee redes.

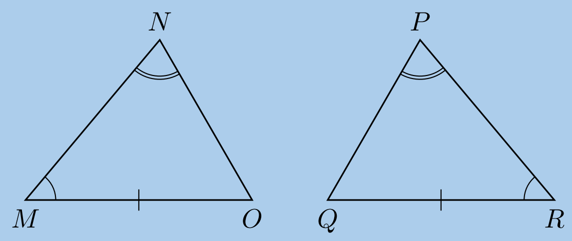
a)



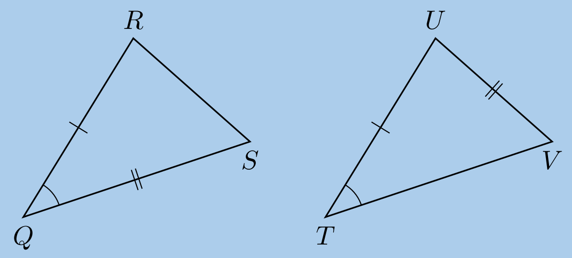
b)



c)

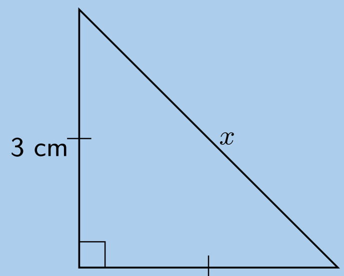


d)

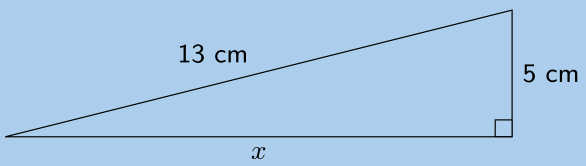


11. Gebruik die stelling van Pythagoras en bereken die lengte x:

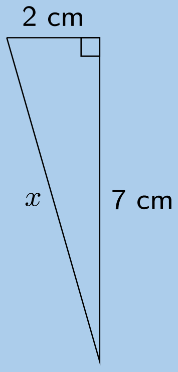
a)



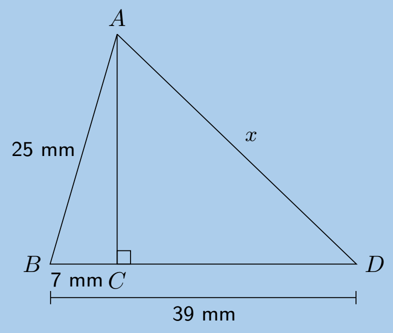
b)



c)

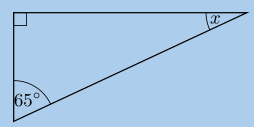


d)

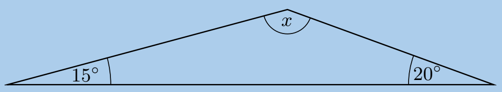


12. Bereken x en y in die diagram hieronder:

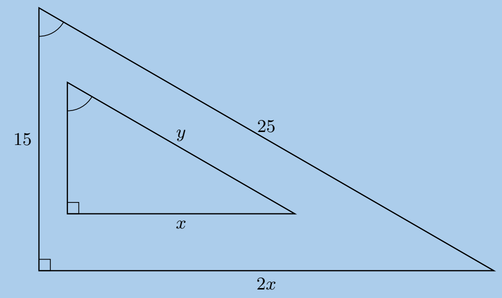
a)



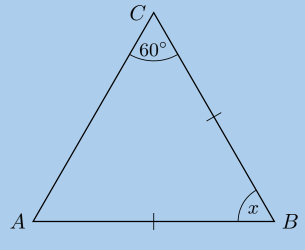
b)



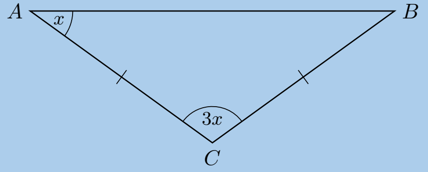
c)



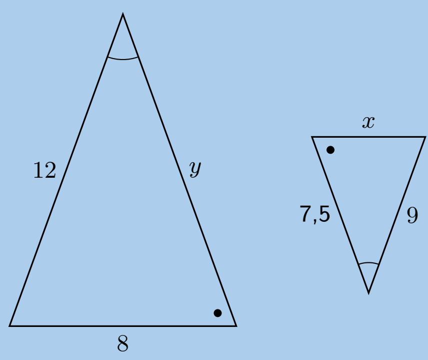
d)



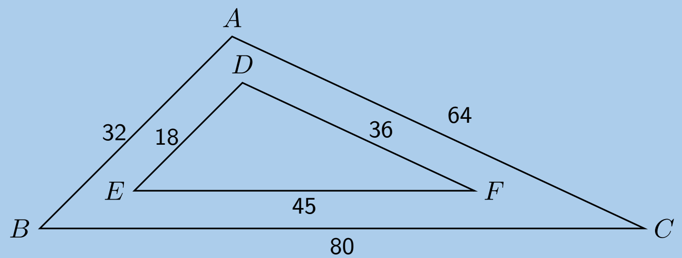
e)



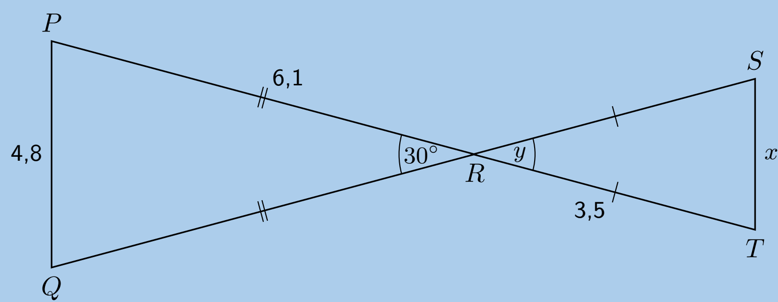
f)



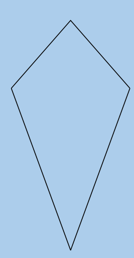
13. Beskou die diagram hieronder. Is $\triangle ABC \; ||| \; \triangle DEF$? Gee redes vir jou antwoord.



14. Verduidelik hoekom is $\triangle PQR$ gelykvormig aan $\triangle TSR$ en bereken die waardes van x en y.

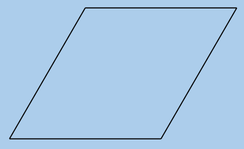


15. Die volgende vorm is op skaal geteken:

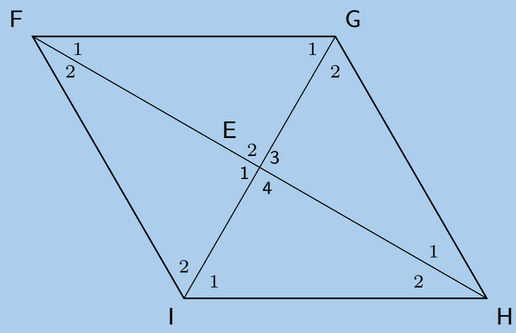


Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.

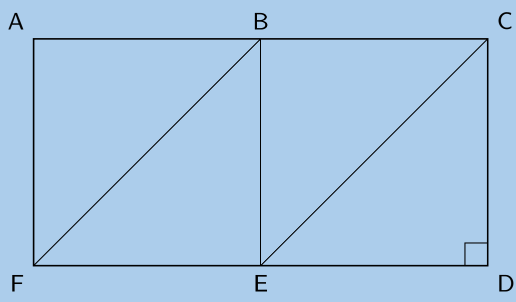
16. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.



17. $FGHI$ is 'n ruit. $\hat{F}_1 = 3x + 20°$; $\hat{G}_1 = x + 10°$. Bepaal die waarde van x.



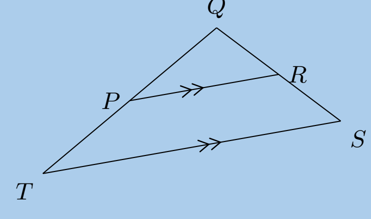
18. In die diagram hieronder, $AB = BC = CD = DE = EF = FA = BE$.



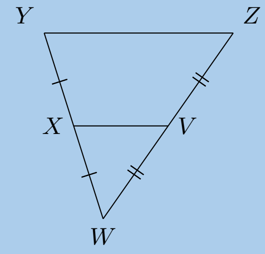
Noem:

a) 3 reghoeke
b) 4 parallelogramme
c) 2 trapesiums
d) 2 ruite

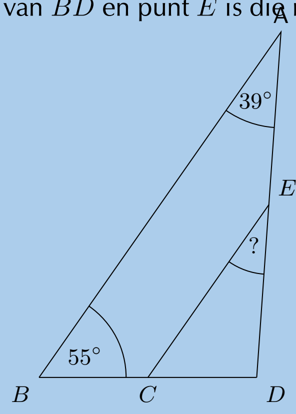
19. Punte R en P is die middelpunte van lyne QS en QT. Bestudeer $\triangle TSQ$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, deur die gegewe inligting te gebruik, tesame met die middelpuntstelling. (Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv.FG.)



20. Punte X en V op die segmente WY en WZ word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, en identifiseer en benoem dan die ewewydige lynsegmente.



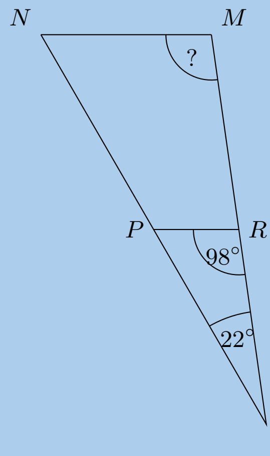
21. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte A, B en D, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by C, D en E. Punt C is die middelpunt van BD en punt E is die middelpunt van AD.



a) Die hoeke $\hat{A} = 39°$ en $\hat{B} = 55°$ word gegee. Bepaal die waarde van $D\hat{E}C$.

b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).
$\triangle DEC \;|||\; \triangle ?$

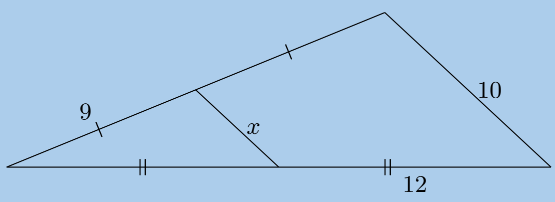
22. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte M, N en Q, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by P, Q en R. Punt P is die middelpunt van NQ en punt R is die middelpunt van MQ.



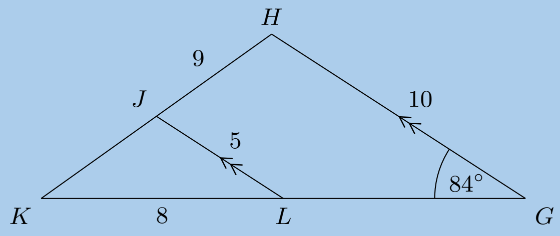
a) Met die twee gegewe hoeke, $\hat{Q} = 22°$ en $Q\hat{R}P = 98°$, bepaal die waarde van $\hat{M}$.

b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).
$\triangle QMN \;|||\; \triangle ?$

23. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. Daar is 'n lynsegment wat deur die groot driehoek sny. Let op dat sekere segmente gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek is 10 eenhede lank. Bepaal die waarde van x.

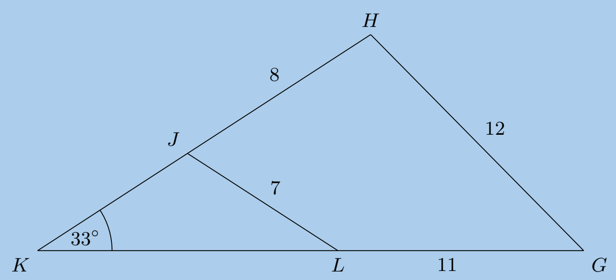


24. In die figuur hieronder, $GH \parallel LJ$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $GH = 10$; $LJ = 5$; $HJ = 9$; $KL = 8$ en $\hat{G} = 84°$. Die figuur is op skaal geteken.



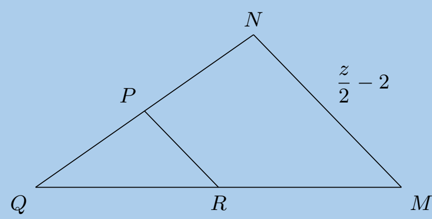
Bereken die lengte van JK.

25. Die figuur toon driehoek GHK met die kleiner driehoek JKL binne in die groter driehoek. Verder word die lengtes en hoeke gegee: $GH = 12$; $LJ = 7$; $HJ = 8$; $LG = 11$; $\hat{K} = 33°$. Die figuur is volgens skaal geteken.



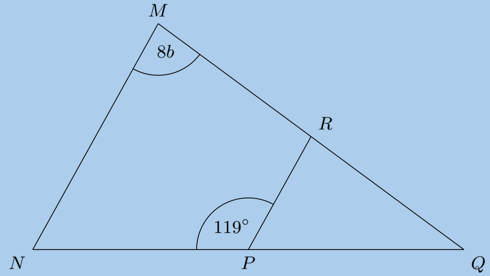
Vind die lengte van KL.

26. In die diagram hieronder, is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Een sy van die driehoek het 'n lengte van $\frac{z}{2} - 2$.



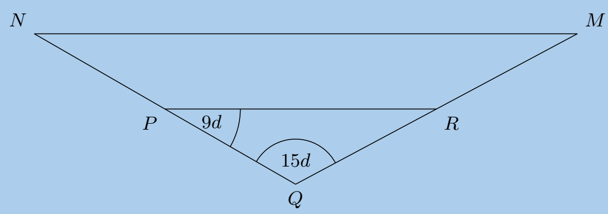
   a) Bepaal die waarde van PR in terme van z.
   b) Dit word verder gegee PR 'n lengte het van 2. Wat is die waarde van z?

27. Die figuur hieronder toon $\triangle MNQ$ wat gesny word deur RP. Punte P en R halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



   a) Met die twee hoeke wat gegee is, $\hat{M} = 8b$ en $\angle NPR = 119°$, bepaal die waarde van $\hat{Q}$ in terme van b.
   b) Dit word nou gegee dat $\hat{M}$ 'n grotte het van $76°$. Bepaal die waarde van b. Gee jou antwoord as 'n presiese breukwaarde.

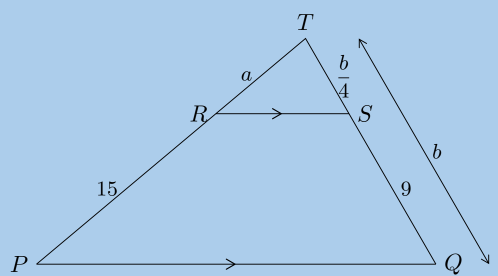
28. Die figuur hieronder toon $\triangle MNQ$ wat gesny word deur RP. Punte P en R halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



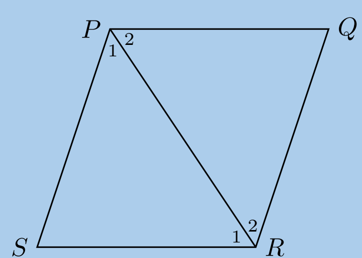
a) Die hoeke $\hat{Q} = 15d$ en $R\hat{P}Q = 9d$ in die groter driehoek word gegee; bepaal die waarde van $\hat{M}$ in terme van d.

b) Dit word verder gegee dat $R\hat{P}Q$ 'n grootte het van $60°$. Los op vir die waarde van d. Gee jou antwoord as 'n presiese breukwaarde.

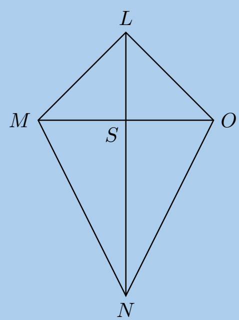
29. Bereken a en b:



30. $\triangle PQR$ en $\triangle PSR$ is gelyksydige driehoeke. Bewys dat $PQRS$ 'n ruit is.



31. $LMNO$ is 'n vierhoek met $LM = LO$ en hoeklyne wat sny by S sodat $MS = SO$. Bewys dat:

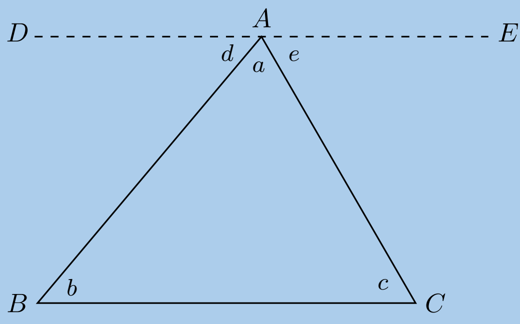


a) $M\hat{L}S = S\hat{L}O$

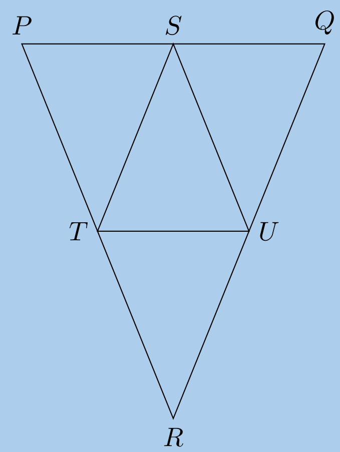
b) $\triangle LON \equiv \triangle LMN$

c) $MO \perp LN$

32. Gebruik die figuur hieronder en toon dat die som van die drie hoeke in 'n driehoek 180° is. Lyn DE is ewewydig aan BC.



33. PQR is 'n gelykbenige driehoek met $PR = QR$. S is die middelpunt van PQ, T is die middelpunt van PR en U is die middelpunt van RQ.

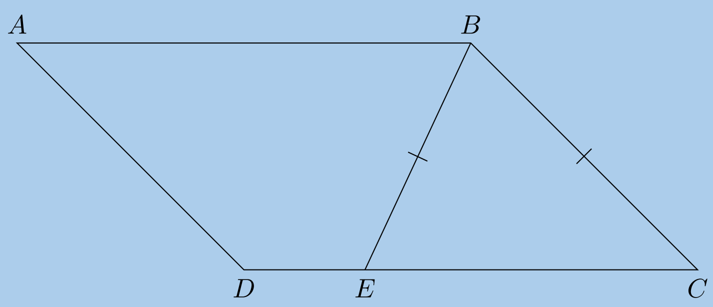


a) Bewys $\triangle STU$ is ook gelykbenig.

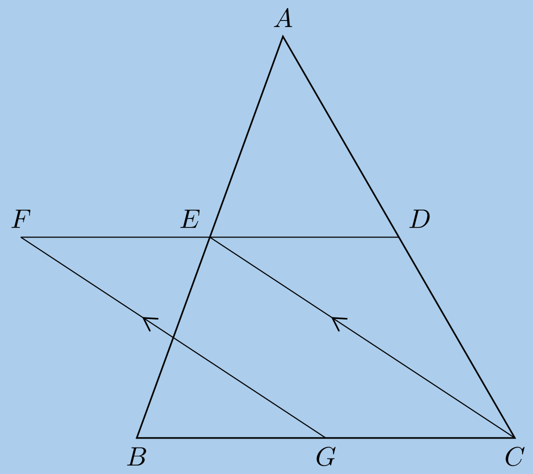
b) Watter tipe vierhoek is $STRU$? Motiveer jou antwoord.

c) As $R\hat{T}U = 68°$ bereken, met redes, die grootte van $T\hat{S}U$.

34. $ABCD$ is 'n parallelogram. $BE = BC$. Bewys dat $A\hat{B}E = B\hat{C}D$.



35. In die diagram hieronder, is D, E en G die middelpunte van AC, AB en BC onderskeidelik. $EC \parallel FG$.



a) Bewys dat $FECG$ 'n parallelogram is.

b) Bewys dat $FE = ED$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JVY	1b. 2JVZ	1c. 2JW2	1d. 2JW3	1e. 2JW4	1f. 2JW5
1g. 2JW6	1h. 2JW7	2a. 2JW8	2b. 2JW9	2c. 2JWB	2d. 2JWC
2e. 2JWD	2f. 2JWF	2g. 2JWG	2h. 2JWH	2i. 2JWJ	2j. 2JWK
3a. 2JWM	3b. 2JWN	3c. 2JWP	4a. 2JWQ	4b. 2JWR	4c. 2JWS
5. 2JWT	6. 2JWV	7. 2JWW	8. 2JWX	9. 2JWY	10a. 2JWZ
10b. 2JX2	10c. 2JX3	10d. 2JX4	11a. 2JX5	11b. 2JX6	11c. 2JX7
11d. 2JX8	12a. 2JX9	12b. 2JXB	12c. 2JXC	12d. 2JXD	12e. 2JXF
12f. 2JXG	13. 2JXH	14. 2JXJ	15. 2JXK	16. 2JXM	17. 2JXN
18. 2JXP	19. 2JXQ	20. 2JXR	21. 2JXS	22. 2JXT	23. 2JXV
24. 2JXW	25. 2JXX	26. 2JXY	27. 2JXZ	28. 2JY2	29. 2JY3
30. 2JY4	31. 2JY5	32. 2JY6	33. 2JY7	34. 2JY8	35. 2JY9

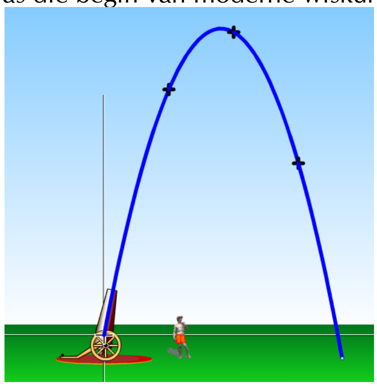
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 8

Analitiese meetkunde

8 Analitiese meetkunde

Analitiese meetkunde is die studie van meetkundige eienskappe, verbande en die meting van punte, lyne en hoeke in die Cartesiese vlak. Geometriese vorme word gedefinieer met die gebruik van ’n koördinaatstelsel en algebraïese beginsels. Sommige wiskundiges beskou die ontwikkeling van analitiese meetkunde, ook genoem koördinaat- of Cartesiese meetkunde, as die begin van moderne wiskunde.

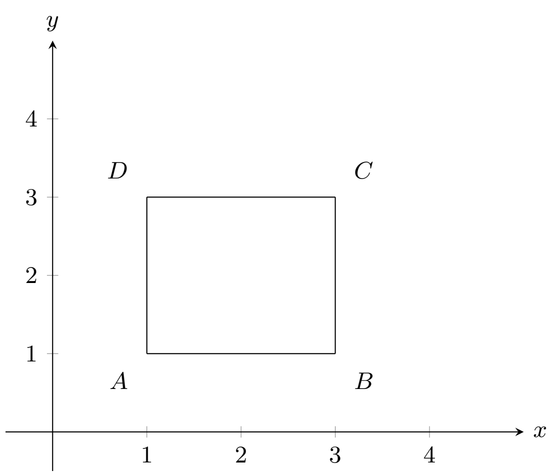


Figuur 8.1: Die beweging van ’n projektiel kan gestip word op die Cartesiese vlak. Animasie tegnici gebruik hierdie inligting om hulle te help om animasies te skep.

8.1 Trek van figure op die Cartesiese vlak EMD68

As ons die koördinate van die hoekpunte van ’n figuur gegee word, kan ons die figuur trek op die Cartesiese vlak. Byvoorbeeld, vierkhoek $ABCD$ met koördinate $A\,(1;1)$, $B\,(3;1)$, $C\,(3;3)$ en $D\,(1;3)$.

NOTA:
Jy mag ook koördinate geskryf sien as $A(1,1)$.

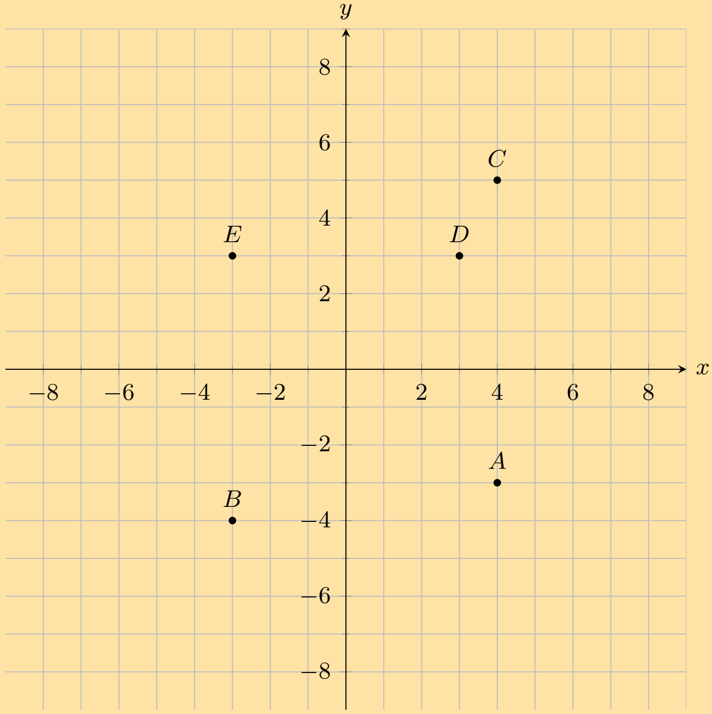


Die volgorde van die letters vir die benoeming van ’n figuur is belangrik. Dit dui die volgorde aan waarin punte verbind moet word: A met B, B met C, C met D en D terug na A. Dus ons kan na bostaande vierhoek verwys as vierhoek $ABCD$ of $CBAD$ of $BADC$. Dit is egter gebruiklik om die letters in alfabetiese volgorde te skryf en dan verwys ons na die vierhoek as $ABCD$.

BESOEK:
Jy kan die aanlyn hulpmiddel gebruik om jou te help wanneer jy punte op die Cartesiese vlak stip. Kliek hier om die volgende een te probeer op mathsisfun.com.

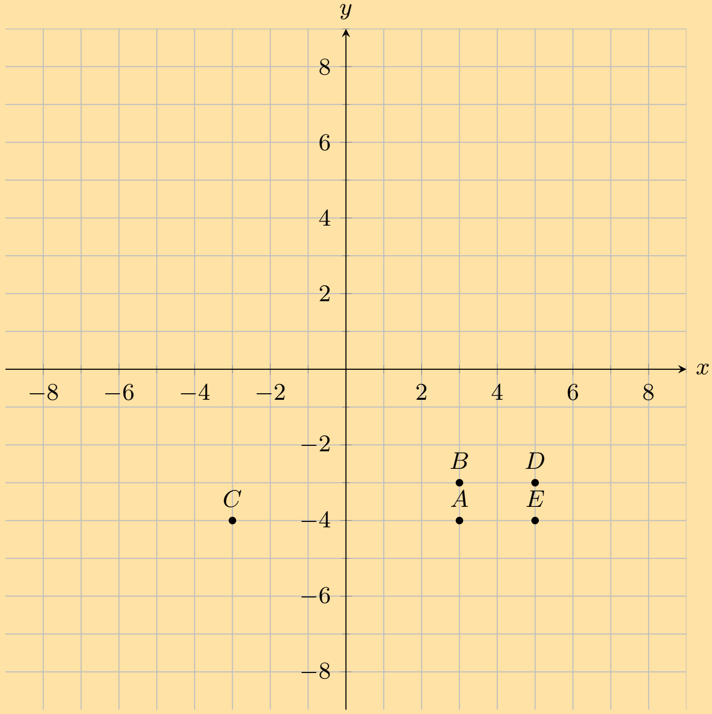
Oefening 8 – 1:

1. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



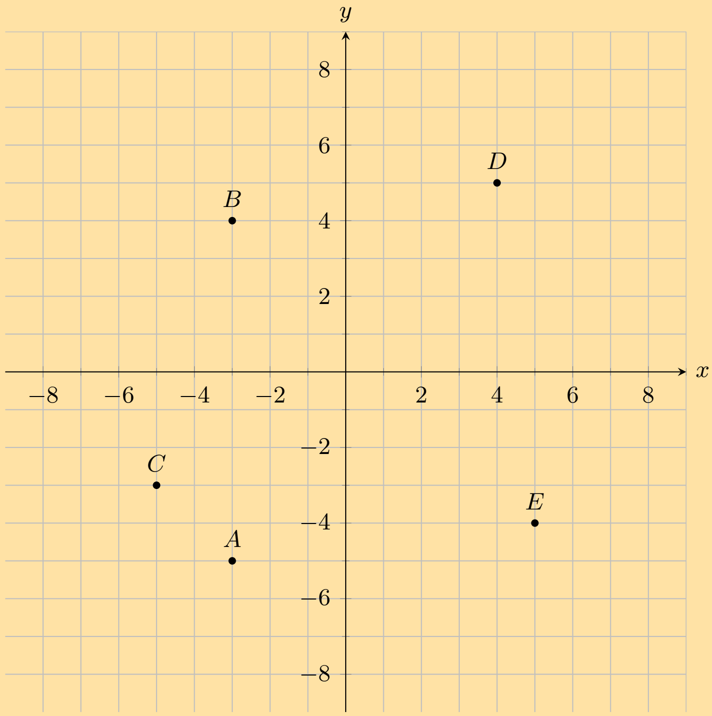
   Vind die koördinate van punt D.

2. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



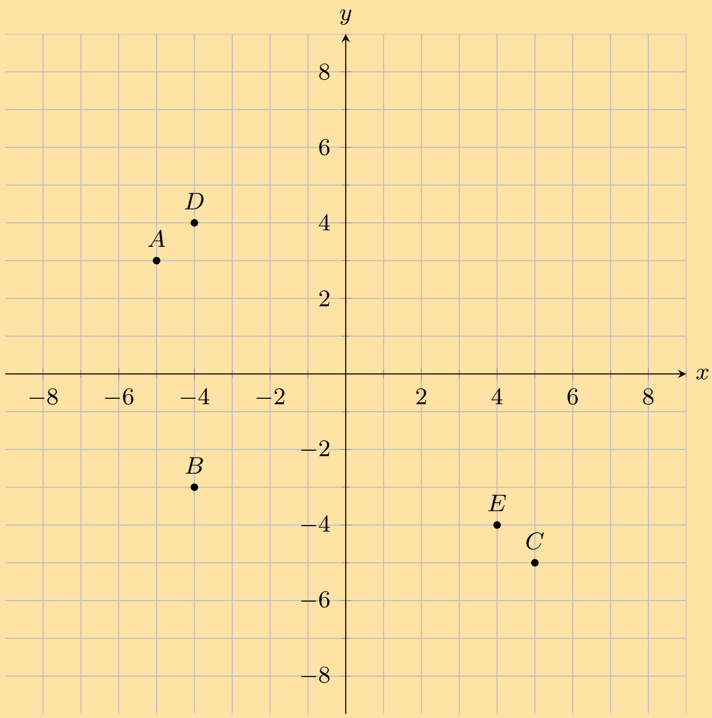
   Vind die koördinate van al die benoemde punte.

3. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



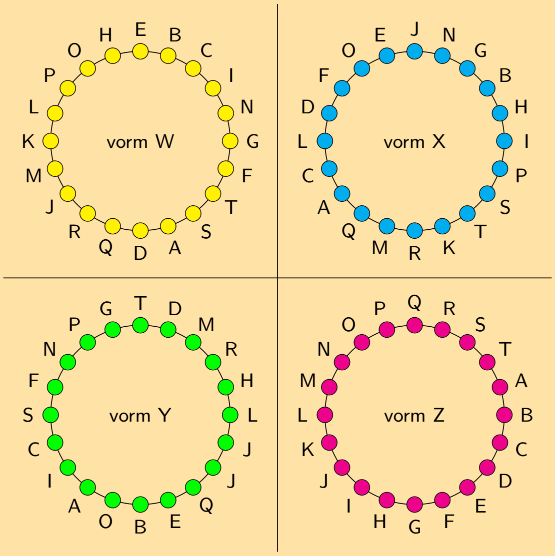
Watter punt lê by die koördinate $(5; -4)$?

4. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:

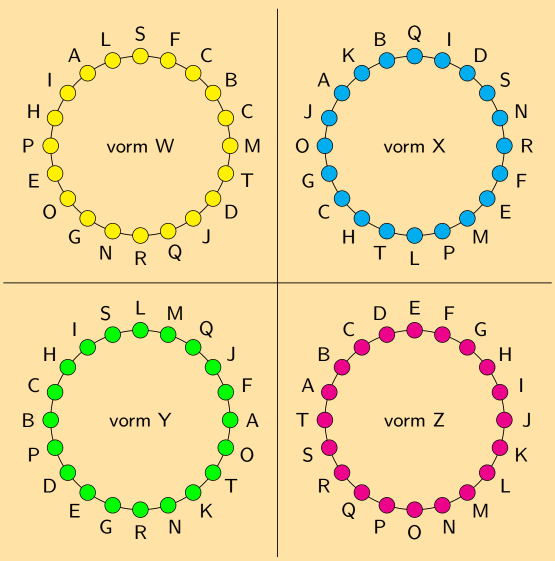


Watter punt lê by die koördinate $(-4; -3)$?

5. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme geteken.
   Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemings konvensies:



   Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?
6. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme geteken.
   Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemings konvensies:
   Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JYB 2. 2JYC 3. 2JYD 4. 2JYF 5. 2JYG 6. 2JYH

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

8.2 Afstand tussen twee punte

'n Punt is 'n eenvoudige meetkundige voorwerp wat posisie as sy enigste eienskap het.

DEFINISIE: *Punt*

'n Punt is 'n geordende getallepaar geskryf as $(x; y)$.

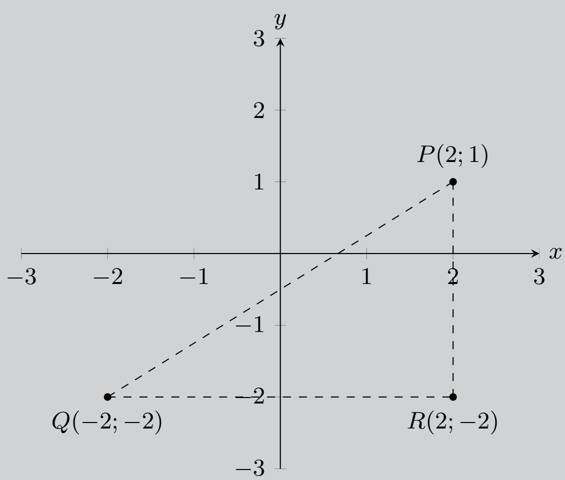
DEFINISIE: *Afstand*

Afstand is 'n maatstaf van die lengte tussen twee punte.

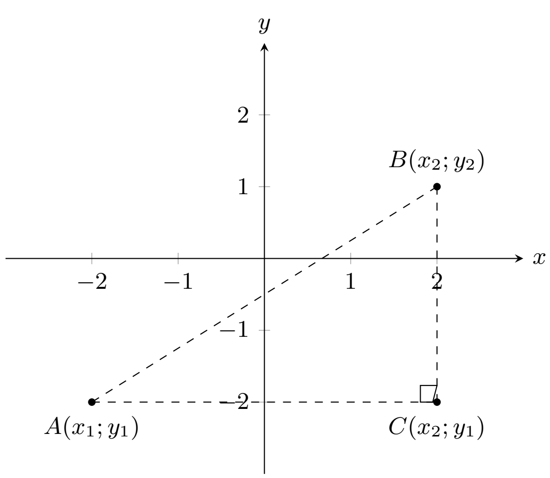
Ondersoek: Afstand tussen twee punte

Punte $P(2; 1)$, $Q(-2; -2)$ en $R(2; -2)$ word gegee.

- Kan ons aanvaar dat $\hat{R} = 90°$? Indien wel, hoekom?
- Pas die stelling van Pythagoras toe in $\triangle PQR$ om die lengte te vind van PQ.



Om die algemene formule te vind vir die afstand tussen twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$, gebruik ons die stelling van Pythagoras.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

En:

$$AC = x_2 - x_1$$
$$BC = y_2 - y_1$$

Dus:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Dus, om die afstand tussen enige twee punte, $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te bereken, gebruik ons:

afstand $(d) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Let op dat $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$.

BESOEK:
Die volgende video gee twee voorbeelde van die gebruik van die afstandformule en toon hoe om die afstandformule te bepaal.
Sien video: 2JYJ at www.everythingmaths.co.za

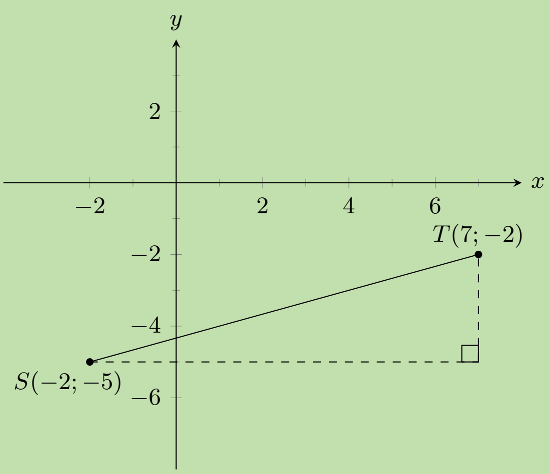
Uitgewerkte voorbeeld 1: Gebruik die afstandformule

VRAAG

Vind die afstand tussen $S(-2; -5)$ en $Q(7; -2)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$
Gestel die koördinate van S is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van T is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = -2 \quad y_1 = -5 \quad x_2 = 7 \quad y_2 = -2$$

Stap 3: Skryf die afstandsformule neer

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Stap 4: Substitueer waardes

$$\begin{aligned} d_{ST} &= \sqrt{(-2-7)^2 + (-5-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{81+9} \\ &= \sqrt{90} \\ &= 9{,}5 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord
Die afstand tussen S en T is 9,5 eenhede.

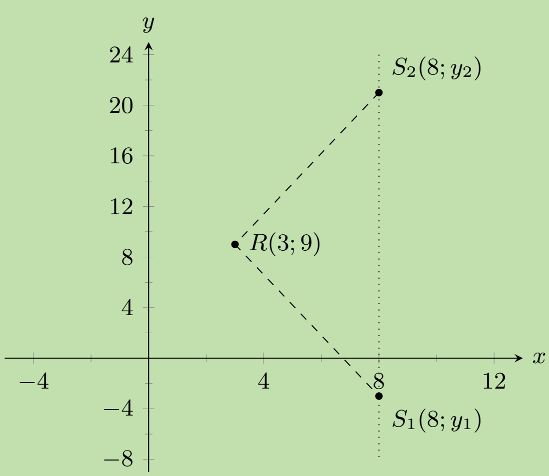
Uitgewerkte voorbeeld 2: Gebruik die afstandformule

VRAAG

Gegee $RS = 13$, $R(3; 9)$ en $S(8; y)$, vind y.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Let op dat ons twee moontlike waardes vir y verwag. Dit is omdat die afstandsformule die term $(y_1 - y_2)^2$ bevat wat uitloop op 'n kwadratiese vergelyking wanneer ons substitueer in die y koördinate in.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$
Gestel die koördinate van R is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van S is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 9 \quad x_2 = 8 \quad y_2 = y$$

Stap 3: Skryf die afstandsformule neer

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Stap 4: Substitueer waardes en los op vir y

$$\begin{aligned} 13 &= \sqrt{(3-8)^2 + (9-y)^2} \\ 13^2 &= (-5)^2 + \left(81 - 18y + y^2\right) \\ 0 &= y^2 - 18y - 63 \\ &= (y+3)(y-21) \\ \therefore y = -3 &\text{ of } y = 21 \end{aligned}$$

Stap 5: Kontroleer beide waardes vir y
Kontroleer $y = -3$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(3-8)^2 + (9+3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Kontroleer $y = 21$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(3-8)^2 + (9-21)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

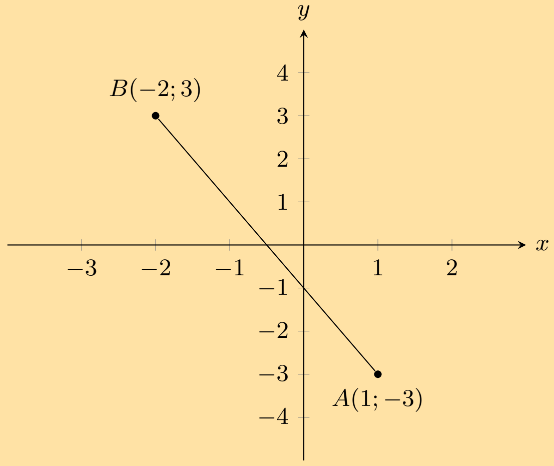
Stap 6: Skryf die finale antwoord
S is $(8; -3)$ of $(8; 21)$.

Dus $y = -3$ of $y = 21$.

NOTA:
Die teken van 'n skets help met jou berekening en maak dit makliker om te kontroleer of jou antwoord reg is.

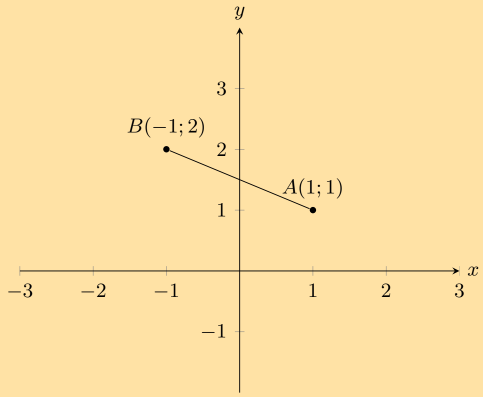
Oefening 8 – 2:

1. Jy word die volgende diagram gegee:



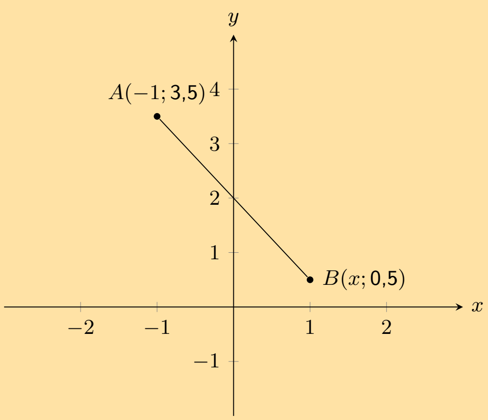
   Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.

2. Jy word die volgende diagram gegee:



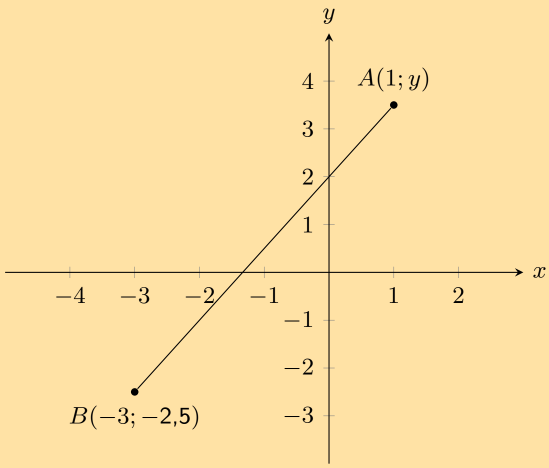
   Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.

3. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



   Die afstand tussen die punte is 3,6056. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

4. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



Die lyn AB het 'n lengte van 7,2111. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B. Rond jou antwoord af tot een desimale plek.

5. Vind die lengte van AB vir elk van die volgende. Laat jou antwoord in wortelvorm.
   a) $A(2; 7)$ en $B(-3; 5)$ b) $A(-3; 5)$ en $B(-9; 1)$ c) $A(x; y)$ en $B(x + 4; y - 1)$
6. Die lengte van $CD = 5$. Vind die ontbrekende koördinaat as:
   a) $C(6; -2)$ en $D(x; 2)$. b) $C(4; y)$ en $D(1; -1)$.
7. As die afstand tussen $C(0; -3)$ en $F(8; p)$ 10 eenhede is, vind die moontlike waardes van p.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JYK 2. 2JYM 3. 2JYN 4. 2JYP 5a. 2JYQ 5b. 2JYR
5c. 2JYS 6a. 2JYT 6b. 2JYV 7. 2JYW

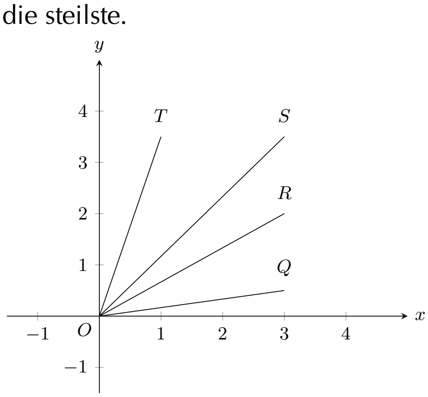
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.3 Gradiënt van 'n lyn EMD6B

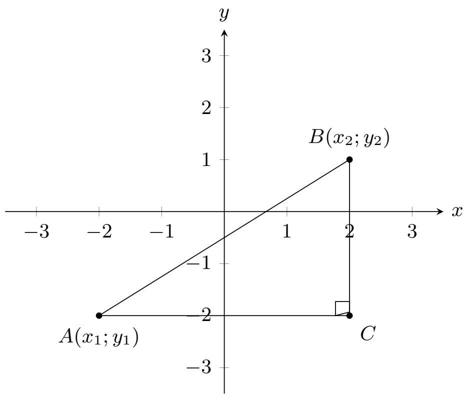
DEFINISIE: *Gradiënt*

Die gradiënt van 'n lyn word bepaal deur die verhouding van die vertikale verandering met betrekking tot die horisontale verandering.

Gradiënt (m) beskryf die helling of steilheid van die lyn wat twee punte verbind. In die figuur hieronder, is lyn OQ die mins steil lyn en lyn OT is die steilste.



Om die formule vir gradiënt af te lei, beskou ons enige reghoekige driehoek wat gevorm word deur $A\left(x_1; y_1\right)$ en $B\left(x_2; y_2\right)$ met skuinssy AB soos getoon in die diagram. Die gradiënt word bepaal deur die verhouding van die lengte van die vertikale sy van die driehoek tot die lengte van die horisontale sy van die driehoek. Die lengte van die vertikale sy van die driehoek is die verskil in y-waardes van punte A en B. Die lengte van die horisontale sy van die driehoek is die verskil in x-waardes van punte A en B.



Dus, die gradiënt word bepaal deur die formule te gebruik:

Gradiënt $(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ of $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

BELANGRIK!

Onthou om konsekwent te wees: $m \neq \dfrac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

BESOEK:
Om meer te leer oor die bepaling van die gradiënt, kan jy kyk na die volgende video.
Sien video: 2JYX at www.everythingmaths.co.za

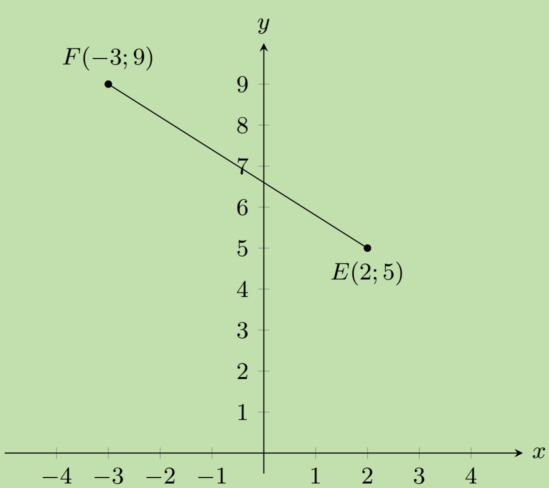
Uitgewerkte voorbeeld 3: Gradiënt tussen twee punte

VRAAG

Vind die gradiënt van die lyn tussen punte $E\left(2; 5\right)$ en $F\left(-3; 9\right)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Gestel die koördinate van E is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van F is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 5 \quad x_2 = -3 \quad y_2 = 9$$

Stap 3: Skryf die formule vir gradiënt neer

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4: Substitueer bekende waardes

$$\begin{aligned} m_{EF} &= \frac{9-5}{-3-2} \\ &= \frac{4}{-5} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die gradiënt van $EF = -\frac{4}{5}$

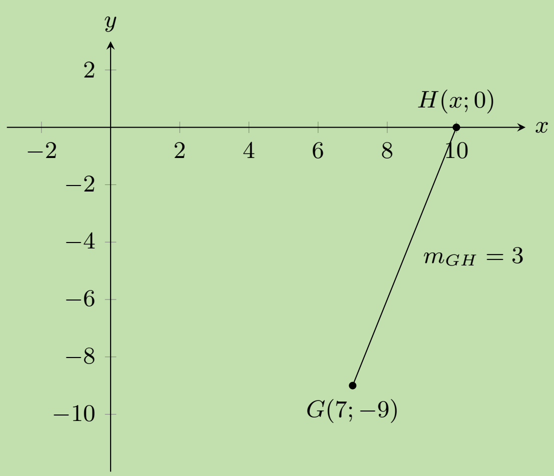
Uitgewerkte voorbeeld 4: Gradiënt tussen twee punte

VRAAG

Gegee $G\,(7; -9)$ en $H\,(x; 0)$, met $m_{GH} = 3$. Vind x.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Gestel die koördinate van G is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van H is $(x_2; y_2)$

$$x_1 = 7 \quad y_1 = -9 \quad x_2 = x \quad y_2 = 0$$

Stap 3: Skryf die formule vir gradiënt neer

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4: Substitueer waardes en los op vir x

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{0-(-9)}{x-7} \\ 3\left(x-7\right) &= 9 \\ x-7 &= \frac{9}{3} \\ x-7 &= 3 \\ x &= 3+7 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die koördinate van H is $(10; 0)$.

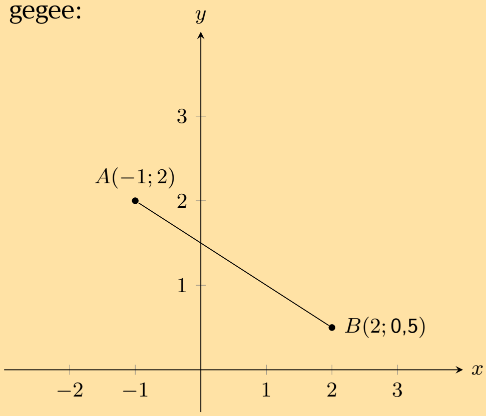
Dus $x = 10$.

Oefening 8 – 3:

1. Vind die gradiënt van AB as:

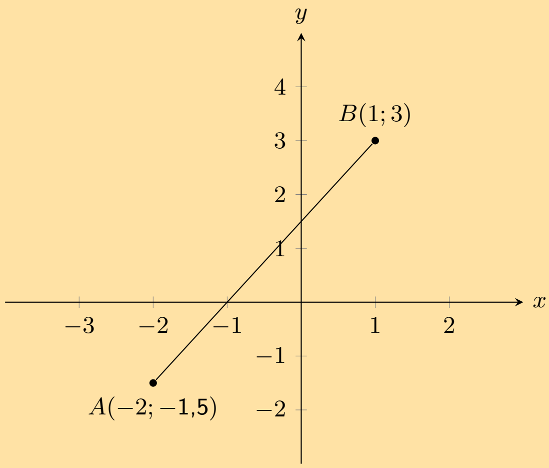
   a) $A(7; 10)$ en $B(-4; 1)$ b) $A(-5; -9)$ en $B(3; 2)$ c) $A(x-3; y)$ en $B(x; y+4)$

2. Jy word die volgende diagram gegee:

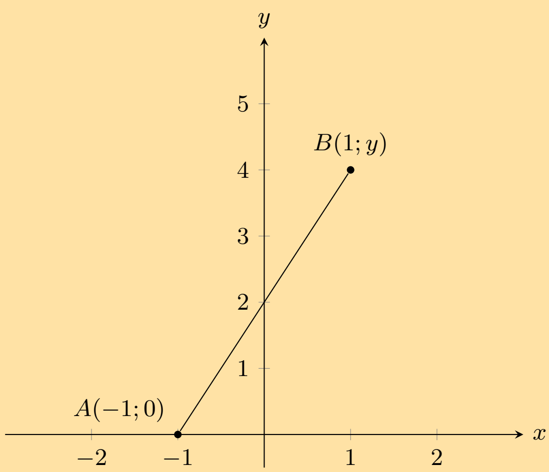


   Bereken die gradiënt (m) van lyn AB.

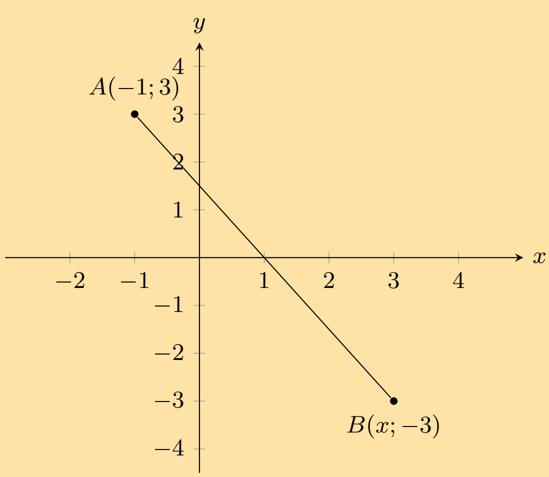
3. Bereken die gradiënt (m) van lyn AB in die volgende diagram:



4. As die gradiënt van $CD = \frac{2}{3}$, vind p, gegewe:
   a) $C(16; 2)$ en $D(8; p)$.
   b) $C(3; 2p)$ en $D(9; 14)$.
5. In die volgende diagram lyn AB 'n gradiënt (m) het van 2. Bereken die ontbrekende koördinaat van die punt B.



6. Jy word die volgende diagram gegee:



Dit word ook gegee dat lyn AB 'n gradiënt (m) het van van $-1{,}5$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van die punt B.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JYY 1b. 2JYZ 1c. 2JZ2 2. 2JZ3 3. 2JZ4 4a. 2JZ5
4b. 2JZ6 5. 2JZ7 6. 2JZ8

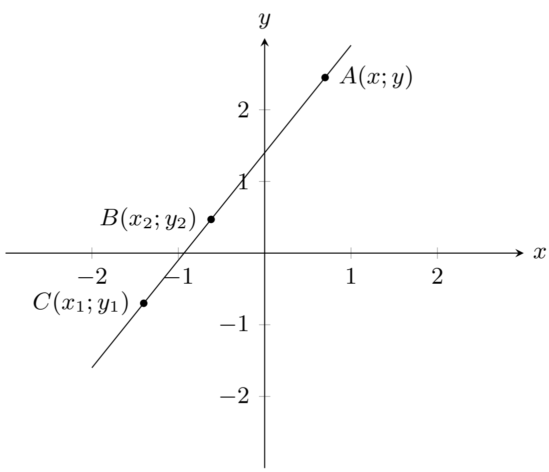
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Reguitlyne EMD6C

DEFINISIE: *Reguitlyn*

'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee van hierdie punte.

Beskou die diagram hieronder met punte $A\,(x;y)$, $B\,(x_2;y_2)$ en $C\,(x_1;y_1)$.



Ons het $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$ en $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Die algemene formule vir die vind van die vergelyking van 'n reguitlyn is $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ waar $(x;y)$ enige punt op die lyn is.

Hierdie formule kan ook geskryf word as $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.

Die standaardvorm van die reguitlyn vergelyking is $y = mx + c$ waar m die gradiënt is en c die y-afsnit is.

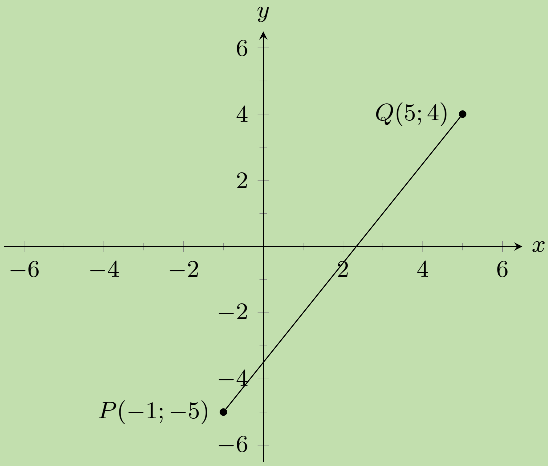
Uitgewerkte voorbeeld 5: Vind die vergelyking van 'n reguitlyn

VRAAG

Vind die vergelyking van die reguitlyn deur $P\,(-1;-5)$ en $Q\,(5;4)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken waardes toe

Gestel die koördinate van P is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van Q is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -5 \quad x_2 = 5 \quad y_2 = 4$$

Stap 3: Skryf die algemene formule van die lyn neer

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4: Vervang waardes en maak y die onderwerp van die vergelyking

$$\begin{aligned}
\frac{y - (-5)}{x - (-1)} &= \frac{4 - (-5)}{5 - (-1)} \\
\frac{y + 5}{x + 1} &= \frac{3}{2} \\
2(y + 5) &= 3(x + 1) \\
2y + 10 &= 3x + 3 \\
2y &= 3x - 7 \\
y &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die vergelyking van die reguitlyn is $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Ewewydige en loodregte lyne EMD6D

Twee lyne wat ewewydig aan mekaar loop is altyd dieselfde afstand van mekaar af en het dieselfde gradiënte.

As twee lyne mekaar loodreg sny, sal die produk van hulle gradiënte gelyk wees aan -1.

As lyn $WX \perp YZ$, dan $m_{WX} \times m_{YZ} = -1$. Loodregte lyne het gradiënte wat die negatiewe inverses is van mekaar.

BESOEK:
Die volgende video toon sommige voorbeelde om die helling van 'n lyn te bereken en om te bepaal of die twee lyne loodreg of ewewydig is.
Sien video: 2JZ9 at www.everythingmaths.co.za

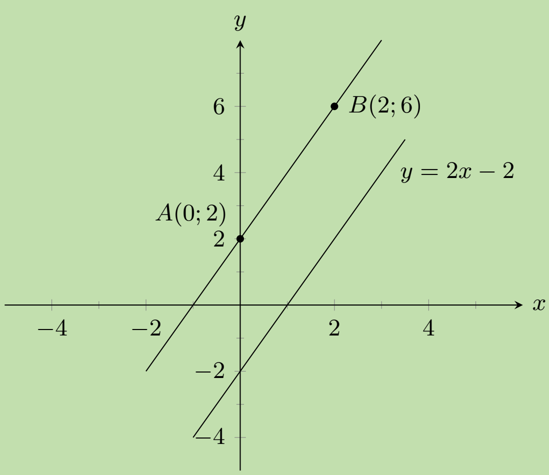
Uitgewerkte voorbeeld 6: Ewewydige lyne

VRAAG

Bewys dat die lyn AB met $A\,(0;2)$ en $B\,(2;6)$ ewewydig is aan lyn CD met vergelyking $2x - y = 2$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



(Wees versigtig - sommige lyne mag lyk of hulle ewewydig is, maar hulle is nie!)

Stap 2: Skryf die formule vir gradiënt neer

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 3: Substitueer waardes om die gradiënt te vind vir lyn AB

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{6-2}{2-0} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer dat die vergelyking van CD in standaardvorm $y = mx + c$ is

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ y &= 2x - 2 \\ \therefore m_{CD} &= 2 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$$m_{AB} = m_{CD}$$

Dus is lyn AB ewewydig aan lyn CD.

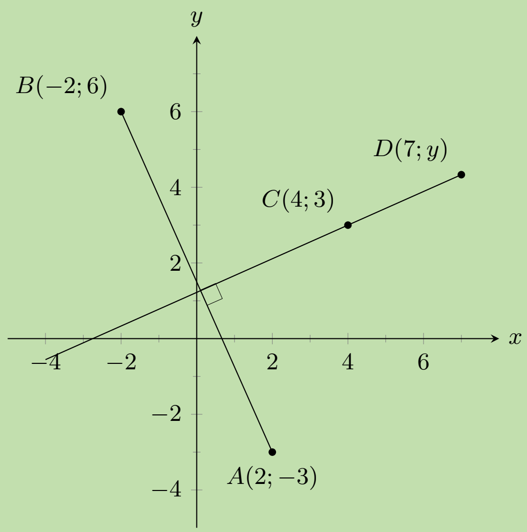
Uitgewerkte voorbeeld 7: Loodregte lyne

VRAAG

Lyn AB is loodreg op lyn CD. Vind y indien gegee $A\,(2;-3)$, $B\,(-2;6)$, $C\,(4;3)$ en $D\,(7;y)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Skryf die verwantskap neer tussen die gradiënte van die loodregte lyne $AB \perp CD$

$$\begin{aligned} m_{AB} \times m_{CD} &= -1 \\ \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} &= -1 \end{aligned}$$

Stap 3: Substitueer waardes in en los op vir y

$$\begin{aligned}
\frac{6-(-3)}{-2-2} \times \frac{y-3}{7-4} &= -1 \\
\frac{9}{-4} \times \frac{y-3}{3} &= -1 \\
\frac{y-3}{3} &= -1 \times \frac{-4}{9} \\
\frac{y-3}{3} &= \frac{4}{9} \\
y-3 &= \frac{4}{9} \times 3 \\
y-3 &= \frac{4}{3} \\
y &= \frac{4}{3} + 3 \\
&= \frac{4+9}{3} \\
&= \frac{13}{3} \\
&= 4\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Dus is die koördinate van $D\left(7; 4\frac{1}{3}\right)$.

Horisontale en vertikale lyne EMD6F

'n Lyn ewewydig aan die x-as word 'n horisontale lyn genoem en het 'n gradiënt van nul. Dit is omdat daar geen vertikale verandering is nie:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{0}{\text{verandering in } x} = 0$$

'n Lyn ewewydig aan die y-as word 'n vertikale lyn genoem en sy gradiënt is ongedefinieerd. Dit is omdat daar geen horisontale verandering is nie:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{\text{verandering in } y}{0} = \text{ ongedefinieerd}$$

Punte op 'n lyn EMD6G

'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee punte. Daar is twee metodes om te bewys dat die punte op dieselfde lyn lê: die gradiënt metode en 'n metode wat die afstandformule gebruik.

NOTA:
As twee punte op dieselfde lyn lê, dan sê ons die twee punte is ko-lineêr of saamlynig.

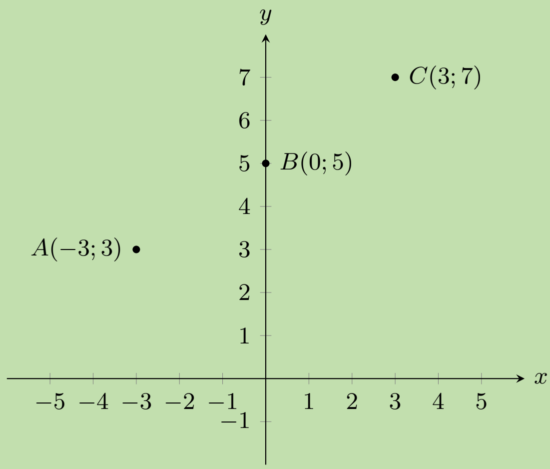
Uitgewerkte voorbeeld 8: Punte op 'n lyn

VRAAG

Bewys dat $A\,(-3;3)$, $B\,(0;5)$ en $C\,(3;7)$ op 'n reguitlyn is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Bereken twee gradiënte tussen enige drie punte

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m_{AB} = \frac{5-3}{0-(-3)} = \frac{2}{3}$$

en

$$m_{BC} = \frac{7-5}{3-0} = \frac{2}{3}$$

OF

$$m_{AC} = \frac{3-7}{3-3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

en

$$m_{BC} = \frac{7-5}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Stap 3: Verduidelik jou antwoord

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Dus is die punte A, B en C op 'n reguitlyn.

As ons die afstandsformule gebruik om te bewys dat drie punte op 'n reguitlyn lê, moet ons die afstande bereken tussen elke paar punte en dan bewys dat die som van die twee korter afstande gelyk is aan die langste afstand.

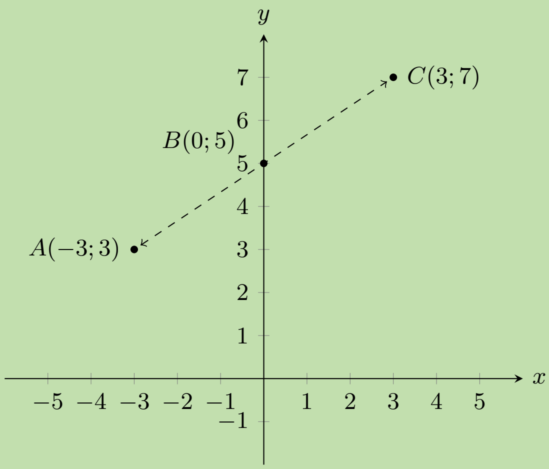
Uitgewerkte voorbeeld 9: Punte op 'n reguitlyn

VRAAG

Bewys dat $A(-3;3)$, $B(0;5)$ en $C(3;7)$ op 'n reguitlyn is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Bereken die drie afstande AB, BC en AC

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(-3-0)^2+(3-5)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \sqrt{(0-3)^2+(5-7)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{AC} &= \sqrt{((-3)-3)^2+(3-7)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{36+16} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Stap 3: Vind die som van die twee korter afstande

$$d_{AB}+d_{BC} = \sqrt{13}+\sqrt{13} = 2\sqrt{13} = \sqrt{4\times 13} = \sqrt{52}$$

Stap 4: Verduidelik jou antwoord

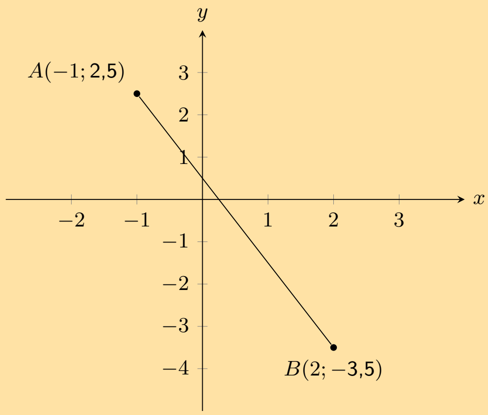
$$d_{AB}+d_{BC} = d_{AC}$$

Dus lê punte A, B en C op dieselfde reguitlyn.

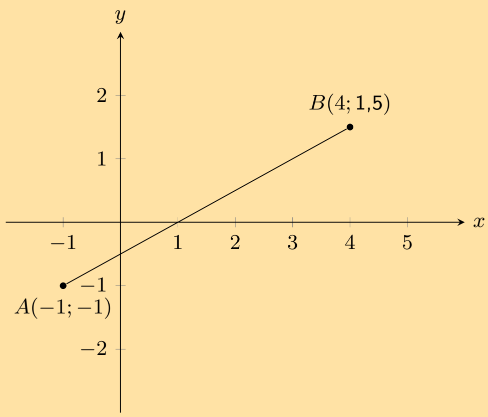
Oefening 8 – 4:

1. Bepaal of AB en CD ewewydig is, of loodreg of nie een van die twee nie:
   a) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;-1)$, $D(7;23)$
   b) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;-1)$, $D(0;-4)$
   c) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;3)$, $D(-2;2)$

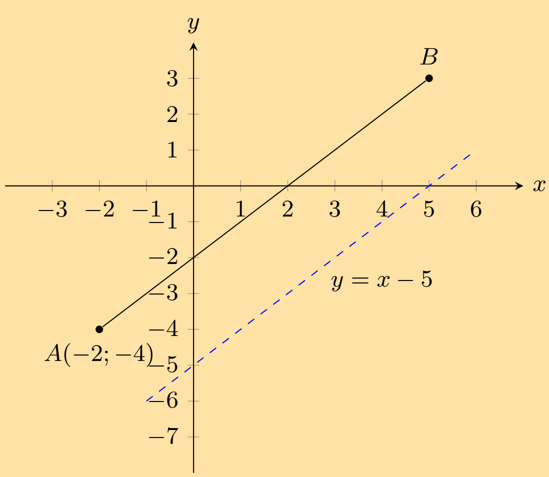
2. Bepaal of die volgende punte op dieselfde reguitlyn lê:
   a) $E(0;3)$, $F(-2;5)$, $G(2;1)$ b) $H(-3;-5)$, $I(0;0)$, $J(6;10)$ c) $K(-6;2)$, $L(-3;1)$, $M(1;-1)$
3. Bereken die vergelyking van die lyn AB in die volgende diagram:



4. Bereken die vergelyking van die lyn AB in die volgende diagram:

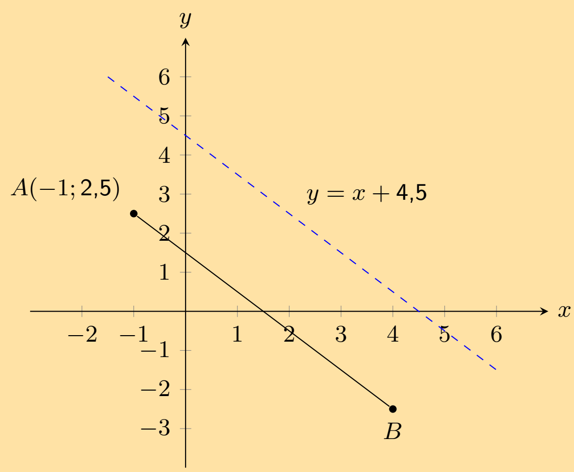


5. Punte $P(-6;2)$, $Q(2;-2)$ en $R(-3;r)$ lê op 'n reguitlyn. Vind die waarde van r.
6. Lyn PQ met $P(-1;-7)$ en $Q(q;0)$ het 'n gradiënt van 1. Vind q.
7. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy weet ook dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = x - 5$. Punt A is by $(-2;-4)$. Vind die vergelyking van die lyn AB.

8. Jy word die volgende diagram gegee:

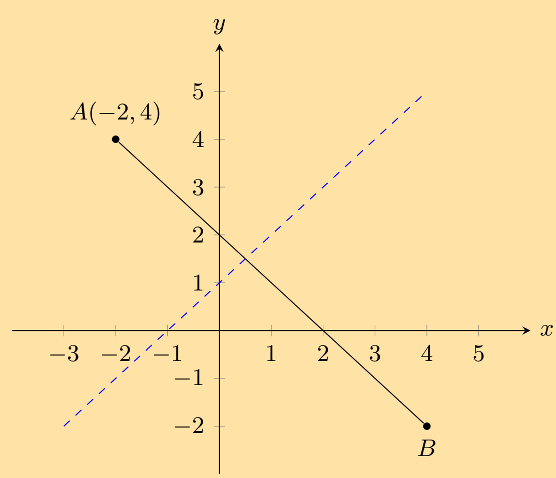


Jy weet ook dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = -x + 4{,}5$. Punt A is by $(-1; 2{,}5)$. Vind die vergelyking van die lyn AB.

9. Gegewe lyn AB wat ewewydig loop aan $y = 0{,}5x - 6$. Punte $A(-1; -2{,}5)$ en $B(x; 0)$ word ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

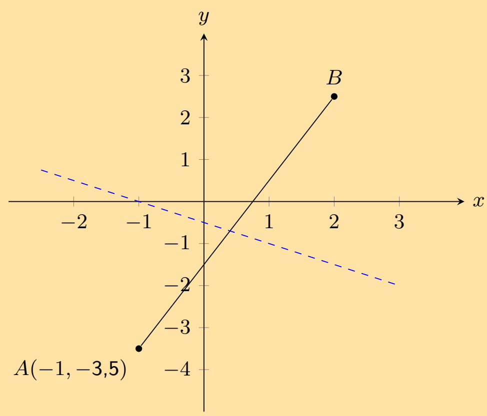
10. Gegewe lyn AB wat ewewydig loop aan $y = -1{,}5x + 4$. Punte $A(-2; 4)$ en $B(2; y)$ word ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt $B(2; y)$.

11. Die grafiek toon die lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



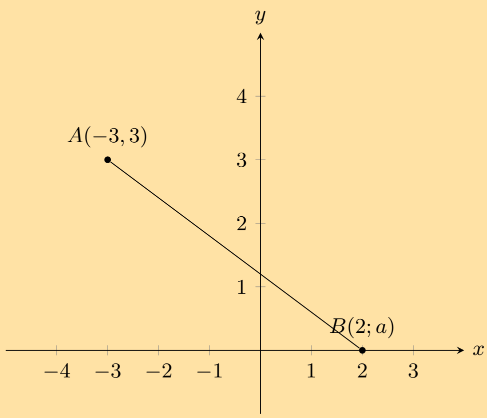
Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = x + 1$. Punt A is by $(-2; 4)$. Bepaal die vergelyking van lyn AB.

12. Die grafiek toon die lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



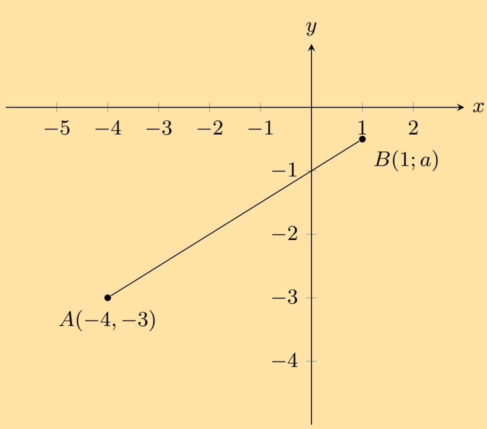
Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = -0{,}5x - 0{,}5$. Punt A is by $(-1; -3{,}5)$.
Bepaal die vergelyking van lyn AB.

13. Gegewe lyn AB wat loodreg is op die lyn CD met vergelyking $y = -2x + 1$. Punte $A(-5; -1)$ en $B(3; a)$ is ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
14. Gegewe lyn AB wat loodreg is op die lyn CD met vergelyking $y = 2x - 0{,}75$. Punte $A(-5; 1)$ en $B(a; -2{,}5)$ is ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
15. Jy word die volgende diagram gegee:



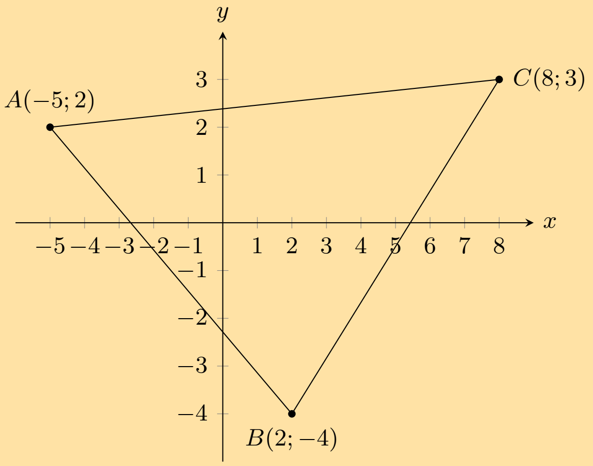
Jy weet ook lyn AB het die volgende vergelyking: $y = -0{,}5x + 1{,}5$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

16. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy weet ook lyn AB het die volgende vergelyking: $y = 0{,}5x - 1$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

17. A is die punt $(-3; -5)$ en B is die punt $(n; -11)$. AB is loodreg op lyn CD met vergelyking $y = \frac{3}{2}x - 5$. Vind die waarde van n.
18. Die punte $A(4; -3)$, $B(-5; 0)$ en $C(-3; p)$ word gegee. Bepaal die waarde van p as A, B en C saamlynig is.
19. Verwys na die diagram hieronder:



a) Toon dat $\triangle ABC$ reghoekig is. Toon jou bewerkings.
b) Vind die area van $\triangle ABC$.

20. Die punte $A(-3; 1)$, $B(3; -2)$ en $C(9; 10)$ is gegee.

a) Bewys driehoek ABC is 'n reghoekige driehoek.
b) Vind die koördinate van D, as $ABCD$ 'n parallelogram is.
c) Vind die vergelyking van die lyn ewewydig aan die lyn BC, en wat deur die punt A gaan.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JZB	1b. 2JZC	1c. 2JZD	2a. 2JZF	2b. 2JZG	2c. 2JZH	3. 2JZJ	4. 2JZK
5. 2JZM	6. 2JZN	7. 2JZP	8. 2JZQ	9. 2JZR	10. 2JZS	11. 2JZT	12. 2JZV
13. 2JZW	14. 2JZX	15. 2JZY	16. 2JZZ	17. 2K22	18. 2K23	19. 2K24	20. 2K25

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

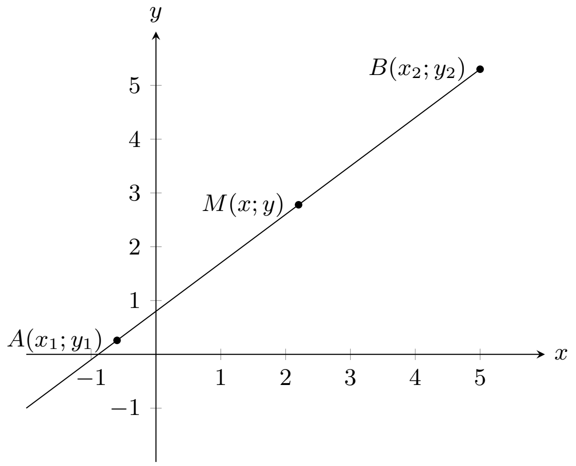
8.4 Middelpunt van 'n lyn EMD6H

Ondersoek: Vind die middelpunt van 'n lyn

Stip die punte $P\,(2; 1)$ en $Q\,(-2; 2)$ noukeurig op grafiekpapier en trek die lyn PQ.

- Vou die stuk papier so dat punt P presies bo-op punt Q val.
- Waar die gevoude lyn die lyn PQ sny, merk punt S
- Tel die blokkies en vind die presiese posisie van S.
- Skryf die koördinate van S neer.

Ons gebruik die volgende formule om die koördinate te bereken van die middelpunt $M\,(x;y)$ van enige lyn tussen die punte $A\,(x_1;y_1)$ en $B\,(x_2;y_2)$:



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Hiervan verkry ons die middelpunt van 'n lyn:

Middelpunt $M\,(x;y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\,;\,\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

BESOEK:
Die video toon sommige voorbeelde van die vind van die middelpunt van 'n lyn.
Sien video: 2K26 at www.everythingmaths.co.za

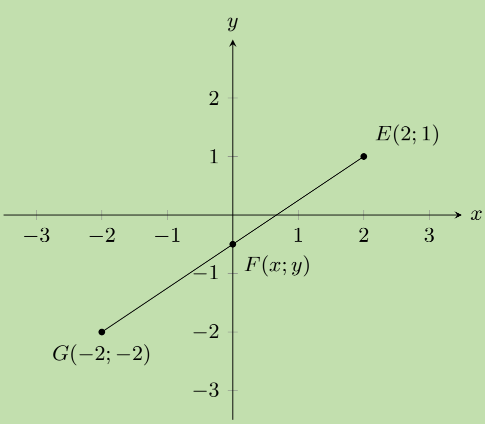
Uitgewerkte voorbeeld 10: Berekening van die middelpunt

VRAAG

Bereken die koördinate van die middelpunt $F\,(x;y)$ van die lyn tussen punt $E\,(2;1)$ en punt $G\,(-2;-2)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Van die skets kan ons skat dat F op die y-as sal lê, met 'n negatiewe y-koördinaat.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

$$x_1 = -2 \quad y_1 = -2 \quad x_1 = 2 \quad y_2 = 1$$

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer

$$F\,(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Stap 4: Vervang waardes in die middelpuntformule

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{-2 + 2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{-2 + 1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die antwoord

Die middelpunt is by $F\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

As ons na die skets kyk, sien ons dit is wat ons sou verwag vir die koördinate van F.

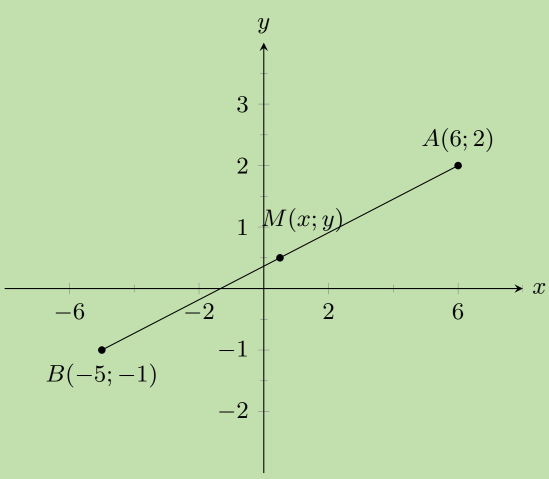
Uitgewerkte voorbeeld 11: Berekening van die middelpunt

VRAAG

Vind die middelpunt van die lyn AB, gegewe $A\,(6; 2)$ en $B\,(-5; -1)$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Van die skets kan ons skat dat M in kwadrant 1 sal lê met positiewe x- en y-koördinate.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Laat die middelpunt $M(x; y)$ wees

$$x_1 = 6 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = -5 \quad y_2 = -1$$

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Stap 4: Vervang waardes en vereenvoudig

$$M(x; y) = \left(\frac{6-5}{2}; \frac{2-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ is die middelpunt van lyn AB.

Ons het verwag dat M positiewe x- en y-koördinate sal hê en dit is dan ook wat ons gekry het met berekening.

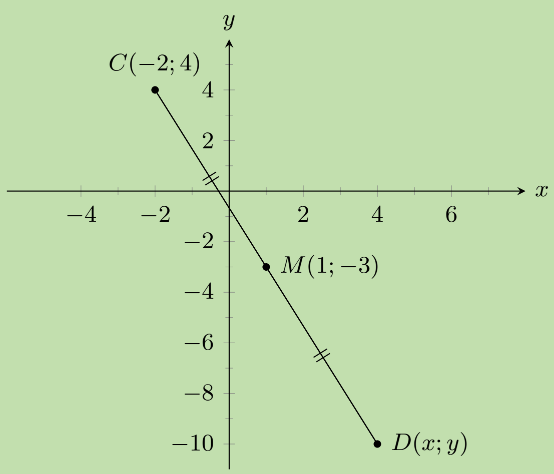
Uitgewerkte voorbeeld 12: Gebruik die middelpuntformule

VRAAG

Die lyn wat $C(-2; 4)$ en $D(x; y)$ verbind, het middelpunt $M(1; -3)$. Vind punt D.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Van die skets kan ons oordeel dat D in kwadrant IV sal val, met 'n positiewe x- en negatiewe y-koördinaat.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Gestel die koördinate van C is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van D is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = -2 \quad y_1 = 4 \quad x_2 = x \quad y_2 = y$$

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer

$$M(x;y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Stap 4: Substitueer waardes en los op vir x_2 en y_2

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-2 + x_2}{2} \\ 1 \times 2 &= -2 + x_2 \\ 2 &= -2 + x_2 \\ x_2 &= 2 + 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3 &= \frac{4 + y_2}{2} \\ -3 \times 2 &= 4 + y_2 \\ -6 &= 4 + y_2 \\ y_2 &= -6 - 4 \\ y_2 &= -10 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die koördinate van punt D is $(4; -10)$.

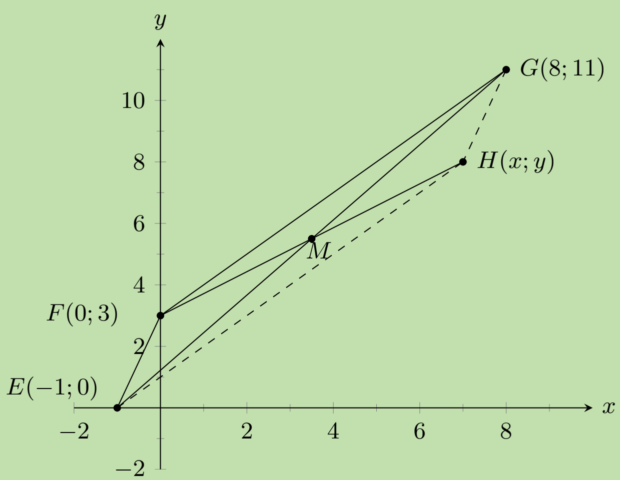
Uitgewerkte voorbeeld 13: Gebruik die middelpuntformule

VRAAG

Punte $E(-1;0)$, $F(0;3)$, $G(8;11)$ en $H(x;y)$ is punte op die Cartesiese vlak. Vind $H(x;y)$ as $EFGH$ 'n parallelogram is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Metode: die diagonale van 'n parallelogram halveer mekaar, dus sal die middelpunt van EG dieselfde wees as die middelpunt van FH. Ons moet eers die middelpunt kry van EG. Ons kan dit dan gebruik om die koördinate van punt H te bepaal.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Laat $M(x;y)$ die middelpunt van EG wees

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 8 \quad y_2 = 11$$

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer

$$M(x;y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Stap 4: Substitueer waardes en bereken die koördinate van M

$$M(x;y) = \left(\frac{-1 + 8}{2}; \frac{0 + 11}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Stap 5: Gebruik die koördinate van M om H te bepaal

M is ook die middelpunt van FH dus gebruik ons $M\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$ en $F(0;3)$ om vir $H(x;y)$ op te los.

Stap 6: Substitueer waardes en los op vir x en y

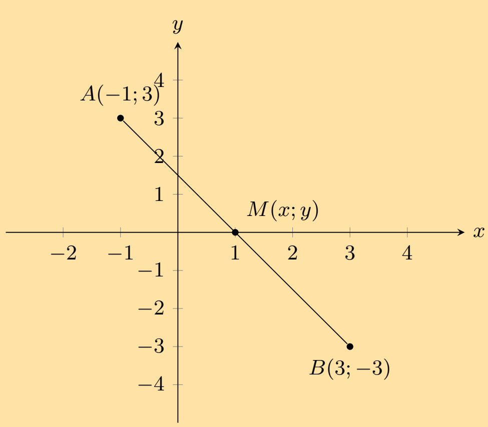
$$\begin{aligned} \frac{7}{2} &= \frac{0+x}{2} \\ 7 &= x + 0 \\ x &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{11}{2} &= \frac{3+y}{2} \\ 11 &= 3 + y \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Stap 7: Skryf die finale antwoord

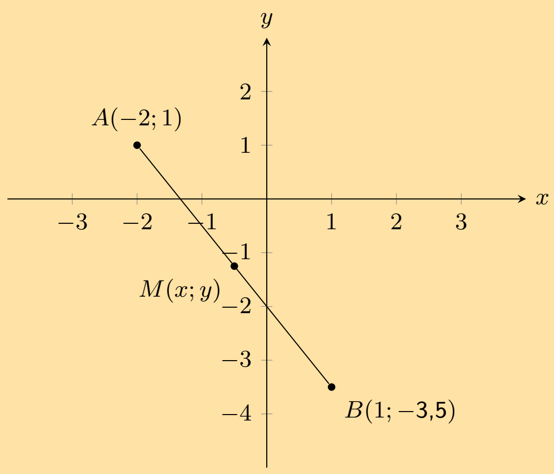
Die koördinate van H is $(7;8)$.

Oefening 8 – 5:

1. Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-1;3)$ en punt $B(3;-3)$ in die volgende diagram:



2. Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-2;1)$ en punt $B(1;-3{,}5)$ in die volgende diagram gegee:



3. Vind die middelpunte van die volgende lyne:
   a) $A(2;5)$, $B(-4;7)$
   b) $C(5;9)$, $D(23;55)$
   c) $E(x+2;y-1)$, $F(x-5;y-4)$
4. Die middelpunt M van PQ is $(3;9)$. Vind P as Q $(-2;5)$ is.
5. $PQRS$ is 'n parallelogram met die punte $P(5;3)$, $Q(2;1)$ en $R(7;-3)$. Vind punt S.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K27 2. 2K28 3a. 2K29 3b. 2K2B 3c. 2K2C 4. 2K2D 5. 2K2F

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

8.5 Hoofstuk opsomming EMD6J

Sien aanbieding: 2K2G at www.everythingmaths.co.za

- 'n Punt is 'n geordende getallepaar geskryf as $(x;y)$.
- Afstand is 'n maatstaf van die lengte tussen twee punte.
- Die formule om die afstand tussen enige twee punte te vind, is:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Die gradiënt tussen twee punte word bepaal deur die verhouding van vertikale verandering tot horisontale verandering.
- Die formule vir die vind van die gradiënt van 'n lyn is:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- 'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee van hierdie punte.
- Die standaardvorm vir die reguitlynvergelyking is $y = mx + c$.
- Die vergelyking van 'n reguitlyn kan ook geskryf word as

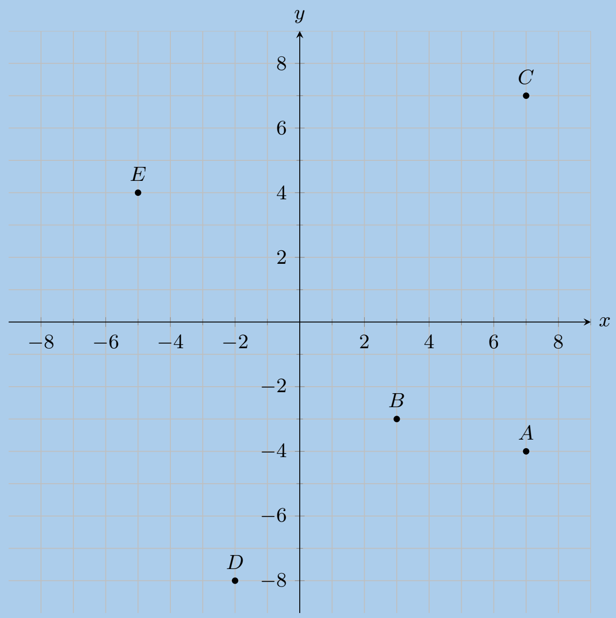
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- As twee lyne ewewydig is, is hulle gradiënte gelyk.
- As twee lyne loodreg is op mekaar, is die produk van hulle gradiënte gelyk aan -1.
- Vir horisontale lyne is die gradiënt gelyk aan 0.
- Vir vertikale lyne is die gradiënt ongedefinieerd.
- Die formule vir die vind van die middelpunt tussen twee punte is:

$$M\left(x;y\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2};\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

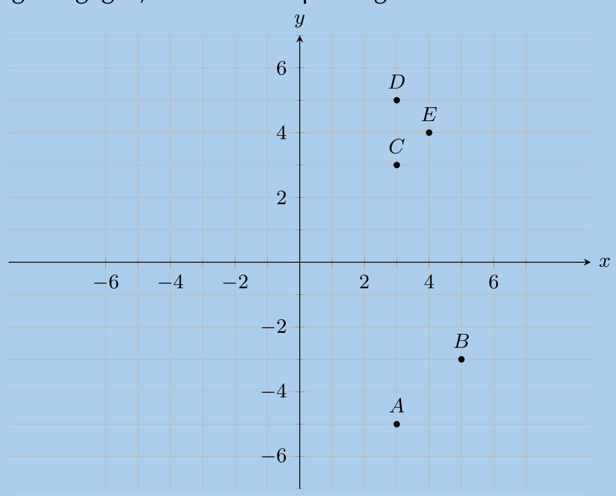
End of chapter Exercise 8 – 6:

1. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



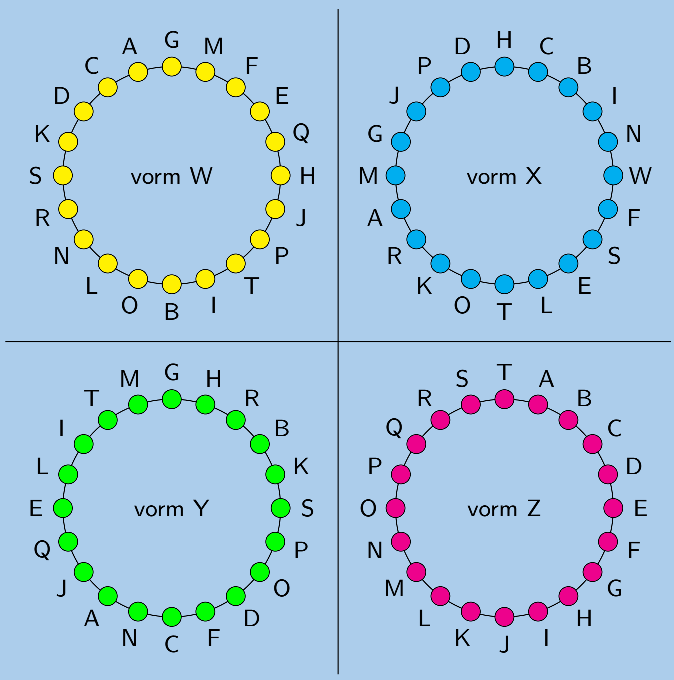
Vind die koördinate van punte A, B, C, D en E.

2. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



Watter punt lê by die koördinate $(3;-5)$?

3. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme getrek.
   Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemingskonvensies:

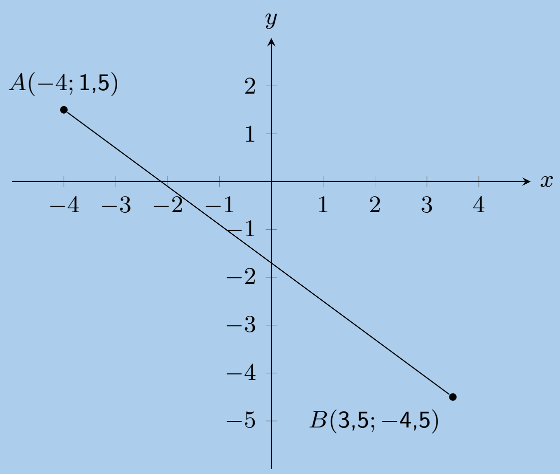


   Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?

4. Stel die volgende figure voor in die Cartesiese vlak:

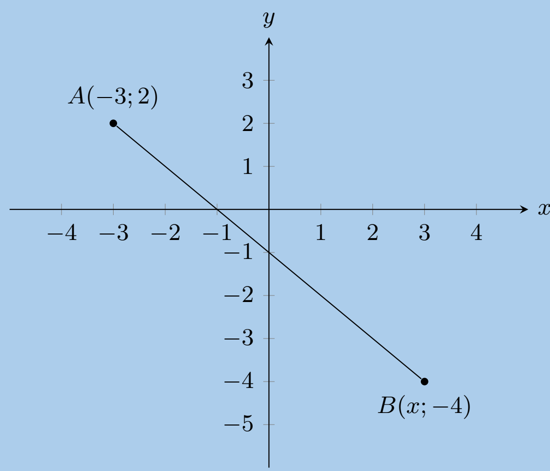
   a) Driehoek DEF met $D(1;2)$, $E(3;2)$ en $F(2;4)$.
   b) Vierhoek $GHIJ$ met $G(2;-1)$, $H(0;2)$, $I(-2;-2)$ en $J(1;-3)$.
   c) Vierhoek $MNOP$ met $M(1;1)$, $N(-1;3)$, $O(-2;3)$ en $P(-4;1)$.
   d) Vierhoek $WXYZ$ met $W(1;-2)$, $X(-1;-3)$, $Y(2;-4)$ en $Z(3;-2)$.

5. Jy word die volgende diagram gegee:



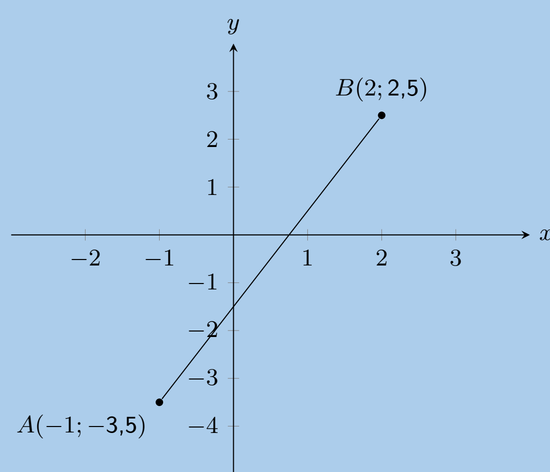
   Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.

6. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



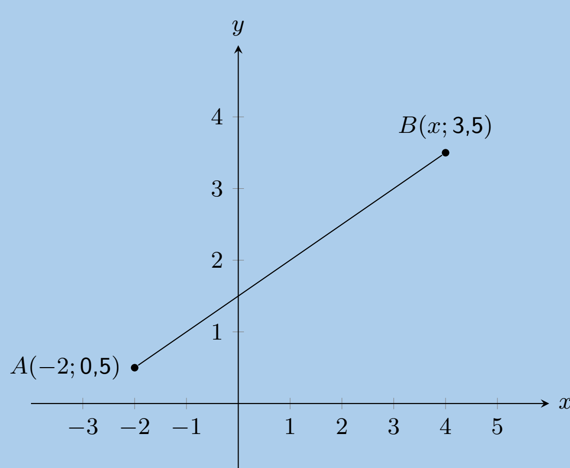
Die afstand tussen die punte is 8,4853. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

7. Jy word die volgende diagram gegee:



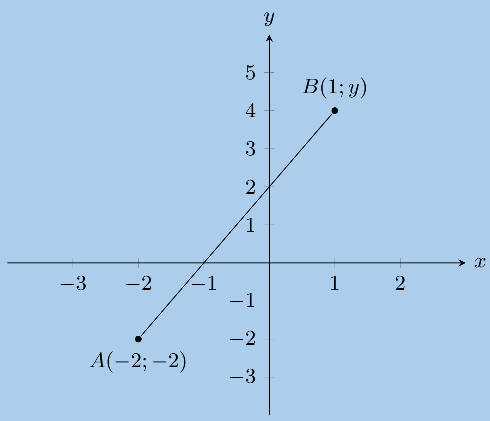
Bereken die gradiënt (m) van lyn AB. Die koördinate is $A(-1; -3{,}5)$ en $B(2; 2{,}5)$ onderskeidelik.

8. Jy word die volgende diagram gegee:



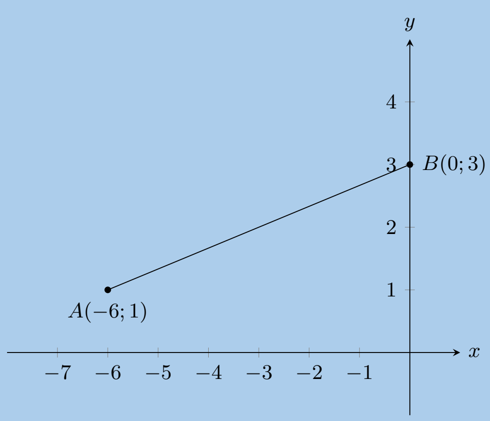
Dit word verder gegee dat AB 'n gradiënt, m, van 0,5 het.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

9. Jy word die volgende diagram gegee:



Dit word verder gegee dat die lyn AB 'n gradiënt, m, van 2 het. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

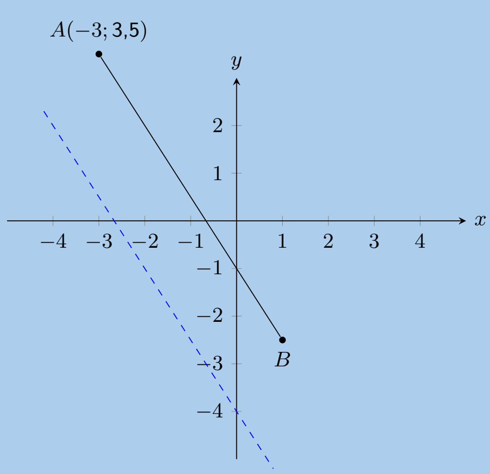
10. In die diagram is A die punt $(-6;1)$ en B is die punt $(0;3)$.



a) Vind die vergelyking van lyn AB.

b) Bereken die lengte van AB.

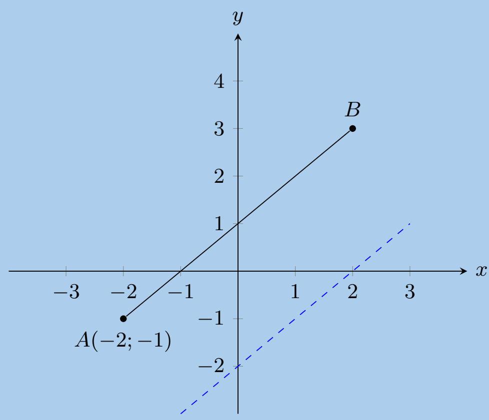
11. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = -1{,}5x - 4$. Punt A is by $(-3; 3{,}5)$.

Vind die vergelyking van die lyn AB.

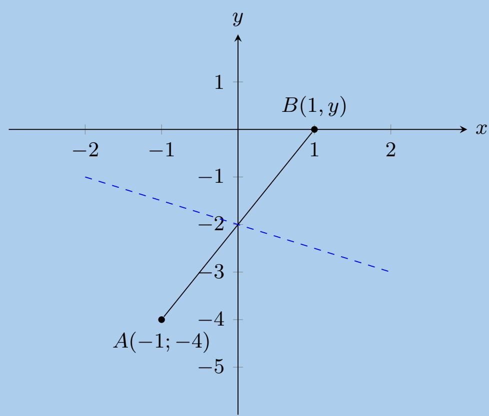
12. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat lyn AB ewewydig is aan die volgende lyn: $y = x - 2$.

Bereken die ontbrekende koördinaat van punt $B(x; 3)$.

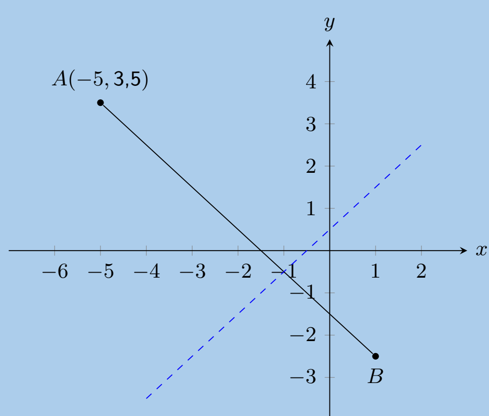
13. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat lyn AB loodreg is op lyn: $y = -0{,}5x - 2$.

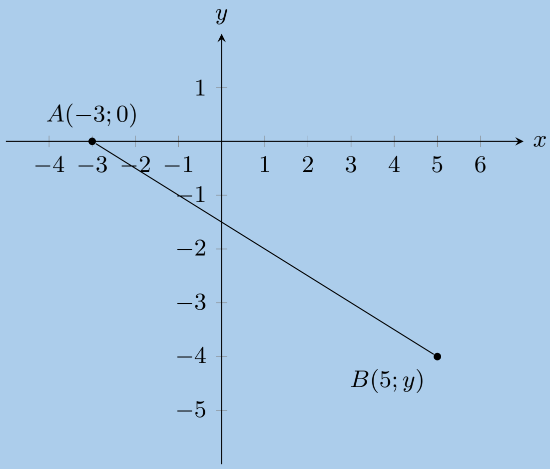
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

14. Die grafiek hier toon lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



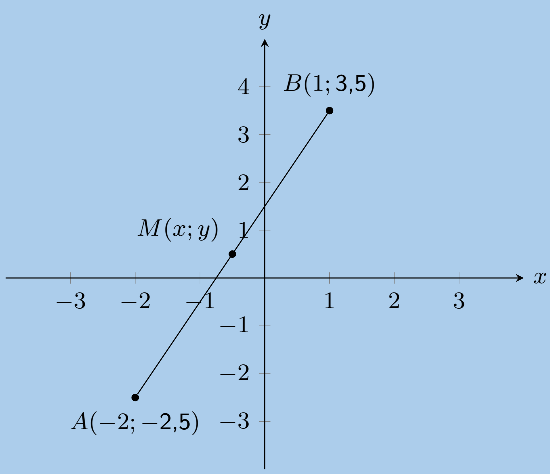
Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = x + 0{,}5$. Punt A is by $(-5; 3{,}5)$. Bepaal die vergelyking van lyn AB.

15. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat lyn AB die volgende vergelyking: $y = -0{,}5x - 1{,}5$ het. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

16. Jy word die volgende diagram gegee:

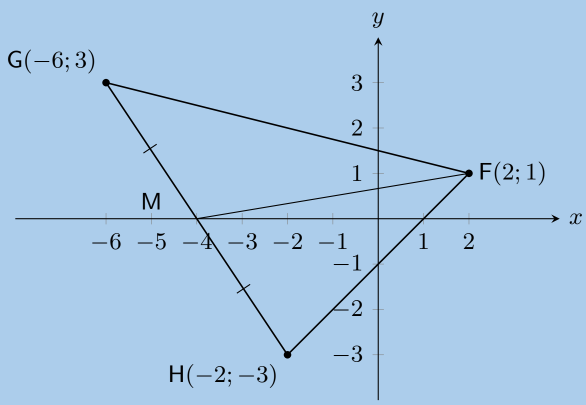


Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-2; -2{,}5)$ en punt $B(1; 3{,}5)$ korrek tot 1 desimale plek.

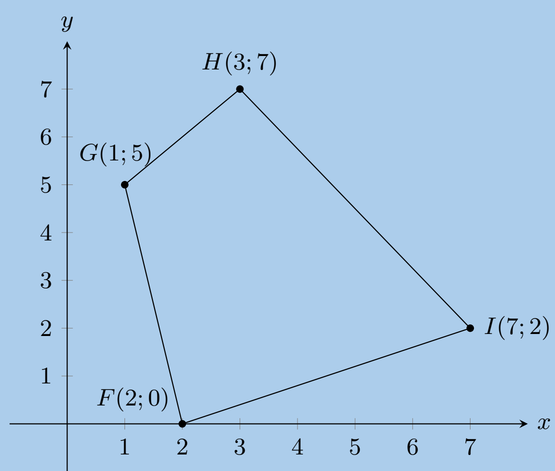
17. $A(-2; 3)$ en $B(2; 6)$ is punte in die Cartesiese vlak. $C(a; b)$ is die middelpunt van AB. Vind die waardes van a en b.

18. Bepaal die vergelykings van die volgende reguitlyne:

   a) gaan deur $P(5; 5)$ en $Q(-2; 12)$.
   b) ewewydig aan $y = 3x + 4$ terwyl dit deur $(4; 0)$ gaan.
   c) gaan deur $F(2; 1)$ en die middelpunt van GH waar $G(-6; 3)$ and $H(-2; -3)$.



19. In die diagram hieronder is die hoekpunte van die vierhoek $F(2;0)$, $G(1;5)$, $H(3;7)$ en $I(7;2)$.



a) Bereken die lengtes van die sye van $FGHI$.
b) Is die teenoorstaande sye van $FGHI$ ewewydig?
c) Halveer die hoeklyne van $FGHI$ mekaar?
d) Kan jy vasstel watter tipe vierhoek $FGHI$ is? Gee redes vir jou antwoord.

20. Beskou 'n vierhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(3;2)$, $B(4;5)$, $C(1;7)$ en $D(1;3)$.

a) Teken die vierhoek.
b) Vind die lengtes van die sye van die vierhoek.

21. $ABCD$ is 'n vierhoek met hoekpunte $A(0;3)$, $B(4;3)$, $C(5;-1)$ en $D(-1;-1)$.

a) Toon deur berekening dat:
   i. $AD = BC$
   ii. $AB \parallel DC$
b) Watter tipe vierhoek is $ABCD$?
c) Toon dat hoeklyne AC en BD mekaar nie halveer nie.

22. P, Q, R en S is die punte $(-2;0)$, $(2;3)$, $(5;3)$ en $(-3;-3)$ onderskeidelik.

a) Wys dat:
   i. $SR = 2PQ$
   ii. $SR \parallel PQ$
b) Bereken:
   i. PS
   ii. QR
c) Watter soort vierhoek is $PQRS$? Gee redes vir jou antwoord.

23. $EFGH$ is 'n parallelogram met hoekpunte $E(-1;2)$, $F(-2;-1)$ en $G(2;0)$. Vind die koördinate van H deur gebruik te maak van die feit dat die diagonale of hoeklyne van 'n parallelogram mekaar halveer.

24. $PQRS$ is vierhoek met punte $P(0;-3)$, $Q(-2;5)$, $R(3;2)$ en $S(3;-2)$ in die Cartesiese vlak.

    a) Vind die lengte van QR.
    b) Vind die gradiënt van PS.
    c) Vind die middelpunt van PR.
    d) Is $PQRS$ 'n parallelogram? Gee redes vir jou antwoord.

25. Oorweeg driehoek ABC met hoekpunte $A(1;3)$, $B(4;1)$ en $C(6;4)$.

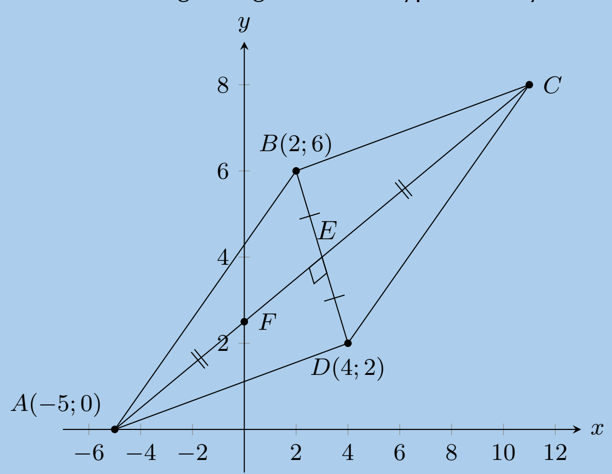
    a) Skets driehoek ABC op die Cartesiese vlak.
    b) Wys dat ABC 'n gelykbenige driehoek is.
    c) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van AC.
    d) Bepaal die gradiënt van AB.
    e) Toon dat $D(7;-1)$ op die lyn lê wat deur A en B gaan.

26. $\triangle PQR$ het hoekpunte $P(1;8)$, $Q(8;7)$ en $R(7;0)$. Toon deur berekening dat $\triangle PQR$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.

27. $\triangle ABC$ het hoekpunte $A(-3;4)$, $B(3;-2)$ en $C(-5;-2)$. M is die middelpunt van AC en N is die middelpunt van BC. Gebruik $\triangle ABC$ om die middelpuntstelling te bewys met die gebruik van analitiese meetkunde metodes.

28. a) Noem twee eienskappe van 'n parallelogram.
    b) Die punte $A(-2;-4)$, $B(-4;1)$, $C(2;4)$ en $D(4;-1)$ is die hoekpunte van 'n vierhoek. Toon dat die vierhoek 'n parallelogram is.

29. Die diagram toon 'n vierhoek. Punte B en D het onderskeidelik die koördinate $(2;6)$ en $(4;2)$. Die hoeklyne van $ABCD$ halveer mekaar reghoekig. F is die snypunt van lyn AC met die y-as.

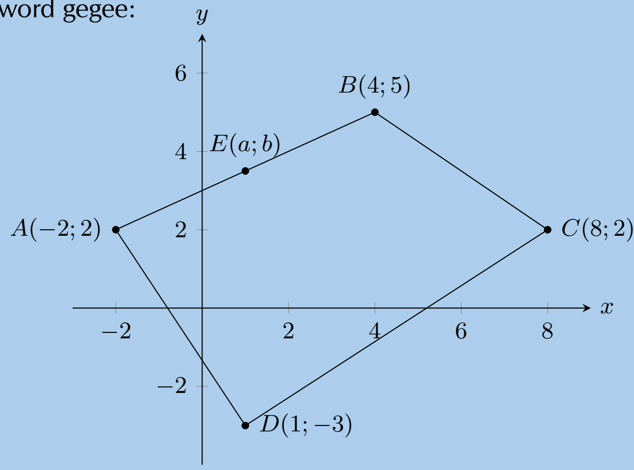


    a) Bepaal die gradiënt van AC.
    b) Toon dat die vergelyking van AC gegee word deur $2y = x + 5$.
    c) Bepaal die koördinate van C.

30. $A(4;-1)$, $B(-6;-3)$ en $C(-2;3)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$.

    a) Vind die lengte van BC, korrek tot 1 desimale plek.
    b) Bereken die gradiënt van AC.
    c) As P koördinate het van $(-26;19)$, toon dat A, C en P ko-lineêr is.
    d) Bepaal die vergelyking van lyn BC.
    e) Toon dat $\triangle ABC$ reghoekig is.

31. Die volgende diagram word gegee:



a) As E die middelpunt is van AB, vind die waardes van a and b.
b) Vind die vergelyking van die lyn loodreg op BC, en wat deur die oorsprong gaan.
c) Vind die koördinate van die middelpunt van die hoeklyn BD.
d) Toon vervolgens dat $ABCD$ nie 'n parallelogram is nie.
e) As C geskuif kon word, gee die nuwe koördinate sodat $ABCD$ 'n parallelogram sou wees.

32. 'n Driehoek het hoekpunte $A(-1; 7)$, $B(8; 4)$ en $C(5; -5)$.

a) Bereken die gradiënt van AB.
b) Bewys dat die driehoek reghoekig is by B.
c) Bepaal die lengte van AB.
d) Bepaal die vergelyking van die lyn van A tot by die middelpunt van BC.
e) Vind die oppervlakte van die driehoek ABC.

33. 'n Vierhoek het hoekpunte $A(0; 5)$, $B(-3; -4)$, $C(0; -5)$ en $D(4; k)$ waar $k \geq 0$.

a) Wat moet k wees sodat AD ewewydig is aan CD?
b) Wat moet k wees sodat $CD = \sqrt{52}$?

34. Op die Cartesiese vlak, is die drie punte $P(-3; 4)$, $Q(7; -1)$ en $R(3; b)$ saamlynig.

a) Vind die lengte van PQ.
b) Vind die gradiënt van PQ.
c) Vind die vergelyking van PQ.
d) Vind die waarde van b.

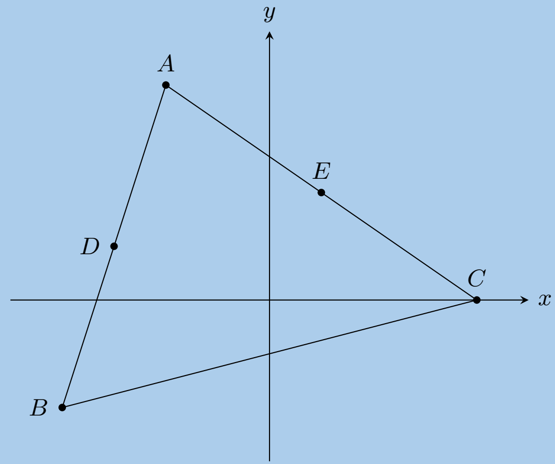
35. Gegee $A(4; 9)$ en $B(-2; -3)$.

a) Vind die middelpunt M van AB.
b) Vind die gradiënt van AB.
c) Vind die gradiënt van die lyn loodreg op AB.
d) Vind die vergelyking van die loodregte halveerlyn (middelloodlyn) van AB.
e) Vind die vergelyking van die lyn ewewydig aan AB, en wat deur $(0; 6)$ gaan.

36. $L(-1; -1)$, $M(-2; 4)$, $N(x; y)$ en $P(4; 0)$ is die hoekpunte van parallelogram $LMNP$.

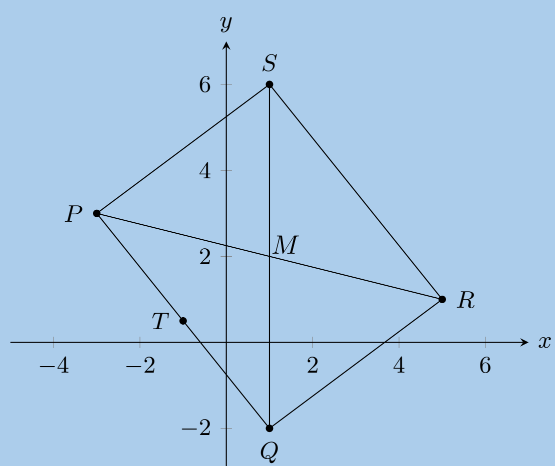
a) Bepaal die koördinate van N.
b) Wys dat MP loodreg is op LN en sê watter soort vierhoek $LMNP$ is, bo en behalwe 'n parallelogram.
c) Wys dat $LMNP$ 'n vierkant is.

37. $A(-2;4)$, $B(-4;-2)$ en $C(4;0)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$. D en $E(1;2)$ is die middelpunte AB en AC onderskeidelik.



a) Vind die gradiënt van BC.
b) Toon dat die koördinate van D, die middelpunt van AB, is $(-3;1)$.
c) Vind die lengte van DE.
d) Vind die gradiënt van DE. Formuleer 'n vermoede aangaande lyne BC en DE.
e) Bepaal die vergelyking van BC.

38. In die diagram is punte $P(-3;3)$, $Q(1;-2)$, $R(5;1)$ en $S(x;y)$ die hoekpunte van 'n parallelogram.

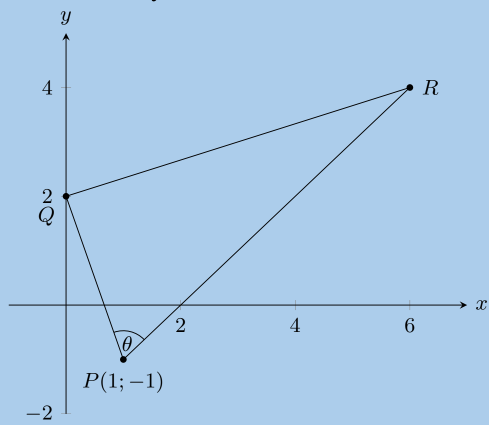


a) Bereken die lengte van PQ.
b) Vind die koördinate van M waar die hoeklyne ontmoet.
c) Vind T, die middelpunt van PQ.
d) Wys dat $MT \parallel QR$.
e) Bereken die koördinate van S.

39. Die koördinate van $\triangle PQR$ is as volg: $P(5;1)$, $Q(1;3)$ en $R(1;-2)$.

a) Bepaal deur berekening of die driehoek gelyksydig, gelykbenig of skerphoekig is. Maak seker dat jy al jou werk toon.
b) Vind die koördinate van punte S en T, die middelpunte van PQ en QR.
c) Bepaal die gradiënt van die lyn ST.
d) Bewys dat $ST \parallel PR$.

40. Die volgende diagram toon $\triangle PQR$ met $P(-1;1)$. Die vergelyking van QR is $x - 3y = -6$ en die vergelyking van PR is $x - y - 2 = 0$. $R\hat{P}Q = \theta$.



a) Skryf die koördinate van Q neer.

b) Bewys dat $PQ \perp QR$.

c) Skryf die gradiënt neer van PR.

d) As die y-koördinaat van R 4 is, bereken die x- koördinaat.

e) Vind die vergelyking van die lyn van P tot S (die middelpunt van QR).

41. Die punte $E(-3;0)$, $L(3;5)$ en $S(t+1, 2{,}5)$ is saamlynig.

a) Bepaal die waarde van t.

b) Bepaal die waardes van a en b as die vergelyking van die lyn, wat gaan deur E, L en S $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ is.

42. Gegee: $A(-3;-4), B(-1;-7), C(2;-5)$ en $D(0;-2)$.

a) Bereken die afstand AC en die afstand BD. Laat jou antwoord in wortelvorm.

b) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van BD.

c) Bewys dat $AM \perp BD$.

d) Bewys dat A, M en C saamlynig is.

e) Watter tipe vierhoek is $ABCD$?

43. $M(2;-2)$ is die middelpunt van AB met punt $A(3;1)$. Bepaal:

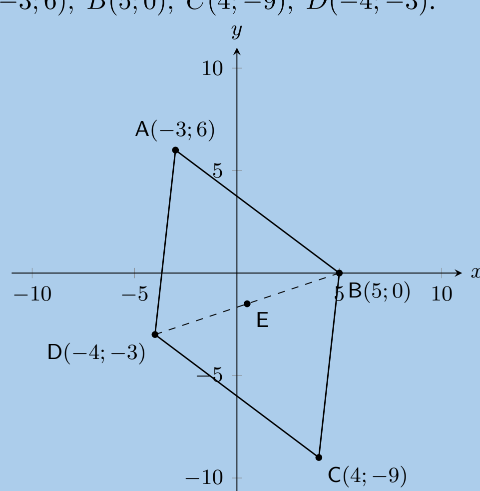
a) die koördinate van B.

b) die gradiënt van AM.

c) die vergelyking van die lyn AM.

d) die loodregte halveerlyn van AB.

44. $ABCD$ is 'n vierhoek met $A(-3;6)$, $B(5;0)$, $C(4;-9)$, $D(-4;-3)$.



a) Bepaal die koördinate van E, die middelpunt van BD.

b) Bewys dat $ABCD$ 'n parallelogram is.

c) Vind die vergelyking van hoeklyn BD.

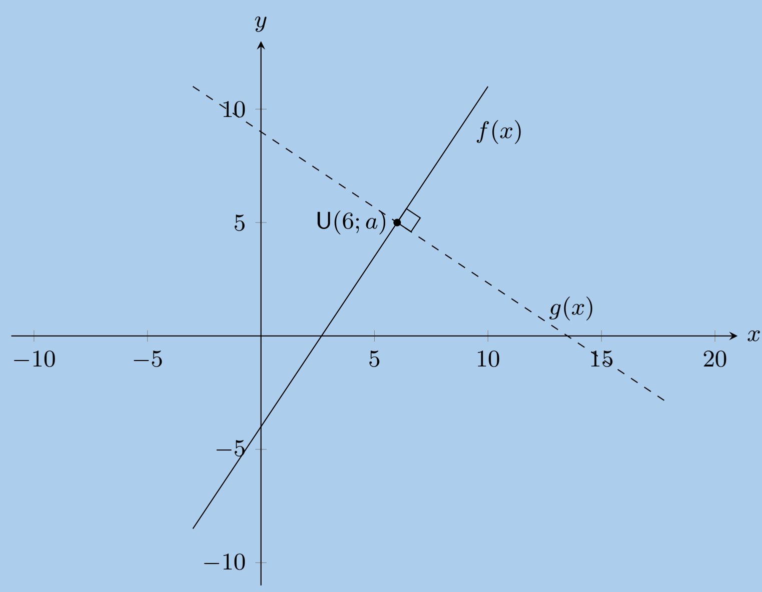
d) Bepaal die vergelyking van die loodregte halveerlyn van BD.

e) Bepaal die gradiënt van AC.

f) Is $ABCD$ 'n ruit? Verduidelik waarom of waarom nie.

g) Vind die lengte van AB.

45. In die diagram hieronder, is $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ geskets met $U(6; a)$ op $f(x)$.

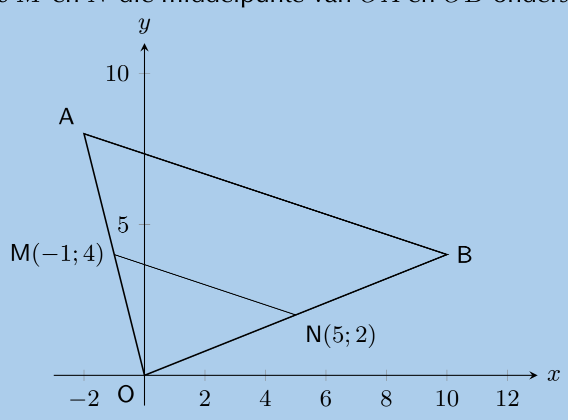


a) Bepaal die waarde van a in $U(6; a)$.

b) 'n Lyn, $g(x)$, wat deur U gaan, is loodreg op $f(x)$. $V(b; 4)$ lê op $g(x)$. Bepaal die waarde van b.

c) As $U(6; 5)$, $V(7\frac{1}{2}, 4)$ en $W(1; c)$ saamlynig is, bepaal die waarde van c.

46. In die diagram hieronder is M en N die middelpunte van OA en OB onderskeidelik.



a) Bereken die gradiënt van MN.

b) Vind die vergelyking van die lyn deur M en N in die vorm $y = mx + c$.

c) Wys dat $AB \parallel MN$.

d) Skryf die ratio of verhouding neer: $\dfrac{\text{area } \triangle OAB}{\text{area } \triangle OMN}$.

e) Skryf die koördinate van P neer sodat $OAPB$ 'n parallelogram is.

47. $A(6;-4)$, $B(8;2)$, $C(3;a)$ en $D(b;c)$ is punte op die Cartesiese vlak. Bepaal die waarde van:

a) a as A, B en C is saamlynig.

b) b en c as B die middelpunt van A en D is.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K2H	2. 2K2J	3. 2K2K	4a. 2K2M	4b. 2K2N	4c. 2K2P
4d. 2K2Q	5. 2K2R	6. 2K2S	7. 2K2T	8. 2K2V	9. 2K2W
10. 2K2X	11. 2K2Y	12. 2K2Z	13. 2K32	14. 2K33	15. 2K34
16. 2K35	17. 2K36	18. 2K37	19. 2K38	20. 2K39	21. 2K3B
22. 2K3C	23. 2K3D	24. 2K3F	25. 2K3G	26. 2K3H	27. 2K3J
28. 2K3K	29. 2K3M	30. 2K3N	31. 2K3P	32. 2K3Q	33. 2K3R
34. 2K3S	35. 2K3T	36. 2K3V	37. 2K3W	38. 2K3X	39. 2K3Y
40. 2K3Z	41. 2K42	42. 2K43	43. 2K44	44. 2K45	45. 2K46
46. 2K47	47. 2K48				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 9

Finansies en groei

9.1 Inleiding EMD6K

In hierdie hoofstuk pas ons wiskundige vaardighede toe op alledaagse finansiële situasies.

As jy R 1000 het, kan jy dit in jou spaarvarkie hou of dit in jou bankrekening inbetaal. Wanneer jy geld deponeer in jou bankrekening, leen jy effektief geld aan die bank. Aangesien jy vir die bank geld leen, kan jy ekstra geld terugverwag. Dit staan bekend as rente. Soortgelyk, as jy geld leen van 'n bank, dan kan jy verwag om rente te betaal op die lening. Rente word bereken as 'n persentasie van die geld wat jy skuld, bereken oor die tyd wat dit neem om die lening terug te betaal. Dit beteken dat hoe langer die lening bestaan, hoe meer rente sal daarop betaal moet word.

Figuur 9.1: Die ingang van die Johannesburgse Aandelebeurs (JSE) in Sandton, Johannesburg - die finansiële sentrum van Suid-Afrika. Die JSE is Afrika se grootste aandelebeurs en die 19^{de} grootste in die wêreld. Elke maand word meer as 60 miljard rand se aandele verhandel op die JSE.

Die konsep is eenvoudig, maar dit is die kern van die wêreld van finansies. Ouditeure, aktuarisse en bankiers kan hulle ganse loopbane besig bly met die invloed van rente op finansiële sake.

DEFINISIE: *Rente*

In finansies is rente die geld wat gevra word om geld te leen. Dit word gewoonlik uitgedruk as 'n persentasie van die geleende geld.

9.2 Enkelvoudige rente EMD6M

DEFINISIE: *Enkelvoudige rente*

Enkelvoudige rente is die rente wat bereken word slegs op die aanvanklike bedrag wat jy belê het.

As 'n eenvoudige voorbeeld van enkelvoudige rente, bereken hoeveel ons sal kry as ons R 1000 belê vir 1 jaar by 'n bank wat 5% p.a. enkelvoudige rente betaal.

Teen die einde van die jaar het ons

$$\begin{aligned}\text{Rente} &= \text{R } 1000 \times 5\% \\ &= \text{R } 1000 \times \frac{5}{100} \\ &= \text{R } 1000 \times 0{,}05 \\ &= \text{R } 50\end{aligned}$$

Met 'n openingsbalans van R 1000 aan die begin van die jaar, sal die sluitingsbalans of eindbedrag aan die einde van die jaar dus wees

$$\begin{aligned}\text{eindbedrag} &= \text{openingsbalans} + \text{rente} \\ &= \text{R } 1000 + \text{R } 50 \\ &= \text{R } 1050\end{aligned}$$

Die openingsbalans in finansiële berekeninge word dikwels die hoofsom genoem en genoteer as P (R 1000 in die voorbeeld). Die rentekoers word gewoonlik aangedui as i (5% p.a. in die voorbeeld en "p.a." beteken per annum of per jaar). Die rentebedrag word aangedui as I (R 50 in die voorbeeld).

Dus kan ons sien dat

$$I = P \times i$$

en

$$\begin{aligned}\text{eindbedrag} &= \text{openingsbalans} + \text{rente} \\ &= P + I \\ &= P + P \times i \\ &= P(1 + i)\end{aligned}$$

Bostaande berekeninge gee 'n goeie aanduiding van hoe die enkelvoudige rente formule lyk. Ons gebruik die simbool n om die tydsperiode, wat in jare uitgedruk moet word, aan te dui.

Die algemene formule vir die berekening van enkelvoudige rente is

$$A = P(1 + in)$$

Waar:

$$\begin{aligned}A &= \text{eindbedrag} \\ P &= \text{hoofsom} \\ i &= \text{rente as 'n desimaal geskryf} \\ n &= \text{aantal jare}\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Berekening van rente op 'n belegging

VRAAG

Carine belê R 1000 in 'n spesiale bankrekening teen 'n enkelvoudige rentekoers van 7% p.a. vir 3 jaar. Hoeveel sal sy in haar bankrekening hê teen die einde van die beleggingsperiode?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende waardes neer

$$\begin{aligned}P &= 1000 \\ i &= 0{,}07 \\ n &= 3\end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 1000(1 + 0{,}07 \times 3) \\ &= 1210 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Aan die einde van 3 jaar, sal Carine R 1210 in haar bankrekening hê.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Berekening van rente op 'n lening

VRAAG

Sarah leen R 5000 van haar buurman en hulle kom ooreen op 'n enkelvoudige rentekoers van 12,5% p.a. Sy sal die lening in een bedrag terugbetaal aan die einde van 2 jaar. Hoeveel sal sy moet terugbetaal aan haar buurman?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 5000 \\ i &= 0{,}125 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 5000(1 + 0{,}125 \times 2) \\ &= 6250 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Aan die einde van 2 jaar, sal Sarah R 6250 aan haar buurman betaal.

Ons kan die enkelvoudige rente formule gebruik om die ontbrekende inligting te vind. Byvoorbeeld, as ons 'n bedrag geld het wat ons wil belê vir 'n vasgestelde tyd om 'n mikpunt te bereik, kan ons die veranderlikes herrangskik om die verlangde rentekoers te bereken. Dieselfde beginsels geld as ons wil uitvind hoe lank ons die geld moet belê indien ons weet wat die hoofsom en die eindbedrag en die rentekoers is.

Belangrik: om 'n meer akkurate antwoord te kry, probeer om al jou berekeninge in een bewerking op die sakrekenaar te doen. Dit voorkom dat afrondingsfoute jou finale antwoord beïnvloed.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Bepaling van die beleggingsperiode om 'n vasgestelde bedrag te verkry

VRAAG

Prashant belê R 30 000 in 'n bankrekening wat 'n enkelvoudige rentekoers van 7,5% p.a. betaal. Hoeveel jaar moet hy sy geld belê om R 45 000 te genereer?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} A &= 45\ 000 \\ P &= 30\ 000 \\ i &= 0{,}075 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes en los op vir n

$$\begin{aligned} 45\ 000 &= 30\ 000\,(1 + 0{,}075 \times n) \\ \frac{45\ 000}{30\ 000} &= 1 + 0{,}075 \times n \\ \frac{45\ 000}{30\ 000} - 1 &= 0{,}075 \times n \\ \frac{\left(\frac{45\ 000}{30\ 000}\right) - 1}{0{,}075} &= n \\ n &= 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Dit sal 6 jaar en 8 maande neem om R 30 000 te laat groei tot R 45 000 teen 'n enkelvoudige rentekoers van 7,5% p.a.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Bereken die enkelvoudige rentekoers om die verlangde groei te behaal

VRAAG

Teen watter enkelvoudige rentekoers behoort Fritha te belê indien sy groei wil hê van R 2500 tot R 4000 in 5 jaar?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} A &= 4000 \\ P &= 2500 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes en los op vir i

$$\begin{aligned} 4000 &= 2500(1 + i \times 5) \\ \frac{4000}{2500} &= 1 + i \times 5 \\ \frac{4000}{2500} - 1 &= i \times 5 \\ \frac{\left(\frac{4000}{2500}\right) - 1}{5} &= i \\ i &= 0{,}12 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

'n Enkelvoudige rentekoers van 12% p.a. sal nodig wees om R 2500 wat belê is vir 5 jaar, te laat groei tot R 4000.

Oefening 9 – 1:

1. 'n Bedrag van R 3500 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 7,5% per annum betaal. Bereken die balans wat opgehou het teen die einde van 2 jaar.
2. 'n Bedrag van R 4090 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 8% per annum betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 4 jaar.
3. 'n Bedrag van R 1250 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 6% per annum betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 6 jaar.
4. 'n Bedrag van R 5670 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 8% per annum betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 3 jaar.
5. Bereken die vermeerderde bedrag in die volgende situasies:
   a) 'n Lening van R 300 teen 'n rentekoers van 8% vir 1 jaar.
   b) 'n Belegging van R 2250 teen 'n koers van 12,5% p.a. vir 6 jaar.
6. 'n Bank bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 6% per annum. As jy R 15 000 wil bymekaarmaak in 5 jaar, hoeveel moet jy nou belê?

7. Sally wil die aantal jare bereken wat sy nodig het om R 1000 te belê ten einde R 2500 bymekaar te maak. Sy word 'n enkelvoudige rentekoers van 8,2% p.a. aangebied. Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te vermeerder tot R 2500?
8. Joseph belê R 5000 in 'n spaarrekening op sy seun se vyfde verjaarsdag. Toe sy seun 21 geword het, het die balans in die rekening reeds gegroei tot R 18 000. As enkelvoudige rente gebruik is, bereken die koers waarteen die geld belê was.
9. Toe sy seun 6 jaar oud was, het Methuli 'n bedrag van R 6610 in die bank belê. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Methuli se seun 18 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 131,24.

   Teen watter rentekoers was die geld belê?
10. Toe sy seun 6 jaar oud was, het Philip 'n belegging van R 5040 in die bank gemaak. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Philip se seun 18 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 7338,24.
11. Toe sy seun 10 jaar oud was, het Lefu R 2580 in die bank belê. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Lefu se seun 20 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 3689,40.
12. Abdoul wil R 1080 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 10,9% p.a.

    Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 3348? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
13. Andrew wil R 3010 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 11,9% p.a.

    Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 14 448? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K49	2. 2K4B	3. 2K4C	4. 2K4D	5a. 2K4F	5b. 2K4G	6. 2K4H	7. 2K4J
8. 2K4K	9. 2K4M	10. 2K4N	11. 2K4P	12. 2K4Q	13. 2K4R		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.3 Saamgestelde rente EMD6N

Saamgestelde rente laat toe dat rente op rente verdien word. Met enkelvoudige rente verdien slegs die oorspronklike belegging rente, maar met saamgestelde rente verdien beide die oorspronklike belegging sowel as die rente daarop, weer rente.

Saamgestelde rente is voordelig vir die belegging van geld, maar nie vir die uitneem van 'n lening nie.

DEFINISIE: *Saamgestelde rente*

Saamgestelde rente is die rente verdien op die hoofsom en op die geakkumuleerde, of opgehoopte, rente.

Beskou die voorbeeld van R 1000 belê vir 3 jaar by 'n bank wat saamgestelde rente van 5% p.a. betaal.

Aan die einde van die eerste jaar is die opgehoopte bedrag

$$\begin{aligned} A_1 &= P(1+i) \\ &= 1000(1+0{,}05) \\ &= 1050 \end{aligned}$$

Die bedrag A_1 word die nuwe hoofsom vir die berekening van die opgehoopte bedrag vir die einde van die tweede jaar.

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1+i) \\ &= 1050(1+0{,}05) \\ &= 1000(1+0{,}05)(1+0{,}05) \\ &= 1000(1+0{,}05)^2 \end{aligned}$$

Soortgelyk, ons gebruik die bedrag A_2 as die nuwe hoofbedrag vir die berekening van die opgehoopte bedrag teen die einde van die derde jaar.

$$\begin{aligned} A_3 &= P(1+i) \\ &= 1000(1+0{,}05)^2(1+0{,}05) \\ &= 1000(1+0{,}05)^3 \end{aligned}$$

Sien jy 'n patroon?

Deur gebruik te maak van enkelvoudige rente, kan ons 'n soortgelyke formule vir saamgestelde rente bereken.

Met 'n openingsbalans van P en 'n rentekoers van i, sal die opgehoopte balans aan die einde van die eerste jaar wees:

$$\text{eindbedrag na 1 jaar } = P(1+i)$$

Dit is dieselfde as enkelvoudige rente omdat dit slegs oor 'n enkele jaar bereken is. Hierdie opgehoopte balans word die openingsbalans vir die tweede jaar van belegging.

$$\begin{aligned} \text{eindbedrag na 2 jare } &= [P(1+i)] \times (1+i) \\ &= P(1+i)^2 \end{aligned}$$

Soortgelyk, vir die derde jaar

$$\begin{aligned} \text{eindbedrag na 3 jare } &= \left[P(1+i)^2\right] \times (1+i) \\ &= P(1+i)^3 \end{aligned}$$

Ons sien die mag van term $(1+i)$ is dieselfde as die aantal jare. Dus, die algemene formule vir die berekening van saamgestelde rente is:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$\begin{aligned} A &= \text{ eindbedrag} \\ P &= \text{ hoofsom} \\ i &= \text{ rente as 'n desimaal geskryf} \\ n &= \text{ aantal jare} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Saamgestelde rente

VRAAG

Mpho wil R 30 000 belê in ’n rekening wat ’n saamgestelde rentekoers van 6% p.a. aanbied. Hoeveel geld sal daar in die rekening wees aan die einde van 4 jaar?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 30\ 000 \\ i &= 0{,}06 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1+i)^n$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 30\ 000(1+0{,}06)^4 \\ &= 37\ 874{,}31 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Mpho sal R 37 874,31 in die rekening hê aan die einde van 4 jaar.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Berekening van die saamgestelde rentekoers om die verlangde groei te behaal

VRAAG

Charlie het R 5000 ontvang vir sy sestiende verjaarsdag. Hy wil dit nie spandeer nie, maar besluit om dit iewers te belê sodat hy ’n deposito van R 10 000 op ’n motor op sy agtiende verjaarsdag het. Watter saamgestelde rentekoers benodig hy om hierdie groei in sy geld te bewerkstelling? Bespreek jou antwoord.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} A &= 10\ 000 \\ P &= 5000 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1+i)^n$$

Stap 3: Vervang die waardes en los op vir i

$$\begin{aligned}
10\ 000 &= 5000(1+i)^2 \\
\frac{10\ 000}{5000} &= (1+i)^2 \\
\sqrt{\frac{10\ 000}{5000}} &= 1+i \\
\sqrt{\frac{10\ 000}{5000}} - 1 &= i \\
i &= 0{,}4142
\end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer en lewer kommentaar

Charlie moet 'n belegging vind wat 'n rentekoers van 41,42% p.a. aanbied ten einde die verlangde groei te behaal. 'n Tipiese spaarrekening gee 'n opbrengs van ongeveer 2% p.a. en 'n aggressiewe beleggingsportefeulje gee 'n opbrengs van ongeveer 13% p.a. Dit lyk dus onwaarskynlik dat Charlie sy geld teen 'n rentekoers van 41,42% p.a. sal kan belê.

Die krag van saamgestelde rente EMD6P

Om aan te toon hoe belangrik "rente op rente" is, vergelyk ons die verskil in die sluitingsbalanse van 'n belegging wat enkelvoudige rente verdien en 'n belegging wat saamgestelde rente verdien. Beskou 'n bedrag van R 10 000 belê vir 10 jaar, teen 'n rentekoers van 9% p.a.

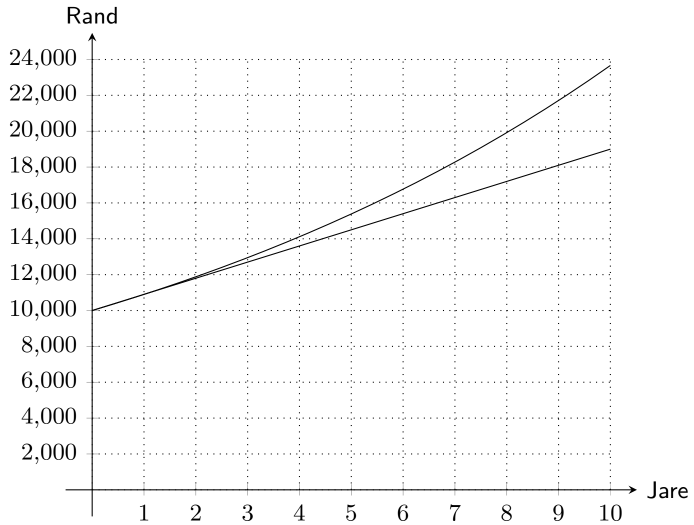
Die sluitingsbalans vir die belegging wat enkelvoudige rente verdien, is

$$\begin{aligned}
A &= P(1+in) \\
&= 10\ 000(1 + 0{,}09 \times 10) \\
&= \text{R } 19\ 000
\end{aligned}$$

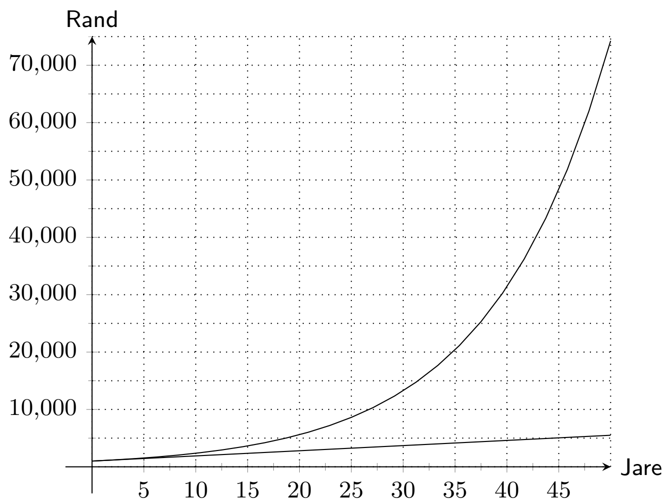
Die sluitingsbalans vir die belegging wat saamgestelde rente verdien is

$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 10\ 000(1 + 0{,}09)^{10} \\
&= \text{R } 23\ 673{,}64
\end{aligned}$$

Ons dui die groei van die twee beleggings op dieselfde assestelsel aan en neem die beduidende verskil waar in hulle groeitempo: enkelvoudige rente is 'n reguitlyn grafiek en saamgestelde rente is 'n eksponensiële grafiek.



Dit is makliker om die groot verskil in hulle groei te sien as ons die tydsperiode verleng tot 50 jaar:



Hou in gedagte dat dit goeie en slegte nuus is.Wanneer rente verdien word op 'n belegging, help saamgestelde rente dat die bedrag eksponensieel groei. Maar, as geld geleen word, sal die opgehoopte bedrag van geld wat geskuld word, ook eksponensieel toeneem.

BESOEK:
Hierdie video verduidelik die verskil tussen enkelvoudige en saamgestelde rente. Let daarop dat die video dollar gebruik maar die berekening is dieselfde vir rand.
Sien video: 2K4T at www.everythingmaths.co.za

Oefening 9 – 2:

1. 'n Bedrag van R 3500 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 7,5% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 2 jaar.
2. 'n Bedrag van R 3070 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 11,6% p.a. betaal.

   Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 6 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.

3. ’n Bedrag van R 6970 word belê in ’n spaarrekening wat ’n saamgestelde rentekoers van 10,2% p.a. betaal.

   Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 3 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
4. Nicola wil ’n bedrag geld belê teen ’n saamgestelde rentekoers van 11% p.a. Hoeveel geld (tot die naaste rand) behoort sy te belê as sy die som van R 100 000 wil bereik in vyf jaar?
5. Thobeka wil geld belê teen ’n saamgestelde rentekoers van 11,8% p.a.

   Hoeveel geld behoort sy te belê as sy ’n som van R 30 000 wil bereik in 2 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
6. Likengkeng wil ’n bedrag geld belê teen ’n saamgestelde rentekoers van 11,4% p.a.

   Hoeveel geld behoort sy te belê as sy ’n som van R 38 200 wil bereik in 7 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
7. Morgan belê R 5000 in ’n rekening wat ’n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 5 jaar. As hy R 7500 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied?
8. Kabir belê R 1790 in ’n rekening wat ’n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 9 jaar.

   As hy R 2613,40 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
9. Bongani belê R 6110 in ’n rekening wat ’n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 7 jaar.

   As hy R 6904,30 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1. 2K4V 2. 2K4W 3. 2K4X 4. 2K4Y 5. 2K4Z 6. 2K52 7. 2K53 8. 2K54 9. 2K55

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.4 Berekening deur gebruik van enkelvoudige en saamgestelde rente EMD6Q

Huurkoop EMD6R

As ’n algemene reël is dit nie verstandig om items op krediet te koop nie. Wanneer jy op krediet koop, moet jy geld leen om te betaal vir die aankoop, wat beteken dat jy meer betaal as gevolg van die rente op die lening. Bygesê, van tyd tot tyd is daar toerusting, soos ’n yskas, waarsonder mens moeilik kan lewe. Meeste mense het nie die kontant om sulke items direk te koop nie, dus koop hulle dit met ’n huurkoopooreenkoms.

’n Huurkoopooreenkoms is ’n finansiële ooreenkoms tussen die winkel en die klant oor hoe die klant vir die produk wat hy wil hê, gaan betaal.Die rente op ’n huurkoopooreenkoms word altyd bereken teen ’n enkelvoudige rentekoers en word slegs bereken op die bedrag wat nog geskuld word. Meeste ooreenkomste vereis dat ’n deposito betaal moet word voordat die klant die produk kan neem. Die aanvangsbedrag van die lening is dus die kontant minus die deposito. Die geakkumuleerde lening sal bereken word oor die aantal jare waarvoor die lening benodig word. Die totale leningsbedrag word dan verdeel in maandelikse paaiemente oor die totale periode van die lening.

BELANGRIK!

Huurkoop word bereken teen ’n enkelvoudige rentekoers. Wanneer jy ’n vraag oor huurkoop gevra word, onthou om altyd die enkelvoudige rente formule te gebruik.

BESOEK:
Hierdie video verduidelik huurkoop en wys 'n aantal voorbeelde van huurkoop berekenings.
Sien video: 2K56 at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 7: Huurkoop

VRAAG

Troy wil 'n addisionele skerm vir sy rekenaar koop en hy het een gesien wat op die internet geadverteer is vir R 2500. Daar is 'n opsie om 10% deposito te betaal en dan 24 maandelikse paaiemente te betaal met 'n huurkoopooreenkoms, waar rente bereken word teen 7,5% p.a. enkelvoudige rente. Bereken wat Troy se maandelikse paaiement sal wees.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer
'n Nuwe openingsbalans moet bepaal word as die 10% deposito kontant betaal word.

$$\begin{aligned} 10\% \text{ van } 2500 &= 250 \\ \therefore P &= 2500 - 250 = 2250 \\ i &= 0{,}075 \\ n &= \frac{24}{12} = 2 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 2250\,(1 + 0{,}075 \times 2) \\ &= 2587{,}50 \end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die maandelikse paaiement op die huurkoopooreenkoms

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse betaling} &= \frac{2587{,}50}{24} \\ &= 107{,}81 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer
Troy se maandelikse paaiement is R 107,81.

'n Winkel kan ook 'n maandelikse versekeringspremie hef op die maandelikse paaiemente. Hierdie versekeringspremie sal 'n bedrag wees wat maandeliks betaal word en dit gee die klant meer tyd tussen 'n oorgeslane paaiement en beslaglegging van die produk.

NOTA:
Die maandelikse betaling word ook die maandelikse paaiement genoem.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Huurkoop met addisionele voorwaardes

VRAAG

Cassidy wil 'n televisiestel koop en besluit om een te koop op 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die televisiestel is R 5500. Sy sal dit betaal oor 'n tydperk van 54 maande teen 'n rentekoers van 21% p.a. 'n Versekeringspremie van R 12,50 word by elke maandelike paaiement gevoeg. Hoe groot is haar maandelikse betaling?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 5500 \\ i &= 0{,}21 \\ n &= \frac{54}{12} = 4{,}5 \end{aligned}$$

Die vraag noem nie 'n deposito nie, dus aanvaar ons Cassidy het nie een betaal nie.

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P\,(1 + in)$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 5500\,(1 + 0{,}21 \times 4{,}5) \\ &= 10\,697{,}50 \end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die maandelikse paaiement op die huurkoopooreenkoms

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement } &= \frac{10\,697{,}50}{54} \\ &= 198{,}10 \end{aligned}$$

Stap 5: Voeg die versekeringspremie by

$198{,}10 + 12{,}50 = 210{,}60$

Stap 6: Skryf die finale antwoord neer

Cassidy sal R 210,60 per maand betaal vir 54 maande voordat haar TV afbetaal is.

Oefening 9 – 3:

1. Angelique wil 'n mikrogolfoond koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die mikrogolfoond is R 4400. Sy moet 'n deposito van 10% betaal en sy delg die res van die lening oor 12 maande teen 'n rentekoers van 9% p.a.
   a) Wat is die leningsbedrag?
   b) Wat is die opgehoopte leningsbedrag?
   c) Wat is Angelique se maandelikse terugbetalings?
   d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die mikrogolfoond?
2. Nyakallo wil 'n televisiestel koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die televisiestel is R 5600. Daar word van haar verwag om 'n deposito van 15% te betaal en om die oorblywende lening af te betaal oor 24 maande, teen 'n rentekoers van 14% p.a.
   a) Wat is die leningsbedrag?
   b) Wat is die opgehoopte bedrag?
   c) Wat is Nyakallo se maandelikse terugbetaling?
   d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die televisiestel?
3. 'n Maatskappy wil 'n rekenaardrukker koop. Die kontantprys van die drukker is R 4500. 'n Deposito van 15% moet betaal word. Die oorblywende bedrag sal afbetaal word oor 24 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.
   a) Wat is die leningsbedrag?
   b) Wat is die opgehoopte bedrag?
   c) Hoeveel sal die maatskappy elke maand betaal?
   d) Wat is die totale bedrag wat die maatskappy betaal het vir die drukker?
4. Sandile koop 'n eetkamertafel wat R 8500 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hulle hef 'n rentekoers van 17,5% p.a. oor 3 jaar.
   a) Hoeveel sal Sandile in totaal betaal?
   b) Hoeveel rente betaal hy?
   c) Wat is die maandelikse paaiement?
5. Mike koop 'n tafel wat R 6400 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hy word aangeslaan teen 'n rentekoers van 15% p.a. oor 4 jaar.
   a) Hoeveel betaal Mike in totaal?
   b) Hoeveel rente betaal hy?
   c) Wat is die maandelikse paaiement?
6. Talwar koop 'n kas wat R 5100 kos op huurkoop. Hy word gevra om 'n rentekoers van 12% p.a. oor 2 jaar te betaal.
   a) Hoeveel sal Talwar in totaal betaal?
   b) Hoeveel rente betaal hy?
   c) Wat is die maandelikse paaiement?
7. 'n Sitkamerstel word te koop geadverteer op televisie. Dit kan afbetaal word oor 36 maande teen R 150 per maand.
   a) As dit aanvaar word dat geen deposito betaalbaar is nie, hoeveel sal die koper betaal vir die sitkamerstel wanneer dit uiteindelik afbetaal is?
   b) As die rentekoers 9% p.a. is, wat is die kontantprys van die stel?

8. Twee winkels bied 'n gesamentlike yskas en wasmasjien pakket aan. Winkel A bied 'n maandelikse paaiement van R 350 oor 24 maande aan. Winkel B bied 'n maandelikse paaiement van R 175 oor 48 maande aan.

   As beide winkels 7,5% rente vra, by watter winkel behoort jy die yskas en wasmasjien pakket te koop as jy die minste rente wil betaal?

9. Tlali wil 'n nuwe rekenaar koop en besluit om een te koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die rekenaar is R 4250. Hy sal dit betaal oor 'n tydperk van 30 maande teen 'n rentekoers van 9,5% p.a. 'n Versekeringspremie van R 10,75 word by elke maandelike paaiement gevoeg. Hoe groot is sy maandelikse betalings?

10. Richard beplan om 'n nuwe stoof te koop op huurkoop. Die kontantprys van die stoof is R 6420. Hy betaal 'n deposito van 10% en betaal dan die oorblywende bedrag af oor 36 maande teen 'n rentekoers van 8% p.a. 'n Versekeringspremie van R 11,20 word bygevoeg by elke maandelikse paaiement. Bereken Richard se maandelikse paaiement.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K57 2. 2K58 3. 2K59 4. 2K5B 5. 2K5C 6. 2K5D
7. 2K5F 8. 2K5G 9. 2K5H 10. 2K5J

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Inflasie EMD6S

Daar is baie faktore wat veranderinge in die prys van 'n item beïnvloed, en een van hierdie faktore is inflasie. Inflasie is die gemiddelde jaarlikse toename in die prys van goedere en dit word uitgedruk as 'n persentasie. Aangesien die inflasiekoers jaar op jaar toeneem, word dit bereken deur die saamgestelde rente formule te gebruik.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Bereken toekomstige koste gebaseer op inflasie

VRAAG

Melk kos R 14 vir twee liter. Hoeveel sal dit kos oor 4 jaar as die inflasiekoers 9% p.a. is?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$P = 14$$
$$i = 0{,}09$$
$$n = 4$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1+i)^n$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$\begin{aligned} A &= 14(1 + 0{,}09)^4 \\ &= 19{,}76 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Oor vier jaar sal twee liter melk R 19,76 kos.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Bereken vroeëre koste gebaseer op inflasie

VRAAG

'n Boks sjokolade kos vandag R 55. Hoeveel het dit 3 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 11% p.a. was?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} A &= 55 \\ i &= 0{,}11 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3: Vervang die waardes en los op vir P

$$\begin{aligned} 55 &= P(1 + 0{,}11)^3 \\ \frac{55}{(1 + 0{,}11)^3} &= P \\ \therefore P &= 40{,}22 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Drie jaar gelede sou die boks sjokolade R 40,22 gekos het.

Oefening 9 – 4:

1. Die prys van sakkie appels is R 12. Hoeveel sal dit oor 9 jaar kos as die inflasiekoers 12% p.a. is?
2. Die prys van 'n sak aartappels is R 15.
   Hoeveel sal dit oor 6 jaar kos as die inflasiekoers 12% p.a. is?
3. Die prys van 'n boks springmielies is R 15. Hoeveel sal dit oor 4 jaar kos as die inflasiekoers 11% p.a. is?
4. 'n Pakkie rosyntjies kos vandag R 24. Hoeveel het dit 4 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 13% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.
5. 'n Blik koekies kos vandag R 24. Hoeveel het dit 5 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 11% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.
6. As die gemiddelde inflasiekoers oor die afgelope paar jaar 7,3% p.a. was en jou water- en kragrekening is nou gemiddeld R 1425, wat kan jy verwag om te betaal oor 6 jaar?
7. 'n Pak springmielies en 'n Coke kos nou R 60 by die flick. As die gemiddelde inflasiekoers 9,2% p.a. is, wat was die prys van springmielies en Coke 5 jaar gelede?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K5K 2. 2K5M 3. 2K5N 4. 2K5P 5. 2K5Q 6. 2K5R 7. 2K5S

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Bevolkingsgroei EMD6T

Familiestambome groei eksponsieel aangesien elke persoon wat gebore word die moontlikheid het om 'n nuwe familie te begin. Om hierdie rede bereken ons die bevolkingsgroei deur die saamgestelde groei formule te gebruik.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Bevolkingsgroei

VRAAG

As die huidige bevolking van Johannesburg 3 888 180 is, en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika 2,1% p.a. is, wat kan stadsbeplanners verwag sal die bevolking van Johannesburg oor 10 jaar wees?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 3\ 888\ 180 \\ i &= 0{,}021 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die formule neer

$$A = P(1+i)^n$$

Stap 3: Vervang die waardes

$$
\begin{aligned}
A &= 3\ 888\ 180(1+0{,}021)^{10} \\
&= 4\ 786\ 343
\end{aligned}
$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Stadsbeplanners kan verwag dat Johannesburg se bevolking oor tien jaar 4 786 343 sal wees.

Oefening 9 – 5:

1. Die huidige bevolking van Durban is 3 879 090 en die gemiddelde bevolkingsgroei van Suid-Afrika is 1,1% p.a.

   Hoeveel kan die stadsbeplanners van Durban verwag sal die bevolking van die stad oor 6 jaar wees? Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
2. Die huidige bevolking van Polokwane is 3 878 970 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,7% p.a.

   Wat kan die stadsbeplanners verwag sal die bevolking van Polokwane oor 12 jaar wees? Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
3. 'n Klein dorpie in Ohio, VSA, ondervind 'n groot toename in geboortes. As die gemiddelde groeikoers van die bevolking 16% p.a. is, hoeveel babas sal gebore word vir die 1600 inwoners in die volgende 2 jaar?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K5T 2. 2K5V 3. 2K5W

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.5 Buitelandse wisselkoerse EMD6V

Verskillende lande het verskillende geldeenhede. In Engeland kos 'n Big Mac van McDonald's £ 4, in Suid-Afrika kos dit R 20 en in Noorweë kos dit 48 kr. Die maaltyd is dieselfde in al drie lande maar in sommige plekke kos dit meer as in ander. As £ 1 = R 12,41 en 1 kr = R 1,37, beteken dit 'n Big Mac in Engeland kos R 49,64 en 'n Big Mac in Noorweë kos R 65,76.

Wisselkoerse beïnvloed veel meer as slegs die prys van 'n Big Mac. Die prys van olie neem toe wanneer die Suid-Afrikaanse rand verswak. Dit gebeur omdat ons met 'n swakker rand minder van ander geldeenhede kan koop vir dieselfde bedrag geld.

'n Geldeenheid versterk wanneer geld belê word in die land. Wanneer ons Suid-Afrikaans vervaardigde produkte koop, belê ons in Suid-Afrikaanse besighede en hou ons die geld in die land. Wanneer ons ingevoerde produkte van ander lande koop, belê ons geld in daardie lande en gevolglik sal die rand verswak. Hoe meer Suid-Afrikaanse produkte ons koop, hoe groter word die aanvraag daarvoor en dit skep meer werksgeleenthede vir Suid-Afrikaners. Local is lekker!

NOTA:
Die drie geldeenhede wat jy waarskynlik die meeste sal sien, is die Britse pond (£), die Amerikaanse dollar ($) en die euro (€).

BESOEK:
Die video verduidelik wisselkoerse en toon voorbeelde van wisselkoers berekeninge.
Sien video: 2K5X at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 12: Buitelandse wisselkoerse

VRAAG

Saba wil haar familie in Spanje gaan besoek. Sy het R 10 000 ontvang om daar te spandeer. Hoeveel euro kan sy koop met die huidige wisselkoers van € 1 =R 10,68?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking neer

Laat die ekwivalente bedrag euro x wees

$$\begin{aligned} x &= \frac{10\ 000}{10{,}68} \\ &= 936{,}33 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

Saba kan €936,33 koop met R 10 000.

Oefening 9 – 6:

1. Bridget wil 'n iPod koop wat £ 100 kos, met die wisselkoers tans op £ 1 = R 14. Sy bereken dat die wisselkoers in 'n maand se tyd sal daal tot R 12.
   a) Hoeveel sal die iPod in rand kos as sy dit nou koop?
   b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 12?
   c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 15?
2. Mthuli wil 'n televisiestel koop wat £ 130 kos, met die huidige wisselkoers op £ 1 = R 11. Hy beraam dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor 'n maand.
   a) Hoeveel sal die televisiestel in rand kos as hy dit nou koop?
   b) Hoeveel sal hy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
   c) Hoeveel sal hy verloor as die wisselkoers verander na R 19?
3. Nthabiseng wil 'n iPad koop wat £ 120 kos, met die huidige wisselkoers op £ 1 = R 14. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor 'n maand.
   a) Hoeveel rand sal die iPad kos as sy dit nou koop?
   b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
   c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 18?

4. Bestudeer die volgende wisselkoerstabel:

Land	Geldeenheid	Wisselkoers
Verenigde Koninkryk van Brittanje (VK)	Pond (£)	R 14,13
Verenigde State van Amerika (VSA)	Dollar ($)	R 7,04

   a) In Suid-Afrika kos 'n nuwe Honda Civic R 173 400. In Engeland kos dieselfde motor £ 12 200 en in die VSA $21 900. In watter land is die motor die goedkoopste?
   b) Sollie en Arinda is kelners by 'n restaurant in Suid-Afrika wat baie buitelandse toeriste ontvang. Sollie ontvang 'n fooitjie van £ 6 van 'n toeris en Arinda een van $12. Wie het die grootste fooitjie ontvang?

5. Yaseen wil 'n boek oor die internet koop. Hy kry 'n uitgewer in London wat die boek verkoop vir £ 7,19. Hierdie uitgewer bied gratis versending van die produk aan.

   Hy vind uit dieselfde boek is beskikbaar by 'n uitgewer in New York vir $8,49 met 'n versendingsfooi van $2.

   Vervolgens kyk hy na die wisselkoerse om te sien watter uitgewer die beste aanbod het. As $1 = R 11,48 en £ 1 = R 17,36, van watter uitgewer behoort hy die boek te koop?

6. Mathe spaar om haar vriend in Duitsland te gaan besoek. Sy bereken dat die totale koste van haar reis R 50 000 sal wees. Die wisselkoers is tans € 1 = R 13,22.

   Mathe se vriend besluit om haar te help en hy gee vir haar € 1000. Hoeveel geld (in rand) moet Mathe nou nog spaar?

7. Lulamile en Jacob bied oor naweke toere aan. Hulle vra nie geld vir toere nie, maar aanvaar fooitjies van die groep. Die tabel hieronder toon die fooitjies aan wat hulle van die verskillende toergroepe ontvang het.

Groep	Totale fooie
Britse toeriste	£ 5,50
Japanese toeriste	¥ 85,50
Amerikaanse toeriste	$ 7,00
Nederlandse toeriste	€ 9,70
Brasiliaanse toeriste	40,50 BRL
Australiese toeriste	9,20 AUD
Suid-Afrikaanse toeriste	R 55,00

Die huidige wisselkoerse is:

$$
\begin{aligned}
£\ 1 &= \text{R } 17{,}12\\
¥\ 1 &= \text{R } 0{,}10\\
\$\ 1 &= \text{R } 11{,}42\\
€\ 1 &= \text{R } 12{,}97\\
1\ \text{BRL} &= \text{R } 4{,}43\\
1\ \text{AUD} &= \text{R } 9{,}12
\end{aligned}
$$

   a) Watter groep toeriste het die beste fooi gegee? Hoeveel het hulle gegee (in rand)?
   b) Watter groep toeriste het die swakste fooitjies gegee? Hoeveel het hulle gegee (in rand)?

8. Kayla beplan om haar familie in Malawi te besoek en om daarna tyd te spandeer in die Serengeti Reservaat in Tanzanië. Sy moet eers haar Suid-Afrikaanse rande omskakel na Malawi kwacha. Daarna moet sy haar oorblywende Malawi kwacha omskakel na Tanzanië sjielings.

   Sy vind uit oor die huidige wisselkoerse en vind die volgende inligting:

$$
\begin{aligned}
\text{R } 1 &= 39{,}46 \text{ MWK}\\
1 \text{ MWK} &= 4{,}01 \text{ TZS}
\end{aligned}
$$

   Sy begin met R 5000 in Suid-Afrika. In Malawi spandeer sy 65 000 MWK. Wanneer sy die oorblywende Malawi kwacha vir Tanzanië sjieling omruil, hoeveel geld het sy (in Tanzanië sjieling)?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K5Y 2. 2K5Z 3. 2K62 4. 2K63 5. 2K64 6. 2K65 7. 2K66 8. 2K67

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.6 Hoofstuk opsomming EMD6W

Sien aanbieding: 2K68 at www.everythingmaths.co.za

- Daar is twee tipes rentekoerse:

Enkelvoudige rente	Saamgestelde rente
$A = P(1 + in)$	$A = P(1+i)^n$

Waar:

$$\begin{aligned} A &= \text{eindbedrag} \\ P &= \text{hoofsom} \\ i &= \text{rente as 'n desimaal geskryf} \\ n &= \text{aantal jare} \end{aligned}$$

- Huurkoop leningsterugbetalings word bereken deur die toepassing van die enkelvoudige rente formule op die kontantprys minus die deposito. Maandelikse terugbetalings word bereken deur die opgehoopte bedrag te deel deur die aantal maande vir die terugbetaling.
- Bevolkingsgroei en inflasie word bereken deur die saamgestelde rente formule te gebruik.
- Buitelandse wisselkoerse is die prys van een geldeenheid in terme van 'n ander een.

End of chapter Exercise 9 – 7:

1. 'n Bedrag van R 6330 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 11% p.a. betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 7 jaar.
2. 'n Bedrag van R 1740 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 7% p.a. betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 6 jaar.
3. Adam open 'n spaarrekening toe hy 13 jaar oud is. Hy wil R 50 000 hê teen die tyd dat hy 18 is. As die spaarrekening enkelvoudige rente aanbied teen ' n koers van 8,5% per annum, hoeveel geld moet hy nou belê om sy doel te bereik?
4. Toe sy seun 4 jaar oud was, het Dumile R 6700 gedeponeer in die bank. Die belegging het teen 'n enkelvoudige rentekoers gegroei en toe Dumile se seun 24 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 524. Teen watter koers is die geld hele? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
5. Toe sy seun 7 jaar oud was, het Jared 'n deposito van R 5850 in die bank gemaak. Die belegging het teen 'n enkelvoudige rentekoers gegroei en toe Jared se seun 35 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 746,80. Teen watter koers is die geld hele? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
6. Sehlolo wil R 6360 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 12,4% p.a.

   Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 26 075? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
7. Mphikeleli wil R 5540 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 9,1% p.a. Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 16 620? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
8. 'n Bedrag van R 3500 is belê in 'n rekening wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 6,7% per annum. Bereken die bedrag geakkumuleerde rente teen die einde van 4 jaar.

9. 'n Bedrag van R 3270 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 12,2% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 7 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
10. 'n Bedrag van R 2380 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 8,3% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 7 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
11. Emma wil geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 8,2% p.a. Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 61 500 wil bereik in 4 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
12. Limpho wil geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 13,9% p.a. Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 24 300 wil bereik in 2 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
13. Bereken die saamgestelde rente vir die volgende probleme.
    a) 'n R 2000 lening vir 2 jaar teen 5% p.a.
    b) 'n R 1500 belegging vir 3 jaar teen 6% p.a.
    c) 'n R 800 lening vir 1 jaar teen 16% p.a.
14. Ali belê R 1110 in 'n rekening wat 'n enkelbedrag uitbetaal aan die einde van 12 jaar.
    As hy R 1642,80 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.
15. Christopher belê R 4480 in 'n rekening wat 'n enkelbedrag uitbetaal aan die einde van 7 jaar.
    As hy R 6496,00 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.
16. Bereken hoeveel jy sal kry as jy R 500 belê vir 1 jaar teen die volgende rentekoerse:
    a) 6,85% enkelvoudige rente
    b) 4,00% saamgestelde rente
17. Bianca het R 1450 om te belê vir 3 jaar. Bank A bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 11% per annum, terwyl Bank B 'n spaarrekening aanbied wat saamgestelde rente betaal teen 'n koers van 10,5% per annum. Watter rekening sal vir Bianca die grootste geakkumuleerde balans oplewer teen die einde van 3 jaar?
18. Gegee: 'n Lening van R 2000 vir 'n jaar teen 'n rentekoers van 10% p.a.
    a) Hoeveel enkelvoudige rente is betaalbaar op die lening?
    b) Hoeveel saamgestelde rente is betaalbaar op die lening?
19. R 2250 is belê teen 'n rentekoers van 5,25% per annum. Voltooi die volgende tabel.

Aantal jare	Enkelvoudige rente	Saamgestelde rente
1		
2		
3		
4		
20		

20. Bespreek:
    a) Watter tipe rente sou jy graag wou gebruik as jy 'n lener is?
    b) Watter tipe rente sou jy wou gebruik as jy die bankier is?
21. Portia wil 'n televisiestel koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die televisiestel is R 6000. Sy moet 'n deposito betaal van 20% en sy betaal die oorblywende leningsbedrag af oor 12 maande teen 'n rentekoers van 9% p.a.

a) Wat is die leningsbedrag?

b) Wat is die opgehoopte bedrag?

c) Wat is Portia se maandelike terugbetaling?

d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die televisiestel?

22. Gabisile wil 'n verwarmer koop op huurkoop. Die kontantprys van die verwarmer is R 4800. Sy moet 'n deposito betaal van 10% en betaal die oorblywende lening af oor 12 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.

    a) Wat is die leningsbedrag?

    b) Wat is die opgehoopte bedrag?

    c) Wat is Gabisile se maandelikse paaiement?

    d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die verwarmer?

23. Khayalethu koop 'n bank wat R 8000 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hulle hef 'n rentekoers van 12% p.a. oor 3 jaar.

    a) Hoeveel sal Khayalethu in totaal betaal?

    b) Hoeveel rente betaal hy?

    c) Wat is die maandelikse paaiement?

24. Jwayelani koop 'n sofabed van R 7700 met 'n huurkoopooreenkoms. Die rentekoers is 16% p.a. oor 5 jaar.

    a) Hoeveel sal Jwayelani in totaal betaal?

    b) Hoeveel rente betaal hy?

    c) Wat is die maandelikse paaiement?

25. Bonnie koop 'n stoof vir R 3750. Na 3 jaar is sy klaar betaal aan die stoof en die R 956,25 rente wat gehef was vir die huurkoop. Bepaal die enkelvoudige rentekoers wat gehef was.

26. 'n Nuwe meubelwinkel het pas oopgemaak in die dorp en hulle het die volgende spesiale aanbiedings:

    Koop 'n sitkamerstel, 'n slaapkamerstel en die kombuistoerusting (yskas, stoof, wasmasjien) vir slegs R 50 000 en ontvang 'n gratis mikrogolfoond. Geen deposito word verlang nie en 'n 5 jaar afbetalingsplan is beskikbaar. Rente word gehef teen slegs 6,5% p.a.

    Babelwa koop al die items op huurkoop. Sy besluit om 'n deposito van R 1500 te betaal. Die winkel voeg 'n versekeringspremie van R 35,00 per maand by.

    Wat is Babelwa se maandelikse paaiement op die items?

27. Die prys van 2 liter melk is R 17. Hoeveel sal dit oor 3 jaar kos as die inflasiekoers 13% p.a. is?

28. Die prys van 'n 2 l bottel vrugtesap is R 16. Wat sal die sap oor 8 jaar kos met 'n inflasiekoers 7% p.a.?

29. 'n Boks vrugtelekkers kos vandag R 27. Hoeveel het dit 8 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 10% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

30. 'n Boksie Smarties kos vandag R 23. Hoeveel het dieselfde boksie 8 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 14% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

31. Volgens die laaste sensus, het Suid-Afrika tans 'n bevolking van 57 000 000.

    a) As die verwagte jaarlikse groeitempo 0,9% is, bereken hoeveel Suid-Afrikaners sal daar oor 10 jaar wees (korrek tot die naaste honderd duisend).

    b) As dit na 10 jaar blyk dat die bevolking in der waarheid gegroei het met 10 miljoen tot 67 miljoen, wat was die groeitempo?

32. Die huidige bevolking van Kaapstad is 3 875 190 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,4% p.a. Wat verwag die stadsbeplanners sal die bevolking van Kaapstad oor 12 jaar wees? Nota: Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.

33. Die huidige bevolking van Pretoria is 3 888 420 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,7% p.a. Wat sal die bevolking van Pretoria oor 7 jaar wees? Nota: Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
34. Monique wil ’n iPad koop wat £ 140 kos, met die wisselkoers tans op £ 1 = R 15. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor ’n maand.
    a) Hoeveel sal die iPad kos, in rand, as sy dit nou koop?
    b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
    c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 20?
35. Xolile wil ’n CD speler koop wat £ 140 kos, terwyl die huidige wisselkoers £ 1 = R 14 is. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 10 in ’n maand.
    a) Hoeveel sal die CD speler kos, in rand, as sy dit nou koop?
    b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers val tot R 10?
    c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 20?
36. Alison gaan met vakansie na Europa. Haar hotel kos € 200 per nag. Hoeveel geld het sy nodig, in rand, om haar hotel rekening te kan betaal teen ’n wisselkoers van € 1 = R 9,20?
37. Jennifer koop boeke op die internet. Sy vind ’n uitgewer in die VK wat die boeke verkoop vir £ 16,99.

    Sy vind dieselfde boeke by ’n uitgewer in die VSA vir $23,50.

    Vervolgens kyk sy na die wisselkoers om te sien watter uitgewer vir haar die beste opsie gee. As $1 = R 12,43 en £ 1 = R 16,89, van watter uitgewer behoort sy die boeke te koop?
38. Bonani wen ’n reis na Machu Picchu in Peru, gevolg deur ’n toer na Brasilië vir die karnaval. Hy kry R 25 000 om te spandeer op sy toer.

    Hy kyk vervolgens na die huidige wisselkoerse en vind die volgende inligting:

    $$\text{R } 1 = 0{,}26 \text{ PEN}$$
    $$1 \text{ BRL} = 1{,}17 \text{ PEN}$$

    In Peru spandeer hy 2380 PEN. Hoeveel geld het hy (in Brasilië real) nadat hy sy orige Peru sol omgeskakel het na Brasilië real of BRL?
39. As die wisselkoers van die Rand tot die Japanese Yen ¥ 100 = R 6,23 is, en tot die Australiese dollar 1 AUD = R 5,11 is, bereken die wisselkoers tussen die Australiese dollar en die Japanese yen.
40. Khetang was onlangs vir ’n paar maande in Europa vir werk. Hy keer terug na Suid-Afrika met € 2850 om te belê in ’n spaarrekening.

    Sy bank bied hom ’n spaarrekening aan wat 5,3% saamgestelde rente per annum betaal. Die bank skakel Khetang se euro om na rand teen ’n wisselkoers van € 1 = R 12,89.

    As Khetang sy geld belê vir 6 jaar, hoeveel rente verdien hy op sy belegging?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1. 2K69	2. 2K6B	3. 2K6C	4. 2K6D	5. 2K6F	6. 2K6G	7. 2K6H	8. 2K6J
9. 2K6K	10. 2K6M	11. 2K6N	12. 2K6P	13a. 2K6Q	13b. 2K6R	13c. 2K6S	14. 2K6T
15. 2K6V	16. 2K6W	17. 2K6X	18. 2K6Y	19. 2K6Z	20. 2K72	21. 2K73	22. 2K74
23. 2K75	24. 2K76	25. 2K77	26. 2K78	27. 2K79	28. 2K7B	29. 2K7C	30. 2K7D
31. 2K7F	32. 2K7G	33. 2K7H	34. 2K7J	35. 2K7K	36. 2K7M	37. 2K7N	38. 2K7P
39. 2K7Q	40. 2K7R						

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 10

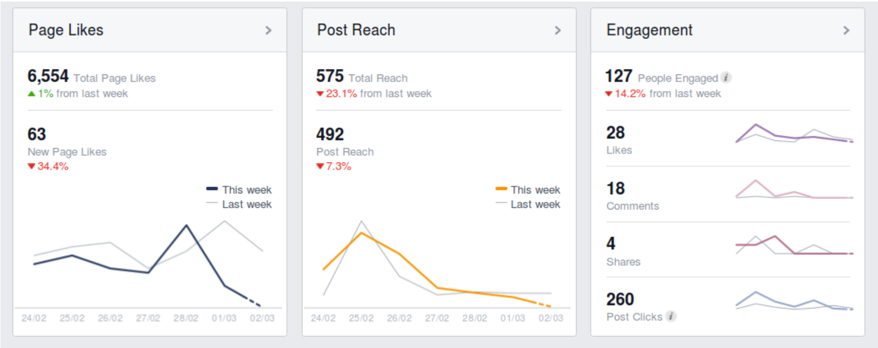
Statistiek

Wanneer ons 'n eksperiment uitvoer of 'n opname doen, kan ons potensieel eindig met honderde, duisende of selfs miljoene waardes in die uiteindelike datastel. Te veel data kan oorweldigend wees en ons moet dit verminder of die data op 'n manier voorstel wat makliker is om te verstaan en te kommunikeer.

Statistiek gaan oor die opsomming van data. Statistiese metodes laat ons toe om die essensiële inligting in 'n datastel voor te stel terwyl al die onbelangrike inligting ter syde gestel word. Ons moet versigtig wees om seker te maak dat ons nie per ongeluk sommige van die belangrike aspekte van 'n datastel weggooi nie.

Deur statistiek behoorlik toe te pas, kan ons die belangrike aspekte van die data uitlig en die data makliker maak om te interpreteer. Deur statistiek of oneerlik te gebruik, kan ons belangrike inligting wegsteek en mense verkeerde gevolgtrekkings laat maak.

In hierdie hoofstuk sal ons kyk na 'n paar numeriese en grafiese maniere waarmee datastelle voorgestel kan word om dit makliker te maak om hulle te interepreteer.



Figuur 10.1: Statistiek word op verskeie webblaaie gebruik om lesers te wys wie na die inhoud van die betrokke webblad kyk.

10.1 Versameling van data EMD6X

DEFINISIE: *Data*

Data verwys na die stukkies inligting wat waargeneem en aangeteken is in 'n eksperiment of 'n opname.

NOTA:
Die woord **data** is die meervoud van die woord **datum**, en dus behoort mens in Engels te sê "the data are" en nie "the data is" nie.

Ons onderskei tussen twee hooftipes data: kwantitatiewe data en kwalitatiewe data.

DEFINISIE: *Kwantitatiewe data*

Kwantitatiewe data is data wat geskryf kan word as getalle.

Kwantitatiewe data kan diskreet of kontinu wees. Diskrete kwantitatiewe data kan voorgestel word met heelgetalle en dit kom gewoonlik voor wanneer ons dinge tel, byvoorbeeld, die aantal leerders in 'n klas, die getal molekules in 'n chemiese oplossing, of die aantal SMS boodskappe wat in een dag gestuur word.

Kontinue kwantitatiewe data kan voorgestel word met reële getalle, byvoorbeeld, die hoogte of massa van 'n persoon, die afstand afgelê deur 'n motor, of die lengte van 'n foonoproep.

DEFINISIE: *Kwalitatiewe data*

Kwalitatiewe data is data wat nie as getalle geskryf kan word nie.

Twee algemene tipes kwalitatiewe data is kategoriale data en anekdotiese data. Kategoriale data kom gewoonlik uit 'n beperkte aantal moontlikhede, byvoorbeeld, jou geliefkoosde koeldrank, die kleur van jou selfoon, of jou huistaal.

Anekdotiese data neem die vorm aan van 'n onderhoud of 'n storie, byvoorbeeld, wanneer jy iemand vra wat hulle persoonlike ervaring was toe hulle 'n sekere produk gebruik het, of wat hulle dink van iemand anders se gedrag.

Kategoriale kwalitatiewe data word somtyds omgeskakel na kwantitatiewe data deur die aantal kere te tel wat elke kategorie voorkom. Byvoorbeeld, in 'n klas met 30 leerders, vra ons vir almal wat die kleure van hulle selfone is en kry die volgende antwoorde:

swart	swart	swart	wit	pers	rooi	rooi	swart	swart	swart
wit	wit	swart	swart	swart	swart	pers	swart	swart	wit
pers	swart	rooi	rooi	wit	swart	oranje	oranje	swart	wit

Hierdie is 'n kategoriale kwalitatiewe datastel aangesien elkeen van die antwoorde uit 'n klein aantal moontlike kleure kom.

Ons kan presies dieselfde data op 'n verskillende manier voorstel deur te tel hoeveel keer elke kleur voorkom.

Kleur	Telling
swart	15
wit	6
rooi	4
pers	3
oranje	2

Hierdie is 'n diskrete kwantitatiewe datastel aangesien elke telling 'n heelgetal is.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Kwalitatiewe en kwantitatiewe data

VRAAG

Thembisile stel daarin belang om lugtyd te herverkoop aan sy klasmaats. Hy wil graag weet hoeveel besigheid hy van hulle kan verwag. Hy vra elk van sy 20 klasmaats hoeveel SMS boodskappe hulle die vorige dag gestuur het. Die resultate was:

20	3	0	14	30	9	11	13	13	15
9	13	16	12	13	7	17	14	9	13

Is hierdie datastel kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.

OPLOSSING

Die getal SMS boodskappe is 'n telling wat verteenwoordig word deur 'n heelgetal, wat beteken dat dit kwantitatief en diskreet is.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Kwalitatiewe en kwantitatiewe data

VRAAG

Thembisile wil graag weet wat die mees gewilde selfoon diensverskaffer is onder die leerders in sy skool. Hierdie keer kies Thembisile, op ’n willekeurige manier, 20 leerders uit die hele skool en vra hulle watter selfoon diensverskaffer hulle tans gebruik. Die resultate was:

Cell C	Vodacom	Vodacom	MTN	Vodacom
MTN	MTN	Virgin Mobile	Cell C	8-ta
Vodacom	MTN	Vodacom	Vodacom	MTN
Vodacom	Vodacom	Vodacom	Virgin Mobile	MTN

Is hierdie datastel kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.

OPLOSSING

Aangesien elke antwoord nie ’n getal is nie, maar een van ’n klein aantal moontlikhede, is hierdie kategoriale kwalitatiewe data.

Oefening 10 – 1:

1. Die volgende datastel van leerders se drome of planne, is ingesamel van Graad 12 leerders net na hulle finale eksamens. {”Ek wil ’n brug te bou!”; ”Ek wil die siekes te help.”; ”Ek wil lopende water hê!”} Kategoriseer die datastel.
2. Kategoriseer die volgende datastel van lekkers in ’n pakkie is ingesamel van besoekers aan ’n lekkergoedwinkel. $\{23; 25; 22; 26; 27; 25; 21; 28\}$
3. Kategoriseer die volgende datastel van vrae wat korrek beantwoord is, is ingesamel van ’n klas van wiskunde leerders. $\{3; 5; 2; 6; 7; 5; 1; 2\}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1. 2K7S 2. 2K7T 3. 2K7V

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.2 Maatstawwe van sentrale neiging EMD6Y

Gemiddelde EMD6Z

DEFINISIE: *Gemiddelde*

Die gemiddelde is die som van ’n stel van waardes, gedeel deur die aantal waardes in die stel. Die notasie vir die gemiddelde van ’n stel waardes is ’n horisontale balkie oor die veranderlike wat gebruik word om die versameling te verteenwoordig, byvoorbeeld $\bar{x}$. Die formule vir die gemiddelde van ’n datastel $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ is:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\end{aligned}$$

Die gemiddelde word somtyds ook die rekenkundige gemiddelde genoem.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Berekening van die gemiddelde

VRAAG

Wat is die gemiddelde van die datastel $\{10; 20; 30; 40; 50\}$?

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die som van die data

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

Stap 2: Deel deur die aantal waardes in die datastel om die gemiddelde te kry

Aangesien daar 5 waardes in die datastel is, is die gemiddelde:

$$\text{gemiddelde} = \frac{150}{5} = 30$$

Mediaan

EMD72

DEFINISIE: *Mediaan*

Die mediaan van 'n datastel is die waarde in die middelste posisie van die datastel, wanneer die datastel georden is van die kleinste tot die grootste waarde.

Let daarop dat presies die helfte van die waardes van die datastel kleiner is as die mediaan en die ander helfte is groter as die mediaan.

Om die mediaan te bereken van 'n kwantitatiewe datastel, orden eers die data van die kleinste tot die grootste waarde en vind dan die waarde in die middel. As daar 'n onewe aantal waardes in die datastel is, sal die mediaan gelyk wees aan een van die waardes in die datastel. As daar 'n ewe aantal waardes in die datastel is, sal die mediaan halfpad tussen twee waardes in die datastel wees.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Mediaan vir 'n onewe aantal waardes

VRAAG

Wat is die mediaan van $\{10; 14; 86; 2; 68; 99; 1\}$?

OPLOSSING

Stap 1: Orden die waardes

Die waardes in die datastel, gerangskik van die kleinste tot die grootste, is

$$1; 2; 10; 14; 68; 86; 99$$

Stap 2: Vind die getal in die middel

Daar is 7 waardes in die datastel. Aangesien daar 'n onewe aantal waardes is, sal die mediaan gelyk wees aan die waarde in die middel, naamlik in die vierde posisie. Dus is 14 die mediaan van die datastel.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Mediaan vir 'n onewe aantal waardes

VRAAG

Wat is die mediaan van $\{11; 10; 14; 86; 2; 68; 99; 1\}$?

OPLOSSING

Stap 1: Orden die waardes

Die waardes in die datastel, gerangskik van die kleinste tot die grootste, is

$$1; 2; 10; 11; 14; 68; 86; 99$$

Stap 2: Vind die getal in die middel

Daar is 8 waardes in die datastel. Aangesien daar 'n ewe aantal waardes is, sal die mediaan halfpad tussen die middelste twee waardes wees, naamlik tussen die vierde en vyfde posisies. Die waarde in die vierde posisie is 11 en die waarde in die vyfde posisie is 14. Die mediaan lê halfpad tussen hierdie twee waardes en is dus

$$\text{mediaan} = \frac{11 + 14}{2} = 12{,}5$$

Modus EMD73

DEFINISIE: *Modus*

Die modus van 'n datastel is die waarde wat die meeste voorkom in die dataversameling. Die modus kan ook beskryf word as die waarde met die grootste frekwensie of die mees algemene waarde in die datastel.

Om die modus te bereken, tel ons eenvoudig die aantal kere wat elke waarde voorkom in die datastel en vind dan die waarde wat die meeste voorkom.

'n Datastel kan meer as een modus hê as daar meer as een waarde is met die hoogste telling. Byvoorbeeld, beide 2 en 3 is modusse in die datastel $\{1; 2; 2; 3; 3\}$. As alle punte in 'n datastel met dieselfde frekwensie voorkom, is dit ewe akkuraat om te sê die datastel het baie modusse of geen modus nie.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik hoe om die gemiddelde, die mediaan en die modus van 'n datastel te bereken.
Sien video: 2K7W at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vind die modus

VRAAG

Vind die modus van die datastel $\{2; 2; 3; 4; 4; 4; 6; 6; 7; 8; 8; 10; 10\}$.

OPLOSSING

Stap 1: Tel die aantal kere wat elke waarde in die datastel verskyn

Waarde	Telling
2	2
3	1
4	3
6	2
7	1
8	2
10	2

Stap 2: Vind die waarde wat die meeste voorkom

Van die tabel hierbo kan ons sien dat 4 die enigste waarde is wat 3 keer voorkom. Al die ander waardes verskyn minder as 3 keer. Dus is die modus van die datastel 4.

Een probleem met die gebruik van die modus as 'n maatstaf van sentrale neiging, is dat ons meestal nie die modus van 'n kontinue datastel kan bereken nie. Aangesien kontinue waardes enige plek op die reële getallelyn kan lê, sal enige spesifieke waarde feitlik nooit herhaal word nie. Dit beteken dat die frekwensie van elke waarde in die datastel 1 sal wees en dat daar dus nie 'n modus sal wees nie. Ons sal kyk na een manier om die probleem aan te spreek in die afdeling oor die groepering van data.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vergelyking van die maatstawwe van sentrale neiging

VRAAG

Daar is regulasies in Suid-Afrika met betrekking tot die produksie van brood om verbruikers te beskerm. As 'n brood nie 'n etiket het nie, moet dit, volgens wet, 800 g weeg, met die speling van 5 persent onder of 10 persent oor. Vishnu stel belang in hoe 'n welbekende nasionale verskaffer voldoen aan hierdie standaard. Hy besoek sy plaaslike tak van die verskaffer en teken die massas van 10 verskillende brode vir een week aan. Die resultate, in gram, word hieronder gegee:

Maandag	Dinsdag	Woensdag	Donderdag	Vrydag	Saterdag	Sondag
802,4	787,8	815,7	807,4	801,5	786,6	799,0
796,8	798,9	809,7	798,7	818,3	789,1	806,0
802,5	793,6	785,4	809,3	787,7	801,5	799,4
819,6	812,6	809,1	791,1	805,3	817,8	801,0
801,2	795,9	795,2	820,4	806,6	819,5	796,7
789,0	796,3	787,9	799,8	789,5	802,1	802,2
789,0	797,7	776,7	790,7	803,2	801,2	807,3
808,8	780,4	812,6	801,8	784,7	792,2	809,8
802,4	790,8	792,4	789,2	815,6	799,4	791,2
796,2	817,6	799,1	826,0	807,9	806,7	780,2

1. Is hierdie datastel kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.
2. Bepaal die gemiddelde, mediaan en modus van die massa van 'n brood vir elke dag van die week. Gee jou antwoord korrek tot 1 desimale plek.
3. Gebaseer op hierdie data, dink jy hierdie verskaffer se brode is binne die Suid-Afrikaanse regulasies?

OPLOSSING

Stap 1: Kwalitatief of kwantitatief?

Aangesien elke massa verteenwoordig kan word deur 'n getal, is die datastel kwantitatief. Verder, aangesien die massa enige reële getal kan wees, is die data kontinu.

Stap 2: Bereken die gemiddelde

In elke kolom (vir elke dag van die week), tel ons die metings bymekaar en deel deur die aantal metings, 10.

Vir Maandag is die som van die gemete waardes 8007,9 en dus is die gemiddelde vir Maandag

$$\frac{8007{,}9}{10} = 800{,}8 \text{ g}$$

Op dieselfde manier kan ons die gemiddelde vir elke dag van die week bereken. Sien die tabel hieronder vir die resultate.

Stap 3: Bereken die mediaan

In elke kolom sorteer ons die getalle van die laagste tot die hoogste en vir die waarde in die middel. Aangesien daar 'n ewe aantal metings is, (10), is die mediaan halfpad tussen die twee getalle in die middel.

Vir Maandag is die geordende lys van getalle

$$789{,}0; 789{,}0; 796{,}2; 796{,}7; 801{,}2;$$
$$802{,}3; 802{,}3; 802{,}5; 808{,}7; 819{,}6$$

Die twee getalle in die middel is 801,2 en 802,3 en dus is die mediaan

$$\frac{801{,}2 + 802{,}3}{2} = 801{,}8 \text{ g}$$

Op dieselfde manier kan ons die mediaan vir elke dag van die week bereken:

Dag	Gemiddelde	Mediaan
Maandag	800,8 g	801,8 g
Dinsdag	797,2 g	796,1 g
Woensdag	798,4 g	797,2 g
Donderdag	803,4 g	800,8 g
Vrydag	802,0 g	804,3 g
Saterdag	801,6 g	801,4 g
Sondag	799,3 g	800,2 g

Van die berekenings hierbo kan ons sien dat die gemiddeldes en die mediane naby aan mekaar is, maar nie heeltemal dieselfde is nie. In die volgende uitgewerkte voorbeeld sal ons sien dat die gemiddelde en die mediaan nie altyd naby aan mekaar is nie.

Stap 4: Bepaal die modus

Aangesien die data kontinu is, kan ons nie die modus bereken nie. In die volgende afdeling sal ons wys hoe ons data kan groepeer ten einde dit moontlik te maak om 'n benaderde modus te bereken.

Stap 5: Gevolgtrekking: Is die verskaffer betroubaar?

Soos gemeld in die vraag, is die voorskrif dat die massa van 'n brood moet lê tussen 800 g minus 5%, wat 760 g is, en plus 10%, wat 880 g is. Aangesien elke meting wat Vishnu gemaak het binne hierdie omvang lê en al die mediane naby aan 800 g lê, kan ons aflei dat die verskaffer betroubaar is.

DEFINISIE: *Uitskieter*

'n Uitskieter is 'n waarde in die datastel wat nie tipies is van die res van die stel nie. Dit is gewoonlik 'n waarde wat baie groter of baie kleiner is as al die ander waardes in die datastel.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Effek van uitskieters op die gemiddelde en die mediaan

VRAAG

Die lengtes van 10 leerders word in sentimeters gemeet om die volgende datastel te verkry:

$$\{150; 172; 153; 156; 146; 157; 157; 143; 168; 157\}$$

Agterna sluit ons nog een leerder, met 'n uitsonderlike lengte van 181 cm, in die groep in.

Vergelyk die gemiddelde en die mediaan van die lengtes van die leerders voor en na die elfde leerder ingesluit is.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die gemiddelde van die eerste 10 leerders

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{150+172+153+156+146+157+157+143+168+157}{10}\\ &= 155{,}9 \text{ cm}\end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die gemiddelde van al 11 leerders

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{150+172+153+156+146+157+157+143+168+157+181}{11}\\ &= 158{,}2 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ons sien dat die gemiddelde lengte met $158{,}2 - 155{,}9 = 2{,}3$ cm verander wanneer ons die uitskieter (die lang persoon) insluit in die datastel.

Stap 3: Bereken die mediaan van die eerste 10 leerders

Om die mediaan te vind, moet ons die datastel orden:

$$\{143; 146; 150; 153; 156; 157; 157; 157; 168; 172\}$$

Aangesien daar 'n ewe aantal waardes is, naamlik 10, lê die mediaan halfpad tussen die vyfde en die sesde waardes:

$$\text{mediaan} = \frac{156+157}{2} = 156{,}5 \text{ cm}$$

Stap 4: Bereken die mediaan van al 11 leerders

Nadat die lang leerder ingesluit is, is die geordende datastel

$$\{143; 146; 150; 153; 156; 157; 157; 157; 168; 172; 181\}$$

Nou, met 11 waardes, is die mediaan die sesde waarde: 157 cm. Dus, die mediaan verander slegs met 0,5 cm wanneer ons die uitskieter bytel by die datastel.

In die algemeen word die mediaan minder geaffekteer deur die byvoeging van uitskieters by 'n datastel, as die gemiddelde. Dit is belangrik omdat dit heel algemeen voorkom dat uitskieters gemeet word gedurende 'n eksperiment as gevolg van probleme met toerusting of onverwagte inmenging.

Oefening 10 – 2:

1. Bereken die **gemiddelde** van die volgende datastel: $\{9; 14; 9; 14; 8; 8; 9; 8; 9; 9\}$. Rond jou antwoord af tot 1 desimale plek.
2. Bereken die **mediaan** van die volgende datastel: $\{4; 13; 10; 13; 13; 4; 2; 13; 13; 13\}$.
3. Bereken die **modus** van die volgende datastel: $\{6; 10; 6; 6; 13; 12; 12; 7; 13; 6\}$
4. Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die volgende datastelle:
   a) $\{2; 5; 8; 8; 11; 13; 22; 23; 27\}$
   b) $\{15; 17; 24; 24; 26; 28; 31; 43\}$
   c) $\{4; 11; 3; 15; 11; 13; 25; 17; 2; 11\}$
   d) $\{24; 35; 28; 41; 31; 49; 31\}$
5. Die ouderdomme van 15 atlete in die Comrades Marathon is opgeteken:
   $$\{31; 42; 28; 38; 45; 51; 33; 29; 42; 26; 34; 56; 33; 46; 41\}$$
   Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modale ouderdom.
6. 'n Groep van 10 vriende het 'n aantal klippies tussen hulle. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal klippies wat hulle het, 6 is. Vervolgens verlaat 7 van die vriende die groep met 'n onbekende aantal (x) van die klippies. Die oorblywende 3 vriende werk uit die **gemiddelde** aantal klippies wat hulle oor het, 12,33 is. Hoeveel klippies het die 7 vriende met hulle saamgeneem toe hulle padgegee het?
7. 'n Groep van 9 vriende het elk 'n aantal muntstukke. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal muntstukke wat hulle het, 4 is. Dan verlaat 5 vriende die groep en neem 'n onbekende aantal (x) munte met hulle saam. Die oorblywende 4 vriende bereken dat die **gemiddelde** aantal muntstukke wat hulle nou oor het, 2,5 is. Hoeveel muntstukke het die 5 vriende met hulle saamgeneem toe hulle weg is?
8. 'n Groep van 9 vriende het elkeen 'n aantal albasters. Hulle bereken dat die **gemiddelde** aantal albasters wat hulle het 3 is. Dan verlaat 3 vriende die groep met 'n onbekende aantal (x) albasters. Die oorblywende 6 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal albasters wat hulle nou oor het, 1,17 is. Hoeveel albasters het die 3 vriende met hulle saamgeneem toe hulle die groep verlaat het?
9. In die eerste van 'n reeks flessies is daar 1 lekkertjie. In die tweede flessie is daar 3 lekkers. Die gemiddelde aantal lekkers in die eerste twee flessies is 2.
   a) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste drie flessies 3 is, hoeveel lekkers is daar in die derde flessie?
   b) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste vier flessies 4 is, hoeveel lekkers is daar dan in die vierde flessie?
10. Vind 'n stel van vyf ouderdomme, waarvan die gemiddelde ouderdom 5 is, die modale ouderdom 2 is en die mediaan ouderdom 3 jaar is.
11. Vier vriende het elkeen 'n aantal albasters. Hulle bereken dat hulle gemiddeld elkeen 10 albasters het. Een vriend vertrek met 4 albasters. Hoeveel albasters het die oorblywende vriende altesaam?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1\. 2K7X 2. 2K7Y 3. 2K7Z 4a. 2K82 4b. 2K83 4c. 2K84 4d. 2K85 5. 2K86
6\. 2K87 7. 2K88 8. 2K89 9. 2K8B 10. 2K8C 11. 2K8D

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.3 Groepering van data EMD74

'n Algemene manier om kontinue kwantitatiewe data te hanteer, is om die volle omvang van waardes te onderverdeel in 'n paar sub-intervalle. Deur elke kontinue waarde toe te ken aan 'n sub-interval of klas waarin dit val, verander die datastel van kontinu na diskreet.

Groepering word gedoen deur die definiëring van 'n stel intervalle en dan te tel hoeveel van hierdie data binne elke interval val. Die sub-intervalle moenie oorvleuel nie en moet die totale omvang van die datastel dek.

Een manier om gegroepeerde data visueel voor te stel, is 'n histogram. 'n Histogram is 'n versameling van reghoeke, waar die basis van die reghoek (op die x-as) die waardes insluit wat daarmee geassosieer is en die hoogte van die reghoek ooreenstem met die aantal waardes in hierdie interval.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik hoe om data te groepeer.
Sien video: 2K8F at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 9: Groepe en histogramme

VRAAG

Die lengtes, in sentimeters, van 30 leerders word hieronder gegee.

142	163	169	132	139	140	152	168	139	150
161	132	162	172	146	152	150	132	157	133
141	170	156	155	169	138	142	160	164	168

Groepeer die data in die volgende intervalle en teken 'n histogram van die gegroepeerde data:

$$130 \leq h < 140$$
$$140 \leq h < 150$$
$$150 \leq h < 160$$
$$160 \leq h < 170$$
$$170 \leq h < 180$$

(Let op dat die intervalle nie oorvleuel nie aangesien die een begin waar die vorige een geëindig het.)

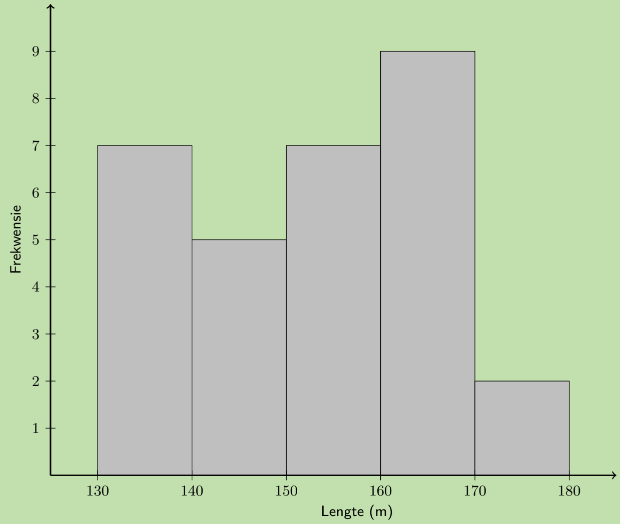
OPLOSSING

Stap 1: Tel die aantal waardes in elke interval

Omvang	Telling
$130 \leq h < 140$	7
$140 \leq h < 150$	5
$150 \leq h < 160$	7
$160 \leq h < 170$	9
$170 \leq h < 180$	2

Stap 2: Teken die histogram

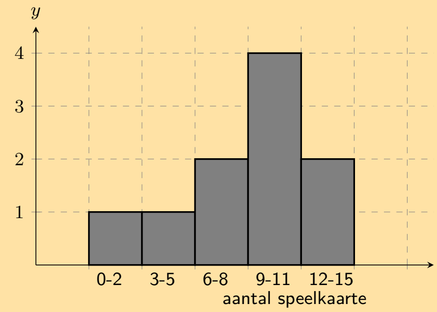
Aangesien daar 5 intervalle is, sal die histogram 5 reghoeke hê. Die basis van elke reghoek word gedefinieer deur sy omvang. Die hoogte van elke reghoek word bepaal deur die datatelling in daardie interval.



Die histogram maak dit maklik om te sien in watter interval die meeste van die lengtes geleë is en voorsien 'n oorsig oor die verspreiding van die waardes in die datastel.

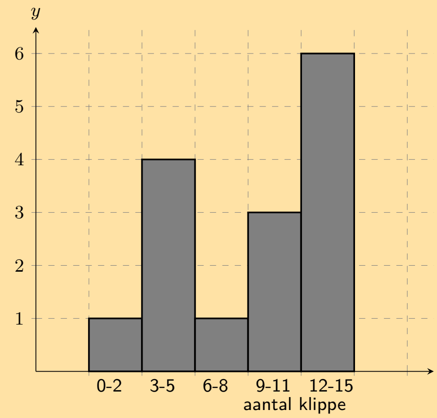
Oefening 10 – 3:

1. 'n Groep van 10 leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



Tel die aantal speelkaarte in die volgende interval: $0 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 2

2. 'n Groep van 15 leerders tel die aantal klippe wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



Tel die aantal klippe in die volgende interval: $0 \leq$ aantal klippe ≤ 2

3. 'n Groep van **20** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

14	9	11	8	13	2	3	4	16	17
9	19	10	14	4	16	16	11	2	17

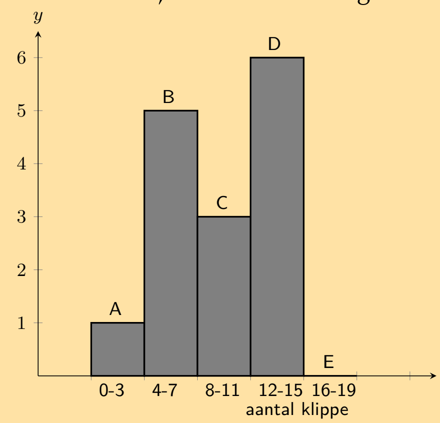
Tel die aantal leerders wat van 12 tot 15 kaarte het. Met ander woorde, hoeveel leerders het speelkaarte in die volgende interval: $12 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 15? Dit mag handig wees om 'n histogram te trek om die vraag te beantwoord.

4. 'n Groep van **20** leerders tel die klippe wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle bymekaar gemaak het:

16	6	11	19	20	17	13	1	5	12
5	2	16	11	16	6	10	13	6	17

Tel die aantal leerders wat van 4 tot 7 klippe het. Met ander woorde, hoeveel leerders het 'n aantal klippe in die volgende interval: $4 \leq$ aantal klippe ≤ 7? Dit mag help as jy 'n histogram trek ten einde die vraag te beantwoord.

5. 'n Groep van 20 leerders tel die aantal klippe wat elkeen het. Die leerders trek 'n histogram wat die data beskryf wat hulle bymekaar gemaak het. Maar, hulle het 'n fout gemaak met die trek van die histogram.

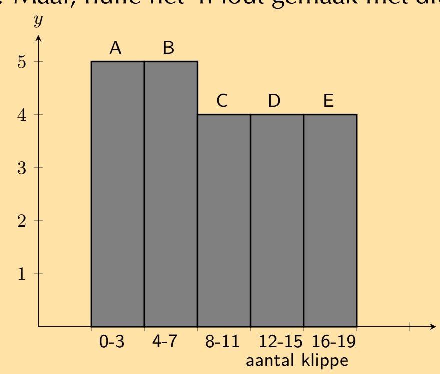


Die data hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal klippe wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal klippe vir een leerder.

$$\{4; 12; 15; 14; 18; 12; 17; 15; 1; 6; 6; 12; 6; 8; 6; 8; 17; 19; 16; 8\}$$

Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

6. 'n Groep van 20 leerders tel die aantal klippe wat elkeen het. Die leerders trek 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het. Maar, hulle het 'n fout gemaak met die trek van die histogram.

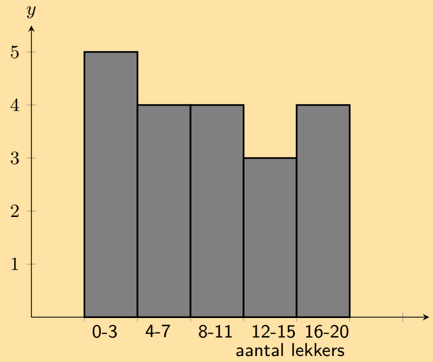


Die data hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal klippe wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal klippe vir een leerder.

$$\{19; 11; 5; 2; 3; 4; 14; 2; 12; 19; 11; 14; 2; 19; 11; 5; 17; 10; 1; 12\}$$

Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

7. ’n Groep leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is ’n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



’n Kat spring per ongeluk op die tafel en al hulle notas land deurmekaar op die vloer.
Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle by die histogram pas:

Datastel A

2	1	20	10	5	3	10	2	6	1
2	2	17	3	18	3	7	10	8	18

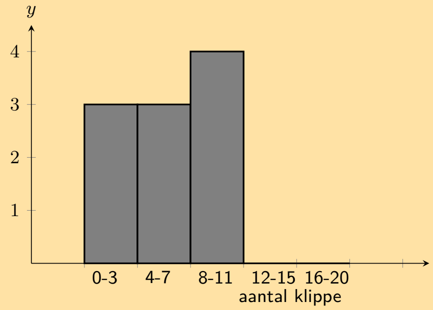
Datastel B

2	9	12	10	5	9	9	10
13	6	5	11	10	7	7	

Datastel C

3	12	16	10	15	17	18	2	3	7
11	12	8	2	7	17	3	11	4	4

8. ’n Groep leerders tel die aantal klippe wat hulle elkeen het. Hier is ’n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het.



’n Skoonmaker stamp per ongeluk hulle tafel om en al hulle notas land in ’n deurmekaarspul op die vloer! Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle by die histogram pas:

Datastel A

12	4	2	15	10	18	10	16	16	19
1	2	9	10	16	10	11	9	2	13

Datastel B

7	10	4	5	8	7	12	10
14	5	1	9	2	13	3	

Datastel C

9	3	8	5	8
5	8	1	4	3

9. 'n Klaseksperiment is uitgevoer en 50 leerders is gevra om die aantal lekkers in 'n bottel te raai. Die volgende raaiskote is aangeteken:

56	49	40	11	33	33	37	29	30	59
21	16	38	44	38	52	22	24	30	34
42	15	48	33	51	44	33	17	19	44
47	23	27	47	13	25	53	57	28	23
36	35	40	23	45	39	32	58	22	40

a) Teken 'n gegroepeerde frekwensietabel op deur gebruik te maak van die intervalle $10 < x \leq 20$, $20 < x \leq 30$, $30 < x \leq 40$, $40 < x \leq 50$ en $50 < x \leq 60$.

b) Trek 'n histogram wat ooreenstem met die frekwensietabel van die gegroepeerde data.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K8G 2. 2K8H 3. 2K8J 4. 2K8K 5. 2K8M 6. 2K8N
7. 2K8P 8. 2K8Q 9. 2K8R

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Maatstawwe van sentrale neiging EMD75

Met gegroepeerde data sal ons skatting van sentrale neigings verander omdat ons sekere inligting sal verloor wanneer ons elke waarde in 'n interval plaas. As ons slegs gegroepeeerde data het om mee te werk, het ons nie meer dieselfde akkurate inligting van die gemete waardes nie. Die beste wat ons kan doen, is om aan te neem dat die waardes gegroepeer is in die middel van elke interval.

As ons terugkyk na die vorige uitgewerkte voorbeeld, sien ons dat ons begin het met die datastel van die leerders se lengtes.

$$\{132; 132; 132; 133; 138; 139; 139; 140; 141; 142; 142; 146; 150; 150; 152;$$
$$152; 155; 156; 157; 160; 161; 162; 163; 164; 168; 168; 169; 169; 170; 172\}$$

Let op dat die data georden is.

Die gemiddelde van hierdie data is 151,8 en die mediaan is 152. Die modus is 132, maar onthou dat daar probleme is met die berekening van die modus van kontinue kwantatiewe data.

Na groepering van die data, het ons nou die datastel hieronder. Let op dat elke waarde geplaas is in die middel van die interval en dat die aantal kere wat elke waarde herhaal word, presies ooreenstem met die telling in elke interval.

$$\{135; 135; 135; 135; 135; 135; 135; 145; 145; 145; 145; 145; 155; 155; 155;$$
$$155; 155; 155; 155; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 175; 175\}$$

Die groepering verander die maatstawwe van sentrale neiging aangesien elke datum hanteer word asof dit presies in die middel van die interval geleë is waarin dit geplaas was.

Die gemiddelde is nou 153, die mediaan is 155 en die modus is 165. Hierdie is eintlik 'n beter skatting van die modus aangesien die groepering toon in watter interval die meeste van die leerders se lengtes geval het.

NOTA:
Ons kan ook slegs die modale groep en mediaangroep vir die gegroepeerde data gee. Die modale groep is die groep wat die grootste aantal datawaardes het. Die mediaangroep is die sentrale groep wanneer die groepe in volgorde gerangskik is.

Oefening 10 – 4:

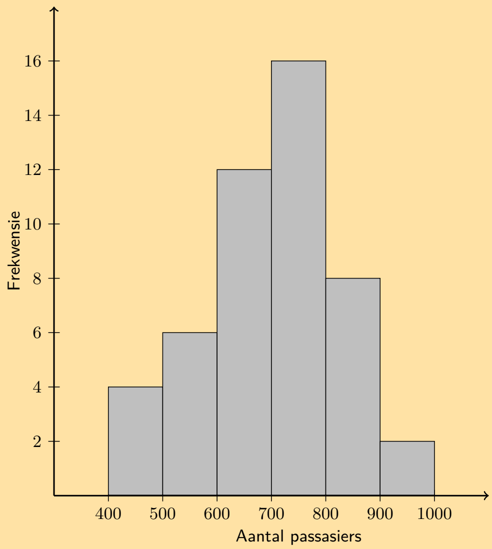
1. Oorweeg die volgende stel gegroepeerde data en bereken die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep.

Massa (kg)	Telling
$40 < m \leq 45$	7
$45 < m \leq 50$	10
$50 < m \leq 55$	15
$55 < m \leq 60$	12
$60 < m \leq 65$	6

2. Vind die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep van hierdie datastel wat aandui hoeveel tyd mense nodig het om 'n spel klaar te maak.

Tyd (s)	Telling
$35 < t \leq 45$	5
$45 < t \leq 55$	11
$55 < t \leq 65$	15
$65 < t \leq 75$	26
$75 < t \leq 85$	19
$85 < t \leq 95$	13
$95 < t \leq 105$	6

3. Die histogram hieronder toon die aantal passasiers wat elke week in Alfred se minibus taxi reis.



Bereken:

a) die modale interval
b) die totale aantal passasiers wat in Alfred se taxi ry

c) ’n skatting van die gemiddelde

d) ’n skatting van die mediaan

e) as dit beraam word dat elke passasier ’n gemiddelde afstand van 5 km reis, hoeveel geld sou Alfred gemaak het as hy R 3,50 per km gevra het?

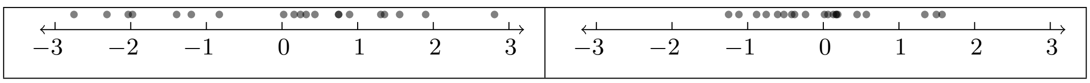
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1. 2K8S 2. 2K8T 3. 2K8V

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.4 Maatstawwe van verspreiding EMD76

Die sentrale neiging is nie die enigste interessante of bruikbare inligting van ’n datastel nie. Die twee datastelle hieronder geïllustreer het dieselfde gemiddelde (0), maar hulle het verskillende verspreidings rondom die gemiddelde. Elke sirkel verteenwoordig een waarde van die datastel (of een ’datum’).



Dispersie of verspreiding is ’n algemene term vir verskillende statistieke wat beskryf hoe die waardes versprei is rondom die middel. In hierdie afdeling sal ons kyk na die maatstawwe van verspreiding.

Omvang EMD77

DEFINISIE: *Omvang*

Die omvang van ’n datastel is die verskil tussen die maksimum en minimumwaardes in die stel.

Die mees voor die handliggende maatstaf van verspreiding is die omvang. Die omvang vertel doodeenvoudig vir ons hoe ver van mekaar af die grootste en die kleinste waardes in die datastel lê. Die omvang is baie sensitief vir uitskieters.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Omvang

VRAAG

Vind die omvang van die volgende datastel:

$$\{1; 4; 5; 8; 6; 7; 5; 6; 7; 4; 10; 9; 10\}$$

Wat sou gebeur as ons die eerste waarde uit die datastel verwyder?

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die omvang

Die kleinste waarde in die datastel is 1 en die grootste waarde is 10.

Die omvang is $10 - 1 = 9$

Stap 2: Verwyder die eerste waarde

As die eerste waarde, 1, uit die datastel verwyder word, sal die minimumwaarde 4 wees. Dit beteken die omvang sal verander na $10 - 4 = 6$. 1 is nie tipies van die ander datawaardes nie. Dit is 'n uitskieter en het 'n groot invloed op die omvang.

Persentiele EMD78

DEFINISIE: *Persentiel*

Die p^{de} persentiel is die waarde, v, wat die datastel verdeel in twee dele, sodat p persent van die waardes in die datastel kleiner is as v en $100 - p$ persent van die waardes groter is as v. Persentiele kan in die omvang $0 \leq p \leq 100$ lê.

Om persentiele behoorlik te verstaan , moet ons onderskei tussen 3 verskillende aspekte van 'n datapunt: sy waarde, sy rangorde en sy persentiel:

- Die waarde van 'n datapunt is dit wat gemeet en aangeteken is gedurende 'n eksperiment of 'n ondersoek.
- Die rangorde van 'n datapunt is sy posisie in die gesorteerde datastel (byvoorbeeld, eerste, tweede, derde, en so aan).
- Die persentiel waarby 'n sekere datapunt is, vertel vir ons watter persentasie van die waardes in die volle datastel kleiner is as hierdie datapunt.

Die tabel hieronder som die waarde, rangorde en persentiel van die datastel op:

$$\{14{,}2; 13{,}9; 19{,}8; 10{,}3; 13{,}0; 11{,}1\}$$

Waarde	Rangorde	Persentiel
10,3	1	0
11,1	2	20
13,0	3	40
13,9	4	60
14,2	5	80
19,8	6	100

As 'n voorbeeld, 13,0 is by die 40^{ste} persentiel aangesien daar 2 waardes is wat minder is as 13,0 en 3 waardes wat groter is as 13,0.

$$\frac{2}{2+3} = 0{,}4 = 40\%$$

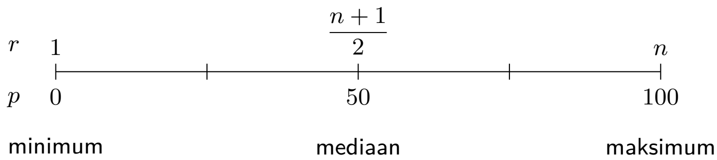
In die algemeen, die formule om die p^{de} persentiel te vind vir 'n geordende datastel met n waardes is

$$r = \frac{p}{100}(n-1) + 1$$

Dit gee vir ons die rangorde, r, van die p^{de} persentiel. Om die waarde te vind van die p^{de} persentiel, moet ons van die eerste waarde in die geordende datastel tel tot by die r^{de} waarde.

Somtyds sal die rangorde of posisie nie 'n heelgetal wees nie. Dit beteken dat die persentiel tussen twee waardes in die datastel lê. Die konvensie is om die waarde te neem wat halfpad tussen die twee waardes lê wat aangedui is deur die rangorde.

Die figuur hieronder toon die verband tussen die rangorde en die persentiel op 'n grafiese manier. Ons het alreeds drie persentiele in hierdie hoofstuk teëgekom (50^{ste} persentiel), die minimum (0^{de} persentiel) en die maksimum (100^{ste}). Die mediaan is gedefinieer as die middelwaarde halfpad in die gesorteerde datastel.



Uitgewerkte voorbeeld 11: Gebruik die persentiel formule

VRAAG

Bepaal die minimum-, maksimum- en mediaanwaardes van die volgende datastel deur gebruik te maak van die persentielformule.

$$\{14; 17; 45; 20; 19; 36; 7; 30; 8\}$$

OPLOSSING

Stap 1: Sorteer die waardes in die datastel.

Voor ons rangorde kan gebruik om waardes te vind in die datastel, moet ons altyd die waardes orden van die kleinste tot die grootste. Die gesorteerde datastel is

$$\{7; 8; 14; 17; 19; 20; 30; 36; 45\}$$

Stap 2: Vind die minimum

Ons weet alreeds dat die minimumwaarde die eerste waarde in die geordende datastel is. Ons sal nou bevestig dat die persentielformule dieselfde antwoord gee. Die minimum is ekwivalent aan die 0^{de} persentiel. Volgens die persentielformule, r, die rangorde van die $p = 0^{\text{de}}$ persentiel in 'n datastel met $n = 9$ waardes, is:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{100}(n-1)+1 \\ &= \frac{0}{100}(9-1)+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dit bevestig dat die minimumwaarde die eerste waarde in die lys is, naamlik 7.

Stap 3: Vind die maksimum

Ons weet reeds dat die maksimumwaarde die laaste waarde in die geordende datastel is. Die maksimum is ook ekwivalent aan die 100^{ste} persentiel. Deur die gebruik van die persentielformule met $p = 100$ en $n = 9$, vind ons die rangorde van die maksimumwaarde is:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{100}(n-1)+1 \\ &= \frac{100}{100}(9-1)+1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Dit bevestig dat die maksimumwaarde die laaste (die negende) waarde in die lys is, naamlik 45.

Stap 4: Vind die mediaan
Die mediaan is ekwivalent aan die 50^{ste} persentiel. Deur die gebruik van die persentielformule met $p = 50$ en $n = 9$, vind ons die rangorde van die mediaanwaarde is:

$$\begin{aligned} r &= \frac{50}{100}(n-1)+1 \\ &= \frac{50}{100}(9-1)+1 \\ &= \frac{1}{2}(8)+1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dit wys die mediaan is in die middel (in die vyfde posisie) van die geordende datastel. Dus is die mediaanwaarde 19.

DEFINISIE: *Kwartiele*

Die kwartiele is die drie datawaardes wat die geordende datastel verdeel in vier groepe, waar elke groep 'n gelyke aantal datawaardes bevat. Die mediaan (50^{ste} persentiel) is die tweede kwartiel ($Q2$). Die 25^{ste} persentiel word ook die eerste of laer kwartiel ($Q1$) genoem. Die 75^{ste} persentiel word ook die derde of boonste kwartiel ($Q3$) genoem.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Kwartiele

VRAAG

Bepaal die kwartiele van die volgende datastel:

$$\{7; 45; 11; 3; 9; 35; 31; 7; 16; 40; 12; 6\}$$

OPLOSSING

Stap 1: Sorteer die datastel

$$\{3; 6; 7; 7; 9; 11; 12; 16; 31; 35; 40; 45\}$$

Stap 2: Vind die rangordes van die kwartiele
Deur die persentielformules te gebruik met $n = 12$, kan ons die rangordes of posisies vind van die 25^{ste}, 50^{ste} en 75^{ste} persentiele:

$$\begin{aligned} r_{25} &= \frac{25}{100}(12-1)+1 \\ &= 3{,}75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100}(12-1)+1 \\ &= 6{,}5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100}(12-1)+1 \\ &= 9{,}25 \end{aligned}$$

Stap 3: Vind die waardes van die kwartiele

Let op dat elk van hierdie rangordes 'n breuk is, wat beteken dat die waarde van elke persentiel iewers tussen twee waardes in die datastel is.

Vir die 25^{ste} persentiel is die rangorde 3,75, wat tussen die derde en vierde waardes lê. Aangesien beide hierdie waardes gelyk is aan 7, is die 25^{ste} persentiel 7.

Vir die 50^{ste} persentiel (die mediaan) is die rangorde 6,5, dit wil sê halfpad tussen die sesde en die sewende waardes. Die sesde waarde is 11 en die sewende waarde is 12, wat beteken dat die mediaan $\frac{11+12}{2}$ = 11,5 is. Vir die 75^{ste} persentiel is die rangorde 9,25, wat beteken tussen die negende en tiende waardes. Dus die 75^{ste} persentiel is $\frac{31+35}{2} = 33$.

Desiele

Die desiele is die nege datawaardes wat die geordende data verdeel in tien groepe, waar elke groep 'n gelyke aantal datawaardes bevat.

Byvoorbeeld, beskou die geordende datastel:

$$28; 33; 35; 45; 57; 59; 61; 68; 69; 72; 75; 78; 80; 83; 86; 91;$$
$$92; 95; 101; 105; 111; 117; 118; 125; 127; 131; 137; 139; 141$$

Die nege desiele is: $35; 59; 69; 78; 86; 95; 111; 125; 137$

Persentiele vir gegroepeerde data EMD79

In gegroepeerde data sal die persentiele iewers binne die interval lê, eerder as by 'n spesifieke waarde. Om die interval te vind waarbinne die persentiel lê, gebruik ons steeds die persentielformule om die rangorde van die persentiel te bepaal en vind dan die interval waarbinne daardie rangorde lê.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Persentiele in gegroepeerde data

VRAAG

Die wiskundepunte van 100 graad 10 leerders by 'n skool is ingesamel. Die data word voorgestel in die volgende tabel:

Persentasiepunt	Getal leerders
$0 \leq x < 20$	2
$20 \leq x < 30$	5
$30 \leq x < 40$	18
$40 \leq x < 50$	22
$50 \leq x < 60$	18
$60 \leq x < 70$	13
$70 \leq x < 80$	12
$80 \leq x < 100$	10

1. Bereken die gemiddelde van hierdie gegroepeerde datastel
2. Binne watter intervalle is die kwartiele van die datastel?
3. In watter interval lê die 30^{ste} persentiel van die datastel?

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die gemiddelde

Aangesien ons die gegroepeerde data eerder as die oorspronklike ongegroepeerde data het om mee te werk, is die beste wat ons kan doen om die gemiddelde te benader asof al die leerders in elke interval geplaas is by die sentrale waarde van die interval.

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{2(10)+5(25)+18(35)+22(45)+18(55)+13(65)+12(75)+10(90)}{100} \\ &= 54\%\end{aligned}$$

Stap 2: Vind die kwartiele

Aangesien die data gegroepeer is, is dit ook alreeds georden. Met gebruik van die persentielformule en die feit dat daar 100 leerders is, kan ons die rangorde vind van die 25^{ste}, 50^{ste} en 75^{ste} persentiele as

$$\begin{aligned}r_{25} &= \frac{25}{100}(100-1)+1 \\ &= 24{,}75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100}(100-1)+1 \\ &= 50{,}5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100}(100-1)+1 \\ &= 75{,}25\end{aligned}$$

Nou moet ons uitvind in watter intervalle elk van hierdie rangordes lê.

- Vir die eerste kwartiel, het ons $2+5=7$ leerders in die eerste twee intervalle gekombineerd en $2+5+18=25$ leerders in die eerste drie intervalle gekombineerd. Aangesien $7 < r_{25} < 25$, beteken dit die eerste kwartiel lê iewers in die derde interval: $30 \leq x < 40$.
- Vir die tweede kwartiel (die mediaan), beteken dit dat daar $2+5+18+22=47$ leerders is in die eerste vier intervalle gekombineerd. Aangesien $47 < r_{50} < 65$, beteken dit dat die mediaan iewers in die vyfde interval lê: $50 \leq x < 60$.
- Vir die boonste kwartiel, beteken dit dat daar 65 leerders is in die eerste vyf intervalle gekombineerd en $65+13=78$ leerders in die eerste ses intervalle gekombineerd. Aangesien $65 < r_{75} < 78$, beteken dit dat die boonste kwartiel iewers in die sesde interval lê: $60 \leq x < 70$.

Stap 3: Vind die 30^{ste} persentiel

Met dieselfde metode as vir die kwartiele, vind ons eers die rangorde van die 30^{ste} persentiel.

$$\begin{aligned}r &= \frac{30}{100}(100-1)+1 \\ &= 30{,}7\end{aligned}$$

Nou moet ons die interval vind waarbinne hierdie rangorde val. Aangesien daar 25 leerders is in die eerste 3 intervalle gekombineerd en 47 leerders in die eerste 4 intervalle gekombineerd, lê die 30^{ste} persentiel in die vierde interval: $40 \leq x < 50$

Omvang EMD7B

Ons definieer data omvang in terme van persentiele. Ons het alreeds kennis gemaak met die volle data omvang, wat eenvoudig die verskil is tussen die 100^{ste} en die 0^{de} persentiel (dit is, tussen die maksimum- en die minimumwaardes van die datastel).

DEFINISIE: *Interkwartielomvang*

Die interkwartielomvang is 'n maatstaf van verspreiding wat bereken word deur die eerste kwartiel (Q_1) af te trek van die derde kwartiel (Q_3). Dit gee die omvang van die middelste helfte van die datastel.

DEFINISIE: *Semi interkwartielomvang*

Die semi interkwartielomvang is die helfte van die interkwartielomvang.

Oefening 10 – 5:

1. 'n Groep van **15** leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 11 & 14 & 7 & 14 & 5 & 8 & 7 \\ 12 & 12 & 5 & 13 & 10 & 6 & 7 & \end{array}$$

   Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.

2. 'n Groep van **10** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel:

$$5 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 10 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 4$$

   Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.

3. Vind die omvang van die datastel: $\{1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 10; 10\}$
4. Wat is die kwartiele van hierdie datastel? $\{3; 5; 1; 8; 9; 12; 25; 28; 24; 30; 41; 50\}$
5. 'n Klas van 12 leerders skryf 'n toets en die resultaat is as volg:

$$\{20; 39; 40; 43; 43; 46; 53; 58; 63; 70; 75; 91\}$$

   Vind die omvang, kwartiele en die interkwartielomvang.

6. Drie stelle data word gegee:

   Datastel 1: $\{9; 12; 12; 14; 16; 22; 24\}$
   Datastel 2: $\{7; 7; 8; 11; 13; 15; 16\}$
   Datastel 3: $\{11; 15; 16; 17; 19; 22; 24\}$

   Vir elke stel data vind:

   a) die omvang
   b) die eerste kwartiel
   c) die mediaan
   d) die boonste kwartiel
   e) die interkwartielwydte
   f) die semi-interkwartielomvang

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K8W 2. 2K8X 3. 2K8Y 4. 2K8Z 5. 2K92 6. 2K93

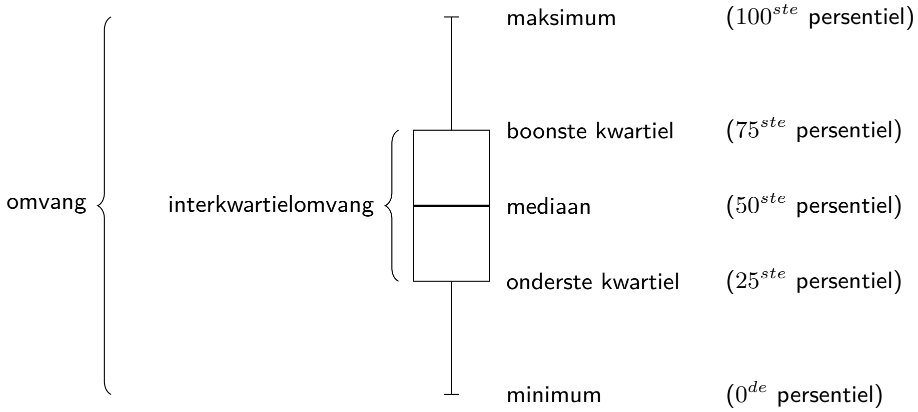
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.5 Vyfgetal opsomming EMD7C

'n Populêre manier om die totale datastel op te som, is met die vyfgetal opsomming en die mond-en-snordiagram. Hierdie twee voorstellings verteenwoordig presies dieselfde inligting, numeries in die geval van die vyfgetal opsomming en grafies in die geval van die mond-en-snordiagram.

Die vyfgetal opsomming bestaan uit die minimumwaarde, die maksimumwaarde en die drie kwartiele. 'n Ander manier om dit te sê is dat die vyfgetal opsomming bestaan uit die volgende persentiele : 0^{de}, 25^{ste}, 50^{ste}, 75^{ste}, 100^{ste}.

Die mond-en-snordiagram toon hierdie vyf persentiele soos in die figuur hieronder. Die boks ("mond") toon die interkwartielomvang (die afstand tussen Q_1 en Q_3). 'n Lyn in die boks toon die mediaan. Die lyne wat weerskante uit die boks ("mond") loop (die snorre) toon waar die maksimum- en minimumwaardes lê. Hierdie grafiek kan ook horisontaal geteken word.



BESOEK:
Hierdie video verduidelik hoe om 'n mond-en-snordiagram vir 'n datastel te teken.
Sien video: 2K94 at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 14: Vyfgetal opsomming.

VRAAG

Trek 'n mond-en-snordiagram vir die volgende datastel.

$$\{1{,}25; 1{,}5; 2{,}5; 2{,}5; 3{,}1; 3{,}2; 4{,}1; 4{,}25; 4{,}75; 4{,}8; 4{,}95; 5{,}1\}$$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die minimum en die maksimum

Aangesien die datastel alreeds georden is, kan ons die minimum aflees as die eerste waarde (1,25) en die maksimum as die laaste waarde (5,1).

Stap 2: Bepaal die kwartiele

Daar is 12 waardes in die datastel. Met gebruik van die persentielformule, bepaal ons dat die mediaan tussen die sesde en sewende waardes lê, wat die volgende gee:

$$\frac{3{,}2 + 4{,}1}{2} = 3{,}65$$

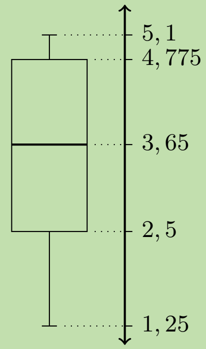
Die eerste kwartiel lê tussen die derde en vierde waardes, wat die volgende gee:

$$\frac{2{,}5 + 2{,}5}{2} = 2{,}5$$

Die derde kwartiel lê tussen die negende en tiende waardes:

$$\frac{4{,}75 + 4{,}8}{2} = 4{,}775$$

Dit gee die vyfgetal opsomming van die datastel en laat ons toe om die volgende mond-en-snordiagram te teken.



Oefening 10 – 6:

1. Lisa werk in 'n rekenaarwinkel. Sy verkoop die volgende aantal rekenaars elke maand:

   $$\{27; 39; 3; 15; 43; 27; 19; 54; 65; 23; 45; 16\}$$

   Gee die vyfgetal opsomming en die mond-en-snordiagram van Lisa se verkope.
2. Zithulele werk as 'n televerkoper. Hy hou 'n rekord van sy verkope elke maand. Die data hieronder toon hoeveel hy elke maand verkoop.

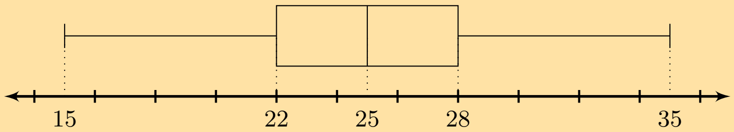
   $$\{49; 12; 22; 35; 2; 45; 60; 48; 19; 1; 43; 12\}$$

   Gee die vyfgetal opsomming en die mond-en-snordiagram van Zithulele se verkope.
3. Nombusa het as 'n bloemis gewerk vir nege maande. Sy verkoop die volgende aantal trouruikers:

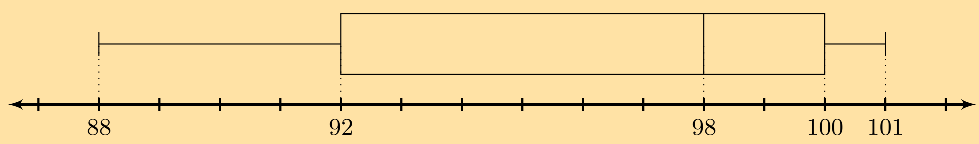
   $$\{16; 14; 8; 12; 6; 5; 3; 5; 7\}$$

   Gee die vyfgetal opsomming vir Nombusa se verkope.
4. Bepaal die vyfgetal opsomming vir elke mond-en-snordiagram hieronder.

   a)



b)



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K95 2. 2K96 3. 2K97 4a. 2K98 4b. 2K99

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.6 Hoofstuk opsomming EMD7D

Sien aanbieding: 2K9B at www.everythingmaths.co.za

- Data verwys na die stukkies inligting wat waargeneem en aangeteken word na aanleiding van 'n eksperiment of 'n opname.
- Kwantitatiewe data is data wat geskryf kan word as getalle. Kwantitatiewe data kan diskreet of kontinu wees.
- Kwalitatiewe data is data wat nie as getalle geskryf kan word nie. Daar is twee algemene tipes kwalitatiewe data: kategoriale en anekdotiese data.
- Die gemiddelde is die som van 'n stel waardes verdeel deur die aantal waardes in die stel.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\end{aligned}$$

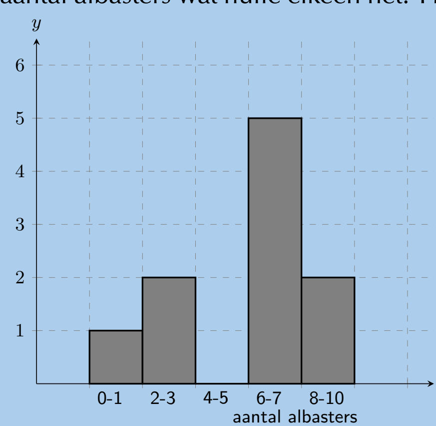
- Die mediaan van die datastel is die waarde in die sentrale posisie wanneer die datastel georden is van die laagste tot die hoogste waarde. As daar 'n onewe aantal datawaardes is, sal die mediaan gelyk wees aan een van die waardes in die datastel. As daar 'n ewe aantal datawaardes is, sal die mediaan halfpad tussen twee waardes in die datastel lê.
- Die modus van 'n datastel is die waarde wat die meeste kere voorkom in die stel.
- 'n Uitskieter is 'n waarde in die datastel wat nie tipies is van die res van die stel nie. Dit is gewoonlik 'n waarde wat baie groter of baie kleiner is as al die ander waardes in die datastel.
- Kontinue kwantitatiewe data kan gegroepeer word deur die volle omvang van die datawaardes te groepeer in 'n paar sub-intervalle. Deur elk van die kontinue waardes toe te ken aan 'n sub-interval of 'n klas waarbinne dit val, verander die datastel van kontinu na diskreet.
- Verspreiding is die algemene term vir verskillende statistiese tegnieke wat beskryf hoe die waardes versprei is rondom die middel.
- Die omvang van 'n datastel is die verskil tussen die maksimum en minimumwaardes in die stel.
- Die p^{de} persentiel is die waarde, v, wat die data verdeel in twee dele, sodat $p\%$ van die waardes in die datastel minder is as v en $100 - p\%$ van die waardes groter is as v. Die algemene formule om die p^{de} persentiel te vind in 'n geordende datastel van n waardes is

$$r = \frac{p}{100}(n-1) + 1$$

- Die kwartiele is die drie datawaardes wat die geordende datastel verdeel in vier groepe, waar elke groep 'n gelyke aantal datawaardes bevat. Die eerste kwartiel word genoteer as Q_1, die mediaan is Q_2 en die boonstel kwartiel is Q_3.
- Die interkwartielomvang is die maatstaf van verspreiding wat bereken word deur die laer (eerste) kwartiel af te trek van die boonste (derde) kwartiel. Dit gee die omvang van die middelste helfte van die datastel.
- Die semi-interkwartielomvang is die helfte van die interkwartielomvang.
- Die vyfgetal opsomming bestaan uit die minimumwaarde, die maksimumwaarde en die drie kwartiele (Q_1, Q_2 en Q_3).
- Die mond-en-snordiagram is 'n grafiese voorstelling van die vyfgetal opsomming.

End of chapter Exercise 10 – 7:

1. Die volgende datastel van lengtes is ingesamel van 'n klas van leerders.
   {1,70 m; 1,41 m; 1,60 m; 1,32 m; 1,80 m; 1,40 m}
   Kategoriseer die datastel.
2. Die volgende datastel van toebroodjiesmere is ingesamel van leerders by middagete.
   {kaas; grondboontjiebotter; konfyt; kaas; heunig}
   Kategoriseer die datastel.
3. Bereken die **modus** van die volgende datastel: $\{10; 10; 10; 18; 7; 10; 3; 10; 7; 10; 7\}$
4. Bereken die **mediaan** van die volgende datastel: $\{5; 5; 10; 7; 10; 2; 16; 10; 10; 10; 7\}$
5. In 'n park het die hoogste 7 bome hoogtes (in meter) van: $\{41; 60; 47; 42; 44; 42; 47\}$
   Vind die mediaan van hulle hoogtes.
6. Die leerders in Ndeme se klas het die volgende ouderdomme: $\{5; 6; 7; 5; 4; 6; 6; 6; 7; 4\}$
   Vind die modus van hulle ouderdomme.
7. 'n Groep van 7 vriende het elkeen 'n paar lekkers. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle het, 6 is. Dan gee 4 vriende pad met 'n onbekende aantal (x) lekkers. Die oorblywende 3 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle oor het, 10,67 is. Toe die 4 vriende padgegee het, hoeveel lekkers het hulle met hulle saamgeneem?
8. 'n Groep van 10 vriende het elkeen 'n paar lekkers. Hulle bereken dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle het, 3 is. Dan vertrek 5 vriende met 'n onbekende aantal (x) lekkers. Die oorblywende 5 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle oor het, 3 is. Toe die 5 vriende vertrek het, hoeveel lekkers het hulle met hulle saamgeneem?
9. Vyf datawaardes word as volg voorgestel: $3x; x+2; x–3; x+4; 2x–5$, met 'n gemiddelde van 30. Los op vir x.
10. Vyf datawaardes word as volg voorgestel: $p+1; p+2; p+9$. Vind die gemiddelde terme van p.
11. 'n Groep van 10 leerders tel die aantal albasters wat hulle elkeen het. Hierdie histogram beskryf die data wat hulle ingesamel het:



Tel die aantal albasters in die volgende interval: 0 ≤ aantal albasters ≤ 1

12. ’n Groep van **20** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel:

12	1	5	4	17
14	7	5	1	3
9	4	12	17	5
19	1	19	7	15

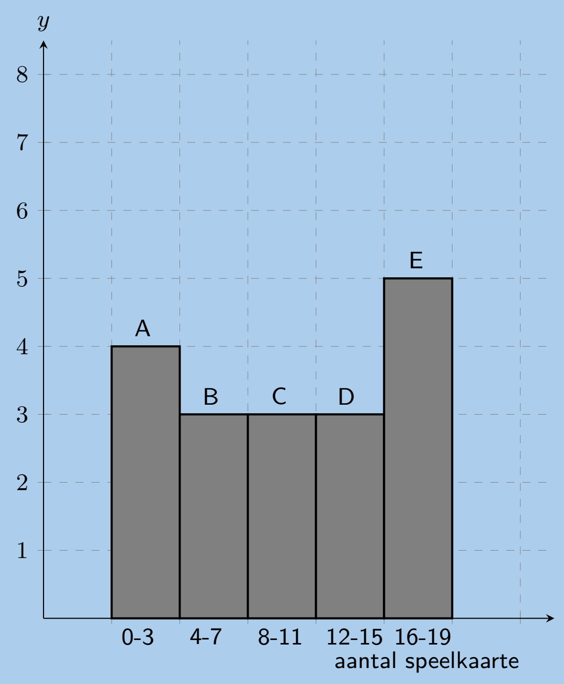
Tel die aantal leerders wat van 0 tot 3 kaarte het. Met ander woorde, hoeveel leerders het speelkaarte in die volgende interval: $0 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 3? Dit mag handig wees om ’n histogram te teken om die vraag te beantwoord.

13. ’n Groep van **20** leerders tel die muntstukke wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

17	11	1	15	14
3	4	18	5	14
18	19	4	18	15
16	13	20	8	18

Tel die aantal leerders wat van 4 tot 7 muntstukke het. Met ander woorde, hoeveel leerders het munte in die volgende interval: $4 \leq$ aantal munte ≤ 7? Dit mag help om ’n histogram te teken om hierdie vraag te beantwoord.

14. ’n Groep van 20 leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Die leerders teken ’n histogram wat die data voorstel wat hulle ingesamel het. Maar, hulle het ’n fout gemaak met die teken van die histogram.

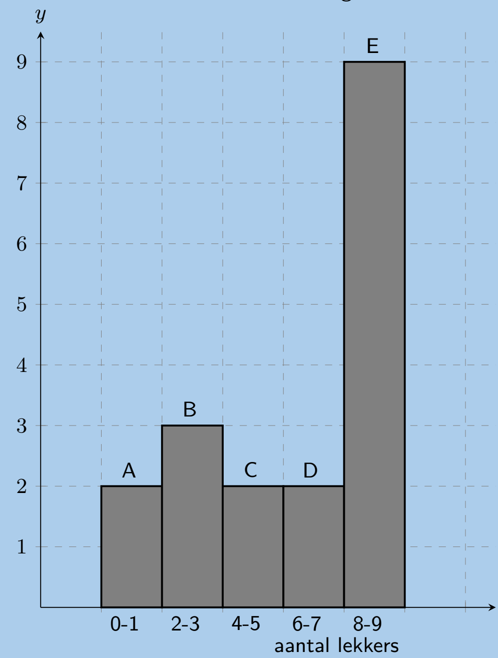


Die datastel hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal speelkaarte wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal speelkaarte vir een leerder.

$$\{18; 10; 3; 2; 19; 15; 2; 13; 11; 14; 10; 3; 5; 9; 4; 18; 11; 18; 16; 5\}$$

Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

15. ’n Groep van 10 leerders tel die aantal lekkers wat elkeen het. Hulle teken ’n histogram wat die data voorstel. Hulle maak egter ’n fout in die teken van die histogram.

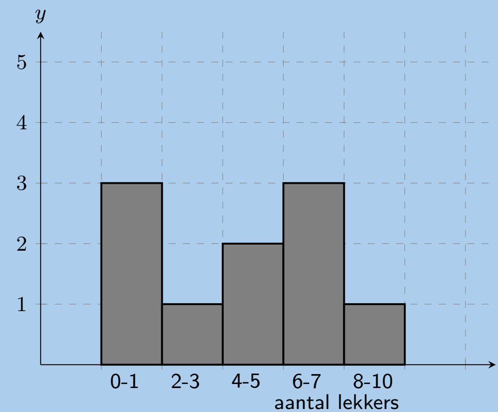


Die datastel hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal lekkers wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal lekkers vir een leerder.

$$\{1; 3; 7; 4; 5; 8; 2; 2; 1; 7\}$$

Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

16. ’n Groep leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is ’n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



’n Skoonmaker stamp per ongeluk hulle tafel om en al hulle notas land in ’n deurmekaarspul op die vloer!

Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle pas by die histogram:

Datastel A

1	8	4	8	8	6	1	5	7	5

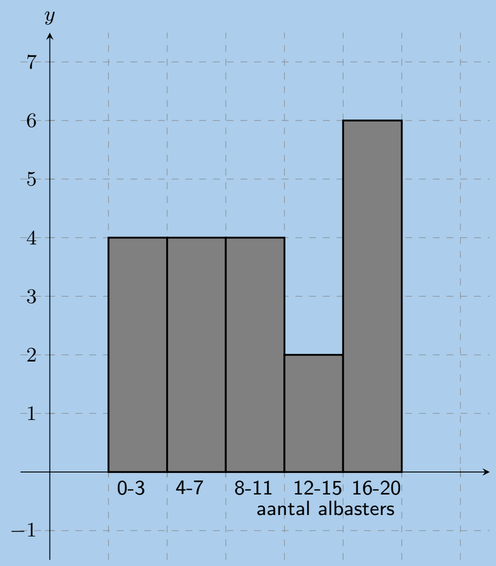
Datastel B

5	6	9	2	1	6	6	4	4	6

Datastel C

7	2	4	1	5	1	1	7	8	6

17. ’n Groep leerders tel die albasters wat hulle het. Hier is ’n histogram wat die data beskryf.



’n Kat spring per ongeluk op die tafel en al hulle notas land deurmekaar op die vloer.
Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle pas by die histogram:

Datastel A

7	13	15	13	12
13	8	14	3	15
1	7	4	11	1

Datastel B

17	1	5	4	11
13	6	19	6	20
19	1	14	9	17
3	16	3	10	10

Datastel C

10	3	5	5	6
5	2	1	4	3

18. ’n Groep van **20** leerders tel die hoeveelheid albasters wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel.

11	8	17	13	9
12	2	6	15	7
14	15	1	6	6
13	19	9	6	19

Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.

19. ’n Groep van**15** leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

5	13	4	15	5
6	1	3	13	13
15	14	7	2	4

Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.

20. 'n Ingenieursfirma het twee verskillende tipes enjins vir motorfietse ontwerp. Die twee verskillende motorfietse word getoets vir die tyd (in sekondes) wat dit neem om te versnel van 0 km·h^{-1} tot 60 km·h^{-1}.

Toets	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Motorfiets 1	1,55	1,00	0,92	0,80	1,49	0,71	1,06	0,68	0,87	1,09
Motorfiets 2	0,9	1,0	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9	1,1

a) Watter maatstaf van sentrale neiging behoort mens te gebruik vir hierdie inligting?

b) Bereken die maatstaf van sentrale neiging wat jy gekies het in die vorige vraag, vir elke motorfiets.

c) Watter motorfiets sal jy kies, gebaseer op hierdie inligting? Let op die akkuraatheid van die getalle van elke stel toetse.

21. In 'n verkeersopname word 'n willekeurige monster van 50 motoriste gevra watter afstand hulle elke dag werk toe ry. Hierdie inligting word getoon in die tabel hieronder.

Afstand (km)	**Telling**
$0 < d \leq 5$	4
$5 < d \leq 10$	5
$10 < d \leq 15$	9
$15 < d \leq 20$	10
$20 < d \leq 25$	7
$25 < d \leq 30$	8
$30 < d \leq 35$	3
$35 < d \leq 40$	2
$40 < d \leq 45$	2

a) Vind die benaderde gemiddelde van die data.

b) Watter persentasie motoriste het 'n afstand van

i. minder as of gelyk aan 15 km?

ii. meer as 30 km?

iii. tussen 16 km en 30 km?

c) Teken 'n histogram om die data voor te stel.

22. 'n Maatskappy wil die opleidingsprogram in sy fabriek evalueer. Hulle gee dieselfde taak aan opgeleide en onopgeleide werknemers en neem elkeen se tyd in sekondes.

Opgeleide	121	137	131	135	130
	128	130	126	132	127
	129	120	118	125	134
Onopgeleide	135	142	126	148	145
	156	152	153	149	145
	144	134	139	140	142

a) Vind die mediane en die kwartiele vir beide stelle data.

b) Vind die interkwartielomvang vir beide stelle data.

c) Lewer kommentaar op die resultate.

d) Trek 'n mond-en-snordiagram vir elke datastel om die vyfgetal opsomming te illustreer.

23. 'n Klein firma neem 9 mense in diens. Die jaarlikse salarisse van die werknemers is:

R 600 000	R 250 000	R 200 000
R 120 000	R 100 000	R 100 000
R 100 000	R 90 000	R 80 000

a) Vind die gemiddelde van hierdie salarisse.

b) Vind die modus.

c) Vind die mediaan.

d) Watter een van hierdie drie syfers sal jy gebruik vir onderhandelings vir salarisverhogings as jy 'n vakbond beampte was? Hoekom?

24. Die stingel-en-blaardiagram hieronder dui die polsslag per minuut van tien Graad 10 leerders aan.

7	8			
8	1	3	5	5
9	0	1	1	
10	3	5		

Sleutel: $7|8 = 78$

a) Bepaal die gemiddelde en die omvang van die data.

b) Gee die vyfgetal opsomming en teken 'n mond-en-snordiagram vir die data.

25. Die volgende is 'n lys van data: $3; 8; 8; 5; 9; 1; 4; x$

In elke afsonderlike geval, bepaal die waarde van x as die:

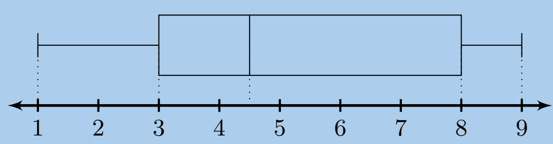
a) omvang = 16

b) modus = 8

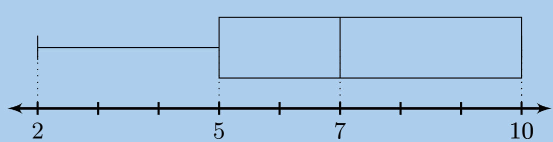
c) mediaan = 6

d) gemiddelde = 6

e) mond-en-snordiagram



26. Skryf een lys van getalle neer wat die mond-en-snordiagram hieronder bevredig:



27. Gegee Φ (wat verteenwoordig die goue verhouding) tot 20 desimale plekke: 1,61803398874989484820

a) Vir die eerste 20 desimale plekke vir (Φ), bepaal die:

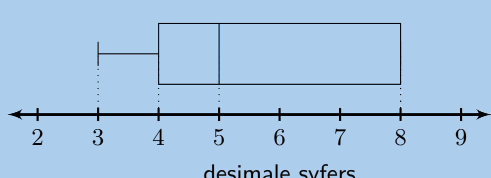
i. mediaan

ii. modus

iii. gemiddelde

b) As die gemiddeld van die eerste 21 desimale syfers van (Φ), 5,38095 is, bepaal die 21$^{\text{ste}}$ desimale syfer.

c) Hieronder is 'n mond-en-snordiagram van die 21$^{\text{ste}}$ - 27$^{\text{ste}}$ desimale syfers. Skryf een lys van getalle neer wat hierdie mond-en-snordiagram bevredig.



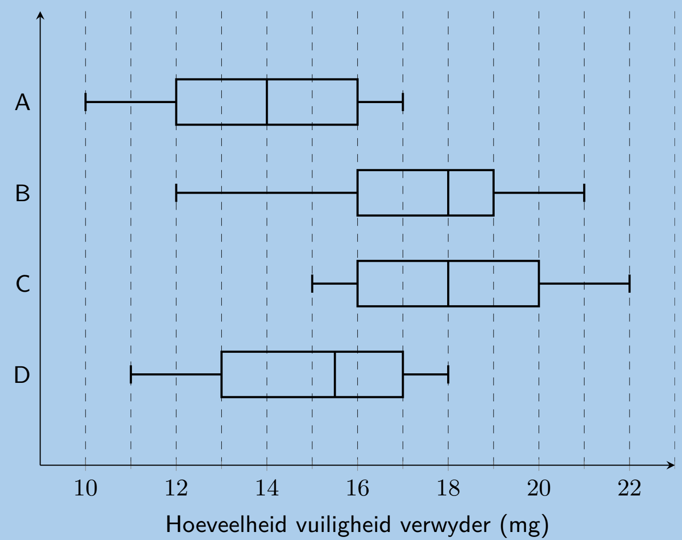
28. Daar werk 14 mans by 'n fabriek. Hulle ouderdomme is: $22; 25; 33; 35; 38; 48; 53; 55; 55; 55; 55; 56; 59; 64$

a) Skryf die vyfgetal opsomming neer.

b) As 3 mans afgedank moet word, maar die mediaan moet dieselfde bly, toon die ouderdomme van die 3 mans wat jy sou afdank.

c) Vind die gemiddelde ouderdom van die mans in die fabriek deur die oorspronklike data te gebruik.

29. Die voorbeeld toon 'n vergelyking tussen die hoeveelheid vuiligheid wat verwyder word deur vier verskillende soorte skoonmaakmiddels (tipes A tot D).



a) Watter tipes het die grootste omvang en wat is hierdie omvang?

b) Wat verteenwoordig die getal 18 mg vir tipe C?

c) Gee die interkwartielwydte vir tipe B.

d) Watter soort skoonmaakmiddel sou jy koop? Verduidelik jou antwoord.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K9C	2. 2K9D	3. 2K9F	4. 2K9G	5. 2K9H	6. 2K9J
7. 2K9K	8. 2K9M	9. 2K9N	10. 2K9P	11. 2K9Q	12. 2K9R
13. 2K9S	14. 2K9T	15. 2K9V	16. 2K9W	17. 2K9X	18. 2K9Y
19. 2K9Z	20. 2KB2	21. 2KB3	22. 2KB4	23. 2KB5	24. 2KB6
25. 2KB7	26. 2KB8	27. 2KB9	28. 2KBB	29. 2KBC	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 11

Trigonometrie

Trigonometrie is in antieke beskawings ontwikkel om praktiese probleme, soos boukonstruksies en navigering deur die sterre, op te los. Ons gaan wys dat trigonometrie ook gebruik kan word om sekere praktiese probleme op te los. Ons kan die trigonometriese verhoudings gebruik vir die oplos van twee-dimensionele probleme wat reghoekige driehoeke insluit.

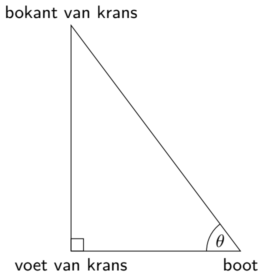
Vir hersiening kan ons die drie trigonometriese verhoudings as volg definieer vir reghoekige driehoeke:

$$\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \quad \cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \quad \tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

Ons sal hierdie drie verhoudings en die stelling van Pythagoras gebruik om ons te help om twee-dimensionele probleme op te los.

11.1 Twee-dimensionele probleme EMD7F

In twee-dimensionele probleme sal ons dikwels verwys na die hoogtehoek en die dieptehoek. Om hierdie twee hoeke te verstaan, kan ons dink aan 'n persoon wat verbyseil teen die voet van 'n krans langs. Die persoon kyk op en sien die bopunt van die kranse soos hieronder getoon:



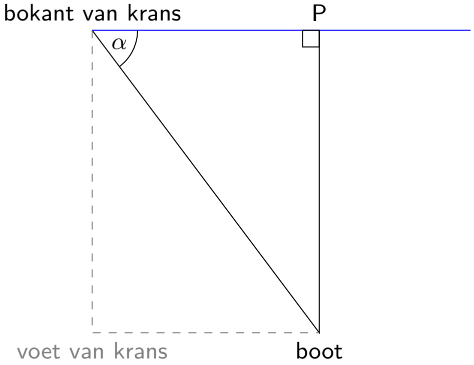
In hierdie diagram is θ die hoogtehoek.

DEFINISIE: *Hoogtehoek*

Die hoogtehoek is die hoek wat gevorm word deur die lyn van sig en die horisontale vlak vir 'n voorwerp bokant die horisontale vlak.

In ons diagram is die lyn van sig vanaf die skip na die top van die krans. Die horisontale vlak is vanaf die skip na die voet van die krans. Let ook daarop dat ons die krans kan beskou as 'n reguit vertikale lyn en dus het ons 'n reghoekige driehoek.

Om die dieptehoek te verstaan, beskou ons dieselfde situasie as vantevore maar ons waarnemer staan nou op die bopunt van die krans en kyk af na die skip.



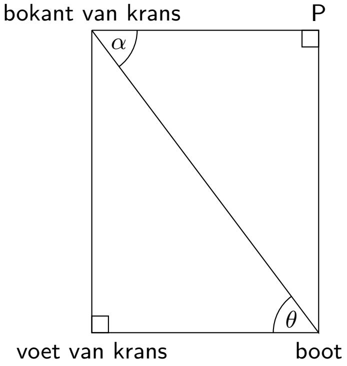
In hierdie diagram is α die dieptehoek.

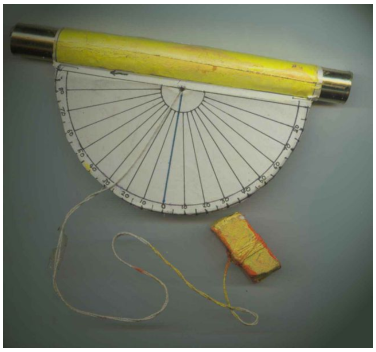
DEFINISIE: *Dieptehoek*

Die dieptehoek is die hoek wat gevorm word deur die lyn van sig en die horisontale vlak vir 'n voorwerp onder die horisontale vlak.

In ons diagram is die lyn van sig vanaf die bopunt van die krans na die skip. Die horisontale vlak is van die top van die krans deur P. Let op dat hierdie vlak ewewydig is aan die lyn tussen die voet van die krans en die skip. P lê direk bokant die skip. Ons kan 'n vertikale lyn konstrueer, loodreg op die lyn na die horisontale vlak by die punt P.

Uiteindelik kan ons die hoogtehoek en die dieptehoek vergelyk. In die volgende diagram is die lyn van die voet van die krans na die skip ewewydig aan die lyn van die bopunt van die krans na P. Die hoogtehoek en die dieptehoek is aangedui. Let op dat $\alpha = \theta$.





Figuur 11.1: 'n Hoekmeter, in Engels "inclinometer". 'n Hoekmeter kan gebruik word om hoogtehoeke te meet en kan gebruik word om die hoogte van 'n voorwerp te bepaal.

BESOEK:
Jy kan 'n hoekmeter maak om die hoogtehoek te meet van 'n hoë gebou of 'n boom. Wanneer jy die hoogtehoek het, kan jy die hoogte van die gebou of die boom bepaal.

NOTA:
In trigonometrie is die hoogtehoek net so groot as die dieptehoek.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Vlieg 'n vlieër

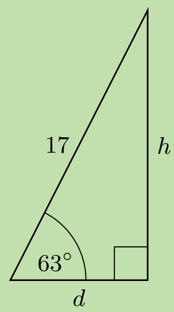
VRAAG

Mandla vlieg 'n vlieër aan 'n 17 m tou teen 'n hoogtehoek van 63°.

1. Wat is die hoogte, h, van die vlieër bokant die grond?
2. As Mandla se vriend, Sipho, direk onder die vlieër staan, bereken die afstand, d, tussen die twee vriende.

OPLOSSING

Stap 1: Maak 'n skets en identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy.



Stap 2: Gebruik gegewe inligting en toepaslike verhoudings om vir h en d op te los

1.

$$\begin{aligned}\sin 63° &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 63° &= \frac{h}{17}\\ \therefore h &= 17\sin 63°\\ &= 15{,}14711...\\ &\approx 15{,}15 \text{ m}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\cos 63° &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}\\ \cos 63° &= \frac{d}{17}\\ \therefore d &= 17\cos 63°\\ &= 7{,}7178...\\ &\approx 7{,}72 \text{ m}\end{aligned}$$

Let daarop dat die derde sy van die driehoek ook bereken kan word met die gebruik van die stelling van Pythagoras: $d^2 = 17^2 - h^2$.

Stap 3: Skryf die finale antwoorde

1. Die vlieër is 15,15 m bokant die grond.
2. Mandla en Sipho is 7,72 m van mekaar af.

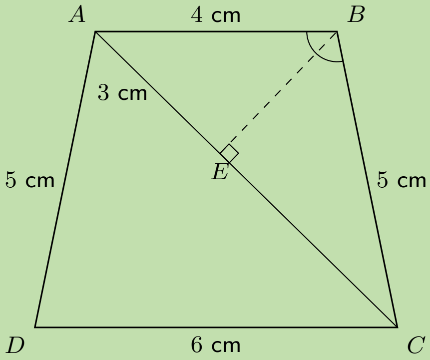
Uitgewerkte voorbeeld 2: Bereken hoeke

VRAAG

$ABCD$ is 'n trapesium met $AB = 4$ cm, $CD = 6$ cm, $BC = 5$ cm en $AD = 5$ cm. Punt E op hoeklyn AC verdeel die hoeklyn op so 'n manier dat $AE = 3$ cm. $B\hat{E}C = 90°$. Vind $A\hat{B}C$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken die trapesium en dui alle gegewe lengtes op die diagram aan. Toon aan dat $B\hat{E}C$



Ons sal gebruik $\triangle ABE$ en $\triangle CBE$ om die twee hoeke by $\hat{B}$ te vind. Ons kan dan tel hierdie twee hoeke op om uit te vind $A\hat{B}C$

Stap 2: Bereken die eerste hoek, $A\hat{B}E$

Die skuinssy en teenoorstaande sy word gegee vir beide driehoeke, dus gebruik ons die $\sin$ verhouding.

In $\triangle ABE$:

$$\begin{aligned}\sin A\hat{B}E &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\\ &= \frac{3}{4}\\ A\hat{B}E &= 48{,}5903\ldots\\ &\approx 48{,}6°\end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die stelling van Pythagoras om BE te bepaal

In $\triangle ABE$:

$$\begin{aligned}BE^2 &= AB^2 - AE^2\\ &= 4^2 - 3^2\\ &= 7\\ \therefore BE &= \sqrt{7}\text{cm}\end{aligned}$$

Stap 4: Vind die tweede hoek $C\hat{B}E$

In $\triangle CBE$:

$$\begin{aligned}\cos C\hat{B}E &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}\\ &= \frac{\sqrt{7}}{5}\\ &= 0{,}52915\ldots\\ C\hat{B}E &= 58{,}0519\ldots\\ &\approx 58{,}1°\end{aligned}$$

Stap 5: Bereken die som van die hoeke

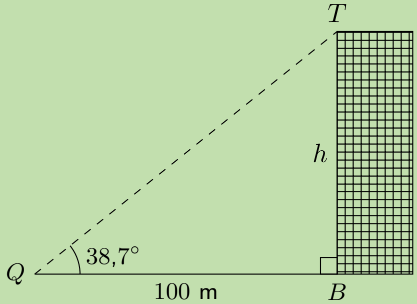
$$A\hat{B}C = 48{,}6° + 58{,}1° = 106{,}7°$$

'n Ander toepassing is om trigonometrie te gebruik om die hoogte van 'n gebou te vind. Ons kan 'n maatband laat afhang van die dak, maar dit is onprakties (en gevaarlik) vir hoë geboue. Dit is baie meer sinvol om trigonometrie te gebruik.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Vind die hoogte van 'n gebou

VRAAG

Die gegewe diagram toon 'n gebou van onbekende hoogte h. Ons begin by punt B en stap 100 m weg van die gebou na punt Q. Vervolgens meet ons die hoogtehoek van die grond na die top van die gebou, T, en vind die hoek is 38,7°. Bereken die hoogte van die gebou, korrek tot die naaste meter.



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en skuinssy

Ons het 'n reghoekige driehoek en weet wat is die lengte van een sy en die grootte van een hoek. Ons kan gevolglik die hoogte van die gebou bereken.

Stap 2:

In $\triangle QTB$:

$$\begin{aligned} \tan 38{,}7° &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} \\ &= \frac{h}{100} \end{aligned}$$

Stap 3: Herrangskik en los op vir h

$$\begin{aligned} h &= 100 \times \tan 38{,}7° \\ &= 80{,}1151... \\ &\approx 80 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

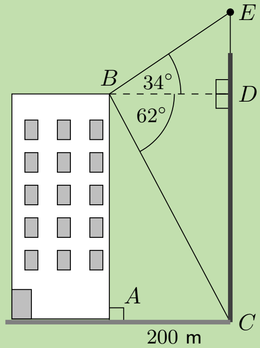
Die hoogte van die gebou is 80 m.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Hoogtehoeke en dieptehoeke

VRAAG

'n Woonstelblok is 200 m weg van 'n selfoontoring. Iemand staan by B. Hulle meet dat die hoek van B na die bopunt van die toring (E), (die hoogtehoek) 34° is. Hulle meet dan dat die hoek B na die voet van die toring (C) (die dieptehoek), 62°is.

Hoe hoog is die selfoontoring (korrek tot die naaste meter)?



Let op: die diagram is nie op skaal geteken nie

OPLOSSING

Stap 1: Om die hoogte CE te bepaal, bereken eers lengtes DE en CD

$\triangle BDE$ en $\triangle BDC$ is beide reghoekige driehoeke. In elk van die driehoeke is die lengte BD bekend. Dus kan ons die sye van die driehoeke bereken.

Stap 2: Bereken CD

Die lengte AC is gegee. $CABD$ is reghoek, dus $BD = AC = 200$ m.

In $\triangle CBD$:

$$\begin{aligned} \tan C\hat{B}D &= \frac{CD}{BD} \\ \therefore CD &= BD \times \tan C\hat{B}D \\ &= 200 \times \tan 62° \\ &= 376{,}1452... \\ &\approx 376 \text{ m} \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken DE

In $\triangle DBE$:

$$\begin{aligned} \tan D\hat{B}E &= \frac{DE}{BD} \\ \therefore DE &= BD \times \tan D\hat{B}E \\ &= 200 \times \tan 34° \\ &= 134{,}9017... \\ &\approx 135 \text{ m} \end{aligned}$$

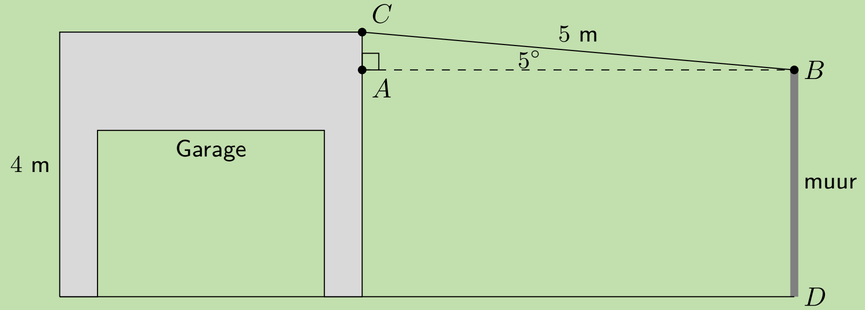
Stap 4: Tel die twee hoogtes bymekaar om die finale antwoord te kry

Die hoogte van die toring is: $CE = CD + DE = 135 \text{ m} + 376 \text{ m} = 511$ m.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Bouplan

VRAAG

Mnr Nkosi het 'n garage by sy huis en hy besluit om 'n sinkdak aan te las aan die sykant van die garage. Die garage is 4 m hoog en sy sinkplaat vir die dak is 5 m lank. As die hoek van die dak 5° is, hoe hoog moet hy muur BD bou? Gee die korrekte antwoord tot 1 desimale plek.



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer teenoorstaande en aangrensende sye en skuinssy

$\triangle ABC$ is reghoekig. Die skuinssy en 'n hoek is bekend en dus kan ons AC bereken. Die hoogte van muur BD is dan die hoogte van die garage minus AC.

$$\begin{aligned}\sin A\hat{B}C &= \frac{AC}{BC}\\ \therefore AC &= BC \times \sin A\hat{B}C\\ &= 5\sin 5°\\ &= 0{,}43577...\\ &\approx 0{,}4 \text{ m}\end{aligned}$$

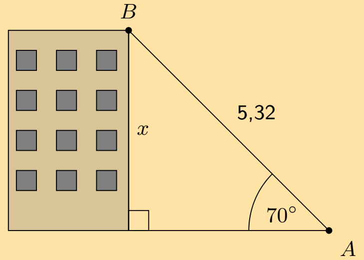
$$\begin{aligned}\therefore BD &= 4 \text{ m} - 0{,}4 \text{ m}\\ &= 3{,}6 \text{ m}\end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord

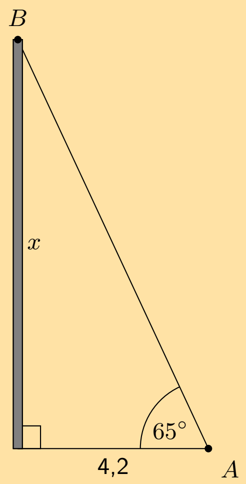
Mnr Nkosi moet sy muur 3,6 m hoog bou.

Oefening 11 – 1:

1. 'n Persoon staan by punt A, en kyk op na 'n voëltjie wat bo-op 'n gebou, by punt B, sit.
   Die hoogte van die gebou is x meter, die lengte van die lyn van sig vanaf punt A na die bopunt van die gebou (punt B) is 5,32 meter, en die hoogtehoek na die bopunt van die gebou is $70°$.
   Bereken die hoogte van die gebou (x) soos getoon in die diagram hieronder:



2. 'n Persoon staan by punt A, en kyk op na 'n voëltjie wat op die bopunt van 'n paal sit (punt B). Die hoogte van die paal is x meter, punt A is 4,2 meter weg van die voet van die paal en die hoogtehoek na die bopunt van die paal is $65°$.
   Bereken die hoogte van die paal (x), tot die naaste meter.



3. 'n Seun wat 'n vlieër vlieg, staan 30 m vanaf 'n punt direk onder die vlieër. As die vlieër se tou 50 m lank is, vind die hoogtehoek van die vlieër.
4. Wat is die hoogtehoek van die son wanneer 'n boom, wat 7,15 m hoog is, 'n skaduwee van 10,1 m lank gooi?
5. Susan kyk op na die top van 'n vuurtoring van 'n afstand van 300 m. Die hoogtehoek is 5°. Bepaal die hoogte van die vuurtoring tot die naaste meter.
6. 'n Leer wat 25 m lank is, rus teen 'n muur en maak 'n hoek van 37° met die muur. Vind die afstand tussen die muur en die voet van die leer tot die naaste meter.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KBD 2. 2KBF 3. 2KBG 4. 2KBH 5. 2KBJ 6. 2KBK

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

11.2 Hoofstuk opsomming EMD7G

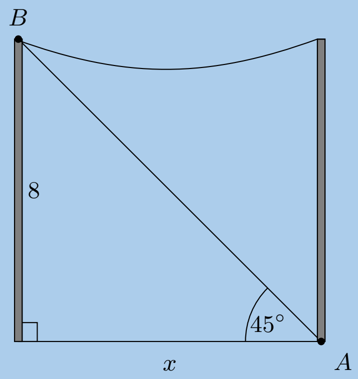
Sien aanbieding: 2KBM at www.everythingmaths.co.za

- Ons kan die drie trigonometriese verhoudings vir reghoekige driehoeke definieer: sinus $(\sin)$, cosinus $(\cos)$ en tangens $(\tan)$.
- Trigonometrie word gebruik in die oplossing van twee-dimensionele probleme wat reghoekige driehoeke insluit, soos byvoorbeeld die bepaling van die hoogte van 'n gebou.
- Die hoogtehoek is die hoek wat gevorm word deur die lyn van sig en die horisontale vlak vir 'n voorwerp bokant die horisontale vlak.
- Die dieptehoek is die hoek wat gevorm word deur die lyn van sig en die horisontale vlak vir 'n voorwerp onder die horisontale vlak.

End of chapter Exercise 11 – 2:

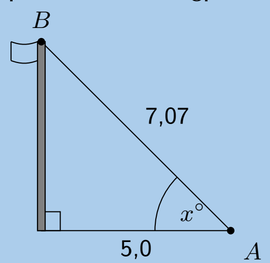
1. 'n Leer van 15 m rus teen 'n muur en die voet van die leer is 5 m van die muur af. Vind die hoek tussen die muur en die leer.
2. Kaptein Jack seil in die rigting van 'n krans met 'n hoogte van 10 m.
   a) Die afstand vanaf die boot na die voet van die krans is 30 m. Bereken die hoogtehoek vanaf die boot na die bopunt van die krans (korrek tot die naaste graad).
   b) As die boot 7 m nader aan die krans seil, wat is die nuwe hoogtehoek vanaf die boot na die bopunt van die krans?
3. Jim staan by punt A by die voet van 'n telefoonpaal en kyk op na 'n voëltjie wat op die bopunt van 'n ander telefoonpaal sit (punt B). Die hoogte van elk van die telefoonpale is 8 meter, en die hoogtehoek na die top van die telefoonpaal is $45°$.

   Bereken die afstand tussen die telefoonpale (x) soos getoon in die diagram hieronder:

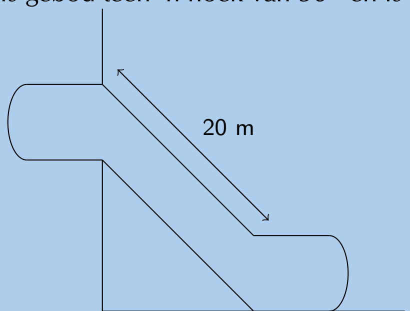


4. Alfred staan by punt A en kyk op na 'n vlag aan 'n paal (punt B). Punt A is 5,0 meter weg van die voet van die vlagpaal, die afstand van die lyn van sig vanaf punt A na die bopunt van die vlagpaal (punt B) is 7,07 meter, en die hoogtehoek na die bopunt van die vlagpaal is $x°$.

   Bereken die hoogtehoek na die bopunt van die vlagpaal (x) soos getoon in die diagram hieronder:

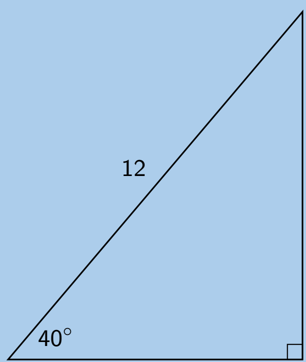


5. 'n Rugbyspeler probeer 'n bal oor die dwarsbalk en tussen die pale deurskop. Die dwarsbalk is 3,4 m hoog. Die bal word reg voor die pale, 24 m vanaf die pale gestel. Wat is die minimumhoek waarteen hy die bal moet lig om dit oor die dwarsbalk te skop?
6. Die roltrap by 'n inkopiesentrum is gebou teen 'n hoek van 30° en is 20 m lank



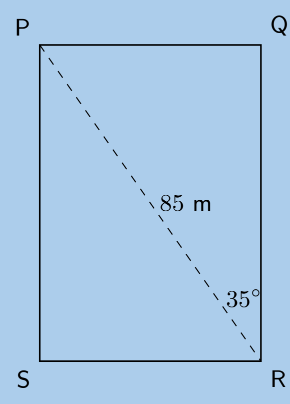
   Deur watter vertikale hoogte sal 'n persoon opwaarts gelig word met die roltrap?

7. ’n Leer is 8 meter lank. Dit leun teen die muur van ’n huis en kom tot by ’n hoogte van 6 meter teen die muur op.
   a) Teken ’n skets van die situasie.
   b) Bereken die hoek wat die leer maak met die plat (gelyk) grond.
8. Nandi staan op plat grond 70 meter weg van ’n hoë toring. Van haar posisie is die hoogtehoek na die bopunt van die toring 38°.
   a) Teken ’n skets van die situasie.
   b) Wat is die hoogte van die toring?
9. Die bopunt van ’n paal is geanker met ’n 12 m kabel wat ’n hoek van 40 grade maak met die horisontaal. Hoe hoog is die paal?

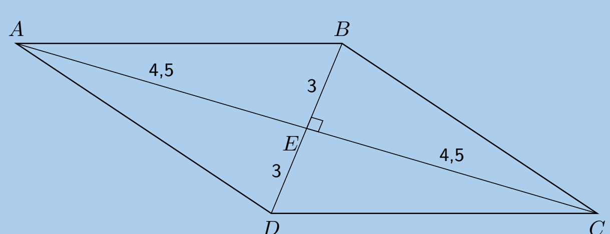


10. ’n Skip se navigator kyk na ’n vuurtoring op ’n krans. Volgens die navigasiekaarte is die bopunt van die vuurtoring 35 meter bokant seevlak. Sy meet dat die hoogtehoek na die bopunt van die vuurtoring 0,7° is.

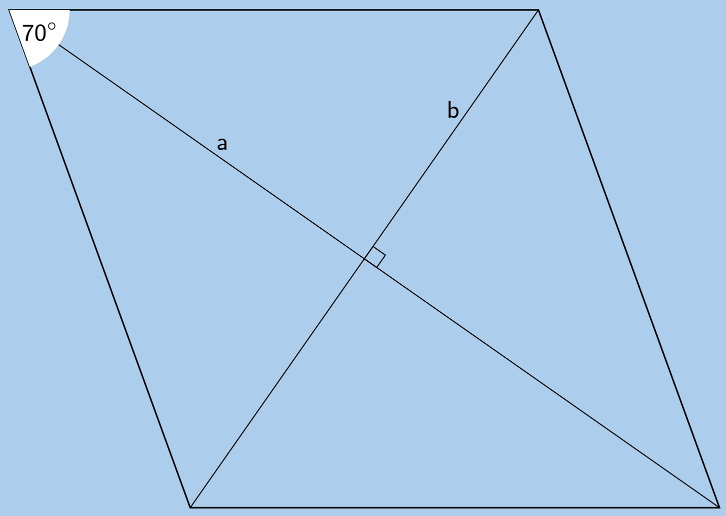
    Skepe word aangeraai om ten minste 4 km van die kus af te bly. Is hierdie skip veilig?
11. Bepaal die omtrek van die reghoek $PQRS$:



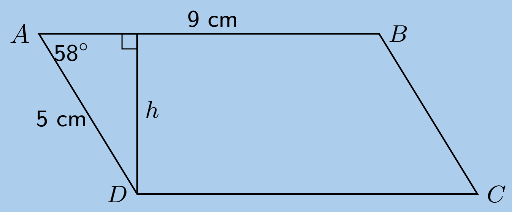
12. ’n Ruit se hoeklyne is 6 cm en 9 cm lank. Bereken die groottes van die binnehoeke.



13. 'n Ruit het sylengtes van 7 cm. Die skerp binnehoeke is elk 70°. Bereken die lengtes van beide die hoeklyne.



14. 'n Parallelogram het sye van 5 cm en 9 cm onderskeidelik, en 'n hoek van 58° tussen hulle. Bereken die loodregte afstand tussen die twee langer sye.



15. Een van die hoeke van 'n ruit met omtrek 20 cm is 30°.

    a) Vind die lengte van sye van die ruit.
    b) Vind die lengtes van beide hoeklyne.

16. Regop stokke en die skaduwees wat hulle gooi, kan gebruik word om die benaderde hoogte van die son in die lug (die hoek wat die son maak met die horisontaal) en die hoogte van voorwerpe te bepaal.

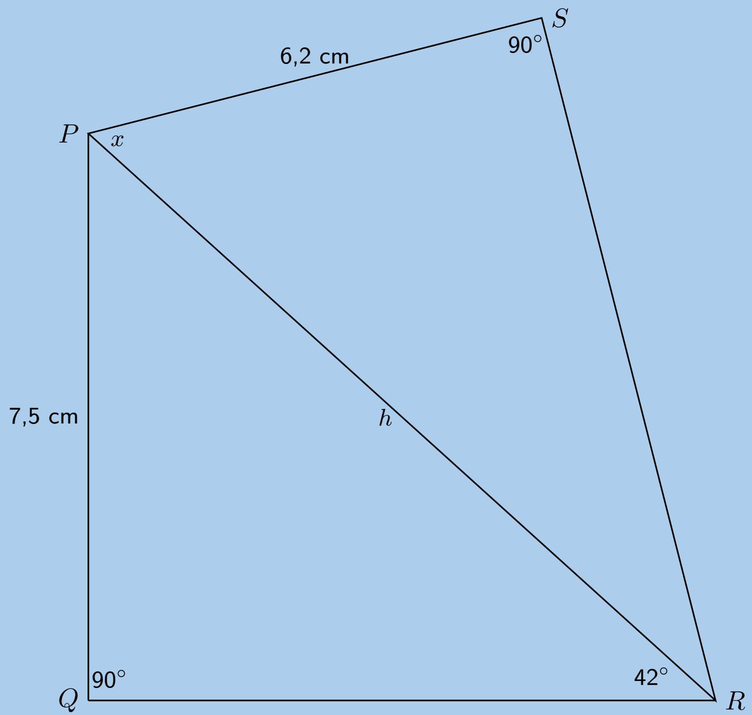
    a) 'n Regop stok, 1 meter hoog, gooi 'n skaduwee van 1,35 meter. Wat is die hoogtehoek van die son?
    b) Die skaduwee van 'n gebou is 47 meter lank, op dieselfde tydstip. Hoe hoog is die gebou?

17. Die hoogtehoek van 'n warmlugballon, wat vertikaal klim, verander van 25 grade teen 11:00 vm tot 60 grade teen 11:02 vm. Die waarnemingspunt waarvandaan die hoogtehoek gemeet word, is 300 meter van die punt waar die lugballon begin opstyg het.

    a) Teken 'n skets van die situasie.
    b) Bereken die toename in hoogte tussen 11:00 en 11:02 vm.

18. Wanneer die toppunt van 'n berg, T, beskou word vanaf punt A, 2000 m van die grond af, is die dieptehoek (a) 15°. Wanneer dit beskou word vanaf B op die grond, is die hoogtehoek (b) 10°. As punte A en B in dieselfde vertikale vlak lê, vind h, die hoogte van die berg. Rond jou antwoord af tot een desimale plek.

19. Die diagram hieronder toon vierhoek $PQRS$, met $PQ =$ 7,5 cm, $PS =$ 6,2 cm, en hoek $R = 42°$, en hoeke S en Q is regte hoeke.



a) Vind PR, korrek tot 2 desimale plekke.

b) Vind die grootte van hoek x, korrek tot een desimale plek.

20. Vanaf (S), 'n boot op die see, is die hoogtehoek na die bopunt van 'n vuurtoring PQ op 'n rots, QR, 27°. Die vuurtoring is 10 m hoog en die rotspunt is 75 m bokant seevlak..
Hoe ver is die boot vanaf die basis van die rots, tot die naaste meter?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KBN	2. 2KBP	3. 2KBQ	4. 2KBR	5. 2KBS	6. 2KBT
7. 2KBV	8. 2KBW	9. 2KBX	10. 2KBY	11. 2KBZ	12. 2KC2
13. 2KC3	14. 2KC4	15. 2KC5	16. 2KC6	17. 2KC7	18. 2KC8
19. 2KC9	20. 2KCB				

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 12

Euklidiese meetkunde

Meetkunde het ontstaan as die kennisveld wat ruimtelike verwantskappe hanteer. Meetkunde kan verdeel word in Euklidiese meetkunde en analitiese meetkunde. Analitiese meetkunde hanteer ruimte en vorm vanuit die hoekpunt van algebra en 'n koördinaatsisteem. Euklidiese meetkunde hanteer ruimte en vorm deur 'n sisteem van logiese afleidings.

12.1 Bewyse en vermoedens

EMD7H

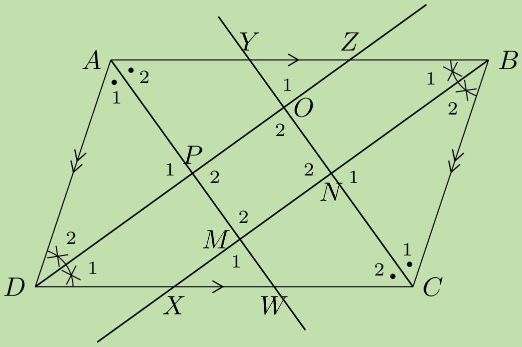
Ons sal nou toepas wat ons geleer het oor meetkunde en die eienskappe van veelhoeke (spesifiek in driehoeke en vierhoeke) om sommige van hierdie eienskappe te bewys. Ons sal ook kyk hoe ons kan bewys dat 'n spesifieke vierhoek een van die spesiale vierhoeke is.

BESOEK:
Hierdie video toon hoe om te bewys dat die hoeklyne van 'n ruit loodreg is op mekaar.
Sien video: 2KCC at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Bewys dat 'n vierhoek 'n parallelogram is

VRAAG

In parallelogram $ABCD$ is die halveerlyne van die hoeke (AW, BX, CY en DZ) gekonstrueer. Dit word ook gegee: $AB = CD$, $AD = BC$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$. Bewys dat $MNOP$ 'n parallelogram is.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die eienskappe van die parallelogram $ABCD$ om alle gelyke sye en hoeke op die diagram in te vul

Stap 2: Bewys dat $\hat{M}_2 = \hat{O}_2$

In $\triangle CDZ$ en $\triangle ABX$,

$$\begin{aligned}
D\hat{C}Z &= B\hat{A}X && \text{(gegee)}\\
\hat{D}_1 &= \hat{B}_1 && \text{(gegee)}\\
DC &= AB && \text{(gegee)}\\
\therefore \triangle CDZ &\equiv \triangle ABX && \text{(HHS)}\\
\therefore CZ &= AX\\
\text{en } C\hat{Z}D &= A\hat{X}B
\end{aligned}$$

In $\triangle XAM$ en $\triangle ZCO$

$$\begin{aligned}
X\hat{A}M &= Z\hat{C}O && \text{(gegee: } \triangle CDZ \equiv \triangle ABX\text{)} \\
A\hat{X}M &= C\hat{Z}O && \text{(bewys hierbo)} \\
AX &= CZ && \text{(bewys hierbo)} \\
\therefore \triangle XAM &\equiv \triangle ZCO && \text{(HHS)} \\
\therefore \hat{M}_1 &= \hat{O}_1 && \\
\text{maar } \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 && \text{(regoorst. } \angle\text{'e)} \\
\text{en } \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 && \text{(regoorst. } \angle\text{'e)} \\
\therefore \hat{M}_2 &= \hat{O}_2 &&
\end{aligned}$$

Stap 3: Soortgelyk kan ons aantoon dat $\hat{N}_2 = \hat{P}_2$

Bewys eers $\triangle ADW \equiv \triangle CBY$. Bewys dan $\triangle PDW \equiv \triangle NBY$.

Stap 4: Gevolgtrekking

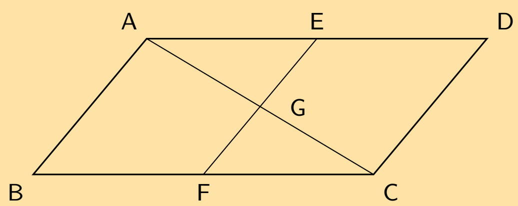
Beide pare teenoorstaande hoeke van $MNOP$ is gelyk. Dus is $MNOP$ 'n parallelogram.

BESOEK:
Die video toon hoe om te bewys dat die teenoorstaande hoeke van 'n parallelogram ewe groot is.
Sien video: 2KCD at www.everythingmaths.co.za

Oefening 12 – 1:

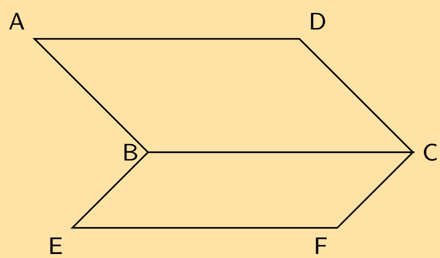
1. In die diagram hieronder, halveer AC en EF mekaar by G. E is die middelpunt van AD, en F is die middelpunt van BC.

   a) Bewys $AECF$ is 'n parallelogram.

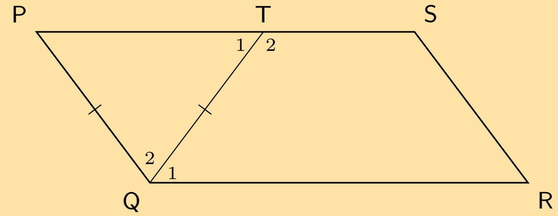


   b) Bewys $ABCD$ is 'n parallelogram.

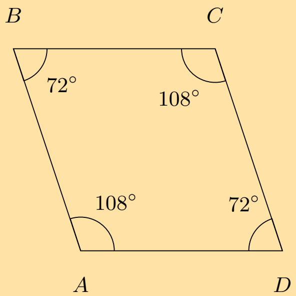
2. Parallelogram $ABCD$ en $BEFC$ word hieronder getoon. Bewys $AD = EF$.



3. $PQRS$ is 'n parallelogram. $PQ = TQ$. Bewys $\hat{Q}_1 = \hat{R}$.

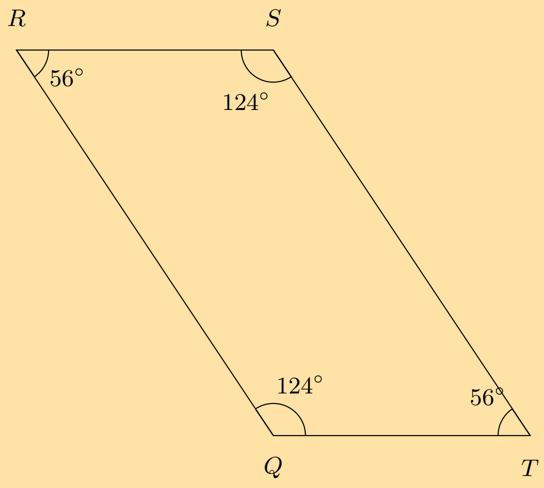


4. Bestudeer die vierhoek $ABCD$ met teenoorstaande hoeke $\hat{A} = \hat{C} = 108°$ en hoeke $\hat{B} = \hat{D} = 72°$ noukeurig. Vul die ontbrekende redes en stappe in om te bewys dat vierhoek $ABCD$ 'n parallelogram is.



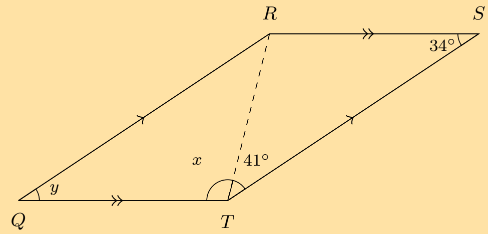
Stappe	Rede
?	gegee beide $\angle$'e $= 108°$
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	gegee beide$\angle$'e $= 72°$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$	$\angle$e van vierhoek
$B\hat{A}D + A\hat{D}C = 180°$	gegee $108° + 72° = 180°$
$\therefore AB \parallel DC$	?
$\therefore BC \parallel AD$	?
$\therefore ABCD$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

5. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met teenoorstaande hoeke $Q = S = 124°$ en hoeke $R = T = 56°$ noukeurig. Vul die ontbrekende redes en stappe in om te bewys dat vierhoek $QRST$ 'n parallelogram is.



Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 124°$
?	gegee beide $\angle$e $= 56°$
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360°$	?
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	?
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne hoeke; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	ko-binne hoeke; $RS \parallel QT$
?	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

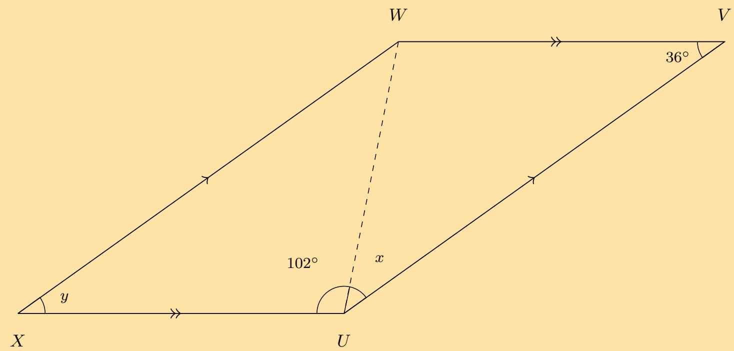
6. a) Vierhoek $QRST$ met sye $QR \parallel TS$ en $QT \parallel RS$ word gegee. Dit word ook gegee dat: $\hat{Q} = y$ en $\hat{S} = 34°$; $Q\hat{T}R = x$ en $R\hat{T}S = 41°$. Bewys $QRST$ is 'n parallelogram.



b) Vind die waarde van y.

c) Vind die waarde van x.

7. a) Vierhoek $XWVU$ met sye $XW \parallel UV$ en $XU \parallel WV$ is gegee. Dit is ook gegee dat $\hat{X} = y$ en $\hat{V} = 36°$; $X\hat{U}W = 102°$ en $W\hat{U}V = x$. Bewys $XWVU$ is 'n parallelogram.



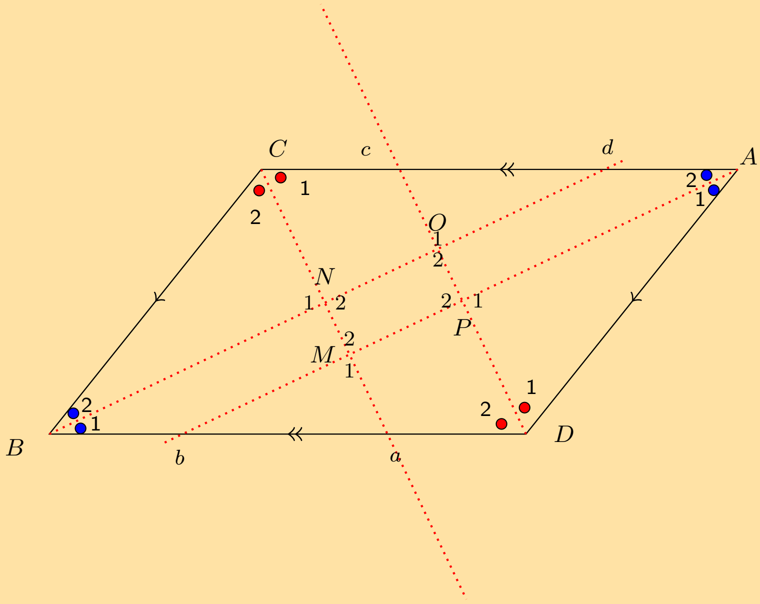
b) Bepaal die waarde van y.

c) Bepaal die waarde van x.

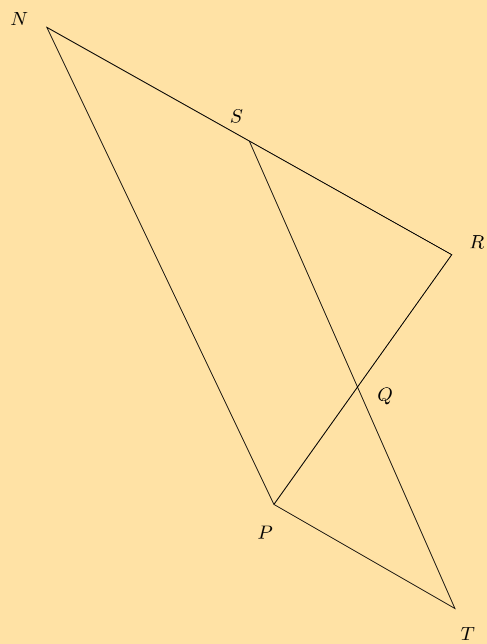
8. In parallelogram $ADBC$, is die halveerlyne van die hoeke (A, D, B, C) gekonstrueer en dit is aangedui met die rooi lyne hieronder. Dit word ook gegee: $AD = CB$, $DB = AC$, $AD \parallel CB$, $DB \parallel AC$, $\hat{A} = \hat{B}$ en $\hat{D} = \hat{C}$.

Bewys vierhoek $MNOP$ is 'n parallelogram.

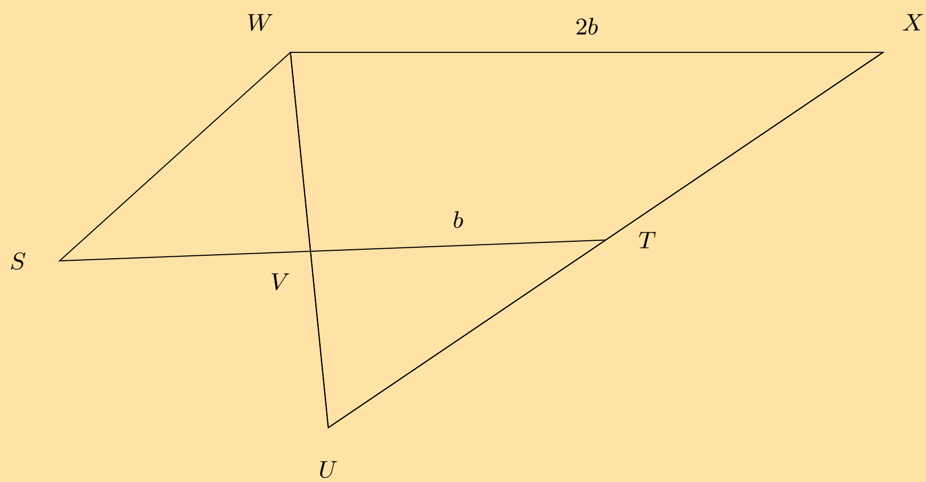
Let op dat die diagram op skaal geteken is.



9. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Twee driehoeke in die figuur is kongruent: $\triangle QRS \equiv \triangle QPT$. Verder is $SN = SR$. Jy moet bewys dat $NPTS$ 'n parallelogram is.



10. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Vierhoek $XWST$ is 'n parallelogram en TV en XW het lengtes b en $2b$ onderskeidelik, soos getoon. Jy moet bewys dat $\triangle TVU \equiv \triangle SVW$.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KCF 2. 2KCG 3. 2KCH 4. 2KCJ 5. 2KCK 6. 2KCM
7. 2KCN 8. 2KCP 9. 2KCQ 10. 2KCR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

12.2 Hoofstuk opsomming EMD7J

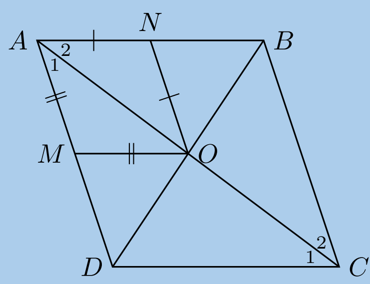
Sien aanbieding: 2KCS at www.everythingmaths.co.za

- ’n Vierhoek is ’n geslote vorm wat bestaan uit vier reguitlyn segmente.
- ’n Parallelogram is ’n vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
  - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
  - Beide hoeklyne halveer mekaar.
- ’n Reghoek is ’n parallelogram met al vier hoeke gelyk aan 90°
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
  - Die hoeklyne halveer mekaar.
  - Die hoeklyne is ewe lank.
  - Alle binnehoeke is gelyk aan 90°
- ’n Ruit is ’n parallelogram met vier sye wat almal ewe lank is.
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Al die sye is ewe lank.
  - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
  - Die hoeklyne halveer mekaar loodreg $(90°)$
  - Die hoeklyne van ’n ruit halveer beide pare teenoorstaande hoeke.
- ’n Vierkant is ’n ruit met al vier binnehoeke gelyk aan $90°$
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
  - Die hoeklyne halveer mekaar loodreg $(90°)$
  - Alle binnehoeke is gelyk aan $90°$
  - Die hoeklyne is ewe lank.
  - Die hoeklyne halveer beide pare teenoorstaande binnehoeke (d.w.s. almal is $45°$)
- ’n Trapesium is ’n vierhoek met een paar teenoorstaande sye ewewydig.
- ’n Vlieër is ’n vierhoek met twee paar aangrensende sye gelyk.
  - Een paar teenoorstaande hoeke is gelyk (die hoeke is tussen ongelyke sye).
  - Die hoeklyn tussen die gelyke sye halveer die ander hoeklyn.
  - Die hoeklyn tussen die gelyke sye halveer die binnehoeke.
  - Die hoeklyne sny mekaar loodreg $(90°)$
- Die middelpuntstelling: Die lyn wat die middelpunte van twee sye van ’n driehoek verbind is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

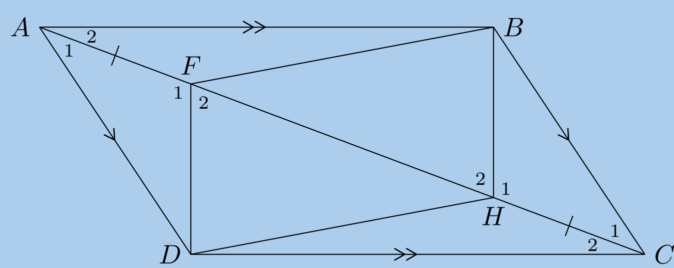
BESOEK:
Hierdie video toon hoe om te bewys dat die teenoorstaande sye van ’n parallelogram ewe lank is.
Sien video: 2KCT at www.everythingmaths.co.za

End of chapter Exercise 12 – 2:

1. $ABCD$ is 'n ruit met $AM = MO$ en $AN = NO$. Bewys $ANOM$ is ook 'n ruit.

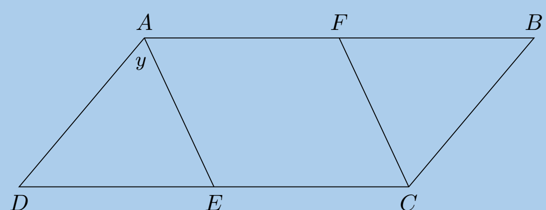


2. $ABCD$ is 'n parallelogram met hoeklyn AC. Gegewe dat $AF = HC$, toon dat:



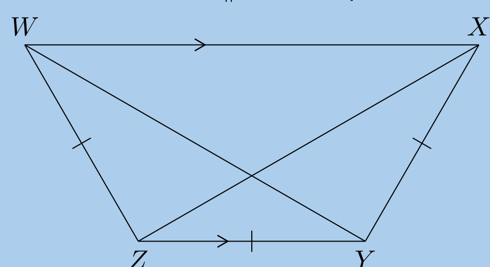
   a) $\triangle AFD \equiv \triangle CHB$
   b) $DF \parallel HB$
   c) $DFBH$ is 'n parallelogram

3. Gegewe parallelogram $ABCD$ met AE wat $\hat{A}$ halveer en FC wat $\hat{C}$ halveer.



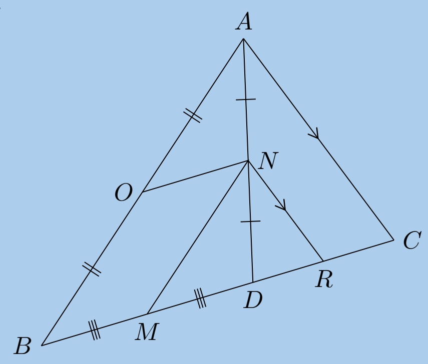
   a) Skryf alle binnehoeke in terme van y.
   b) Bewys dat $AFCE$ 'n parallelogram is.

4. Gegewe dat $WZ = ZY = YX$, $\hat{W} = \hat{X}$ en $WX \parallel ZY$, bewys dat:



   a) XZ halveer $\hat{X}$
   b) $WY = XZ$

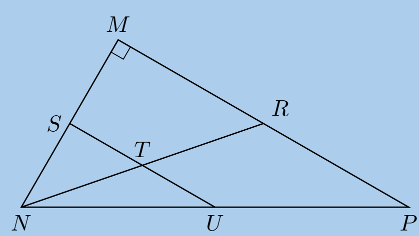
5. D is 'n punt op BC, in $\triangle ABC$. N is die middelpunt van AD. O is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BD. $NR \parallel AC$.



a) Bewys dat $OBMN$ 'n parallelogram is.

b) Bewys dat $BC = 2MR$.

6. In $\triangle MNP$, $\hat{M} = 90°$, S is die middelpunt van MN en T is die middelpunt van NR.

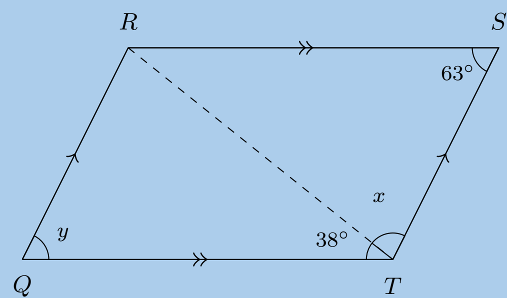


a) Bewys U is die middelpunt van NP.

b) As $ST = 4$ cm en die oppervlakte van $\triangle SNT$ is 6 cm^2, bereken die oppervlakte van $\triangle MNR$.

c) Bewys dat die oppervlakte van $\triangle MNR$ altyd viermaal die oppervlakte van $\triangle SNT$ sal wees; laat $ST = x$ eenhede en $SN = y$ eenhede.

7. a) Gegee vierhoek $QRST$ met sye $QR \parallel TS$ en $QT \parallel RS$. Ook gegee: $\hat{Q} = y$ en $\hat{S} = 63°$; $Q\hat{T}R = 38°$ en $R\hat{T}S = x$. Voltooi die bewys hieronder om te bewys dat $QRST$ 'n parallelogram is.

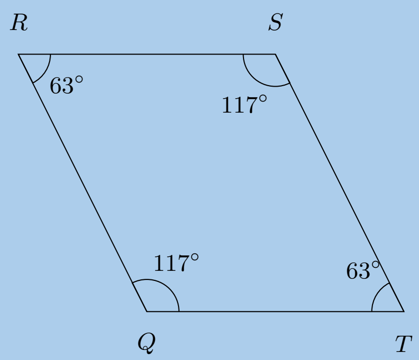


Stappe	Rede
$Q\hat{T}R = T\hat{R}S$	verw $\angle$e; $QT \parallel RS$
$S\hat{T}R = Q\hat{R}T$	verw $\angle$e; $QR \parallel TS$
?	?
$\therefore \triangle QRT \equiv \triangle STR$	(HHS)
?	kongruente driehoeke
$\hat{Q} = \hat{S}$	kongruente driehoeke
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	?

b) Bereken die waarde van y.

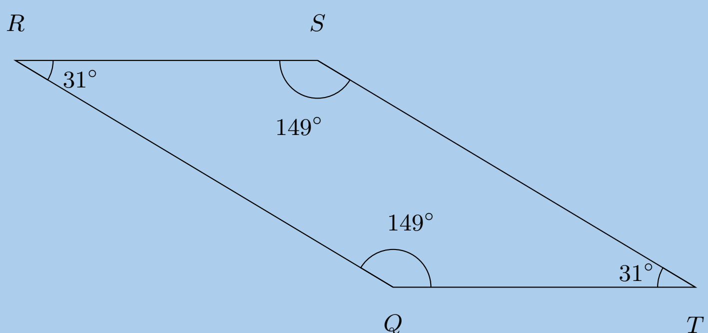
c) Bereken die waarde van x.

8. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met teenoorstaande hoeke $Q = S = 117°$ en hoeke $R = T = 63°$ noukeurig. Vul die korrekte redes of stappe in om te bewys vierhoek $QRST$ is 'n parallelogram.



Stappe	Rede
?	gegee beide $\angle$e $= 117°$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	gegee beide $\angle$e $= 63°$
?	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	$117° + 63° = 180°$
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	?
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	?

9. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met $\hat{Q} = \hat{S} = 149°$ en $\hat{R} = \hat{T} = 31°$ noukeurig. Vul die korrekte redes of die stappe in om te bewys vierhoek $QRST$ is 'n parallelogram.

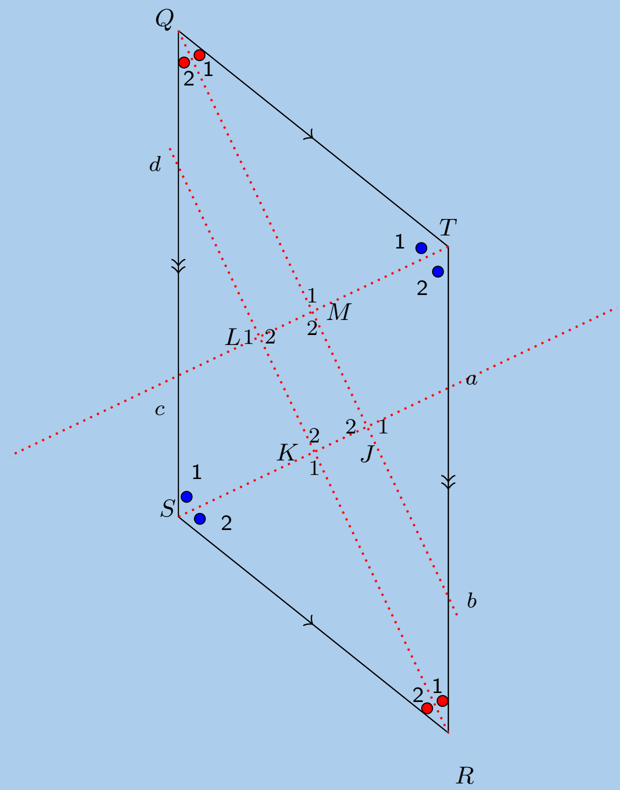


Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 149°$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	?
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360°$	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	?
?	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
?	ko-binne $\angle$e; $RS \parallel QT$
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	teenoorst. sye ewewydig

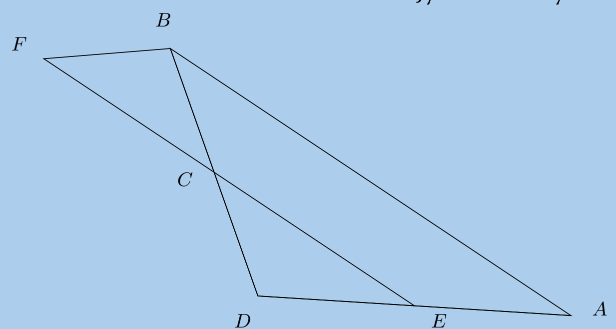
10. In parallelogram $QTRS$ is die halveerlyne van die hoeke gekonstrueer en dit word aangedui met die rooi lyne hieronder. Jy word ook $QT = SR$, $TR = QS$, $QT \parallel SR$, $TR \parallel QS$, $\hat{Q} = \hat{R}$ en $\hat{T} = \hat{S}$ gegee.

Bewys vierhoek $JKLM$ is 'n parallelogram.

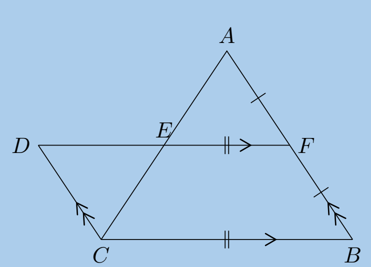
Let op dat die diagram op skaal geteken is.



11. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Twee driehoeke in die figuur is kongruent: $\triangle CDE \equiv \triangle CBF$. Verder is $EA = ED$. Jy moet bewys dat $ABFE$ 'n parallelogram is.

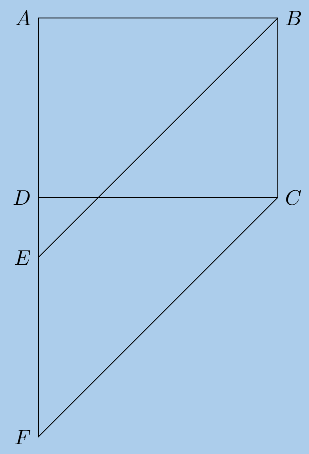


12. Gegee die volgende diagram:

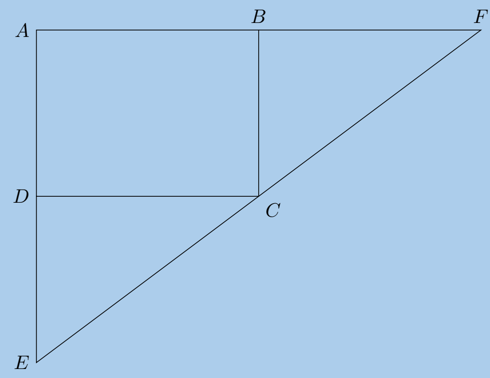


 a) Toon dat $BCDF$ 'n parallelogram is.
 b) Toon dat $ADCF$ 'n parallelogram is.
 c) Bewys dat $AE = EC$.

13. $ABCD$ is 'n parallelogram. $BEFC$ is 'n parallelogram. $ADEF$ is 'n reguitlyn. Bewys dat $AE = DF$.



14. In die figuur hieronder $AB = BF$, $AD = DE$. $ABCD$ is 'n parallelogram. Bewys EF is 'n reguitlyn.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KCV 2. 2KCW 3. 2KCX 4. 2KCY 5. 2KCZ 6. 2KD2
7. 2KD3 8. 2KD4 9. 2KD5 10. 2KD6 11. 2KD7 12. 2KD8
13. 2KD9 14. 2KDB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 13

Meting

Om te weet hoe om die buite-oppervlakte en volume van 'n voorwerp te bereken, kan nuttig wees in baie kontekste, veral om uit te vind hoeveel 'n taak gaan kos en hoeveel materiaal benodig word om 'n voorwerp te vervaardig. Sommige voorbeelde hiervan is die berekening van die buite-oppervlakte van 'n houer, om ons te help om die koste van die materiaal uit te werk, of die berekening van die volume van 'n dam sodat ons weet hoeveel die water die dam kan hou.

Hierdie hoofstuk ondersoek die buite-oppervlakte en volumes van driedimensionele voorwerpe, ook bekend as vaste liggame. Ten einde met hierdie voorwerpe kan werk, moet jy weet hoe om die buite-oppervlakte en omtrek van tweedimensionele voorwerpe te bereken.

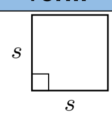
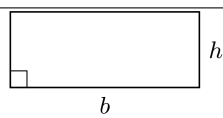
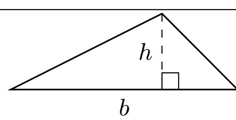
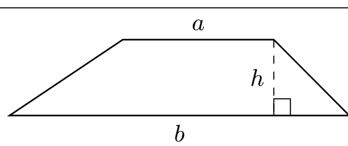
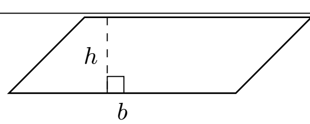
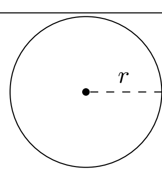
Figuur 13.1: 'n Tennisbaan. Die posisie van elk van die lyne is noukeurig bereken om seker te maak dat die areas of oppervlaktes van die reghoeke dieselfde is enige plek in die wêreld.

BESOEK:
Om te hersien hoe om die area en die omtrek van vierkante en reghoeke te bereken, kan jy kyk na die video hieronder.
Sien video: 2KDC at www.everythingmaths.co.za

13.1 Area van 'n veelhoek EMD7K

DEFINISIE: *Area*

Area (oppervlakte) is die tweedimensionale ruimte binne die grense van 'n plat voorwerp. Dit word gemeet in vierkante eenhede.

Naam	Vorm	Formule
Vierkant		area (A) $= s^2$
Reghoek		area (A) $= b \times h$
Driehoek		area (A) $= \frac{1}{2}b \times h$
Trapesium		area (A) $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$
Parallelogram		area (A) $= b \times h$
Sirkel		area (A) $= \pi r^2$ (omtrek $= 2\pi r$)

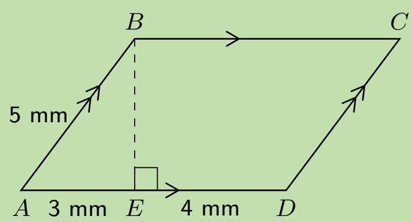
HET JY GEWEET?
Akkers en hektare is twee algemene eenhede wat gebruik word vir die oppervlakte van oppervlakte van grond. Een hektaar is ongeveer 0,01 vierkante kilometer en een akker is omtrent 0,004 vierkante kilometer.

BESOEK:
Die video hieronder toon sommige voorbeelde of berekeninge wat verband hou met die area van 'n sirkel.
Sien video: 2KDD at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Vind die area van 'n veelhoek

VRAAG

Vind die area van die volgende parallelogram:



OPLOSSING

Stap 1: Vind die hoogte BE

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE^2 + AE^2 \quad \text{(Pythagoras)} \\ \therefore BE^2 &= AB^2 - AE^2 \\ &= 5^2 - 3^2 \\ &= 16 \\ \therefore BE &= 4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Stap 2: Vind die area met die gebruik van die formule vir 'n parallelogram

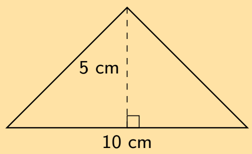
$$\begin{aligned} \text{area} &= b \times h \\ &= AD \times BE \\ &= 7 \times 4 \\ &= 28 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

BESOEK:
Die volgende Phet simulasie laat jou toe om verskillende vorme te bou en die area en omtrek van die vorme te bereken: Phet: area builder.

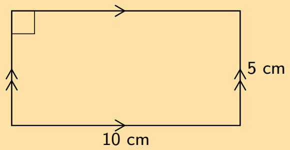
Oefening 13 – 1:

1. Vind die area van elk van die veelhoeke hieronder:

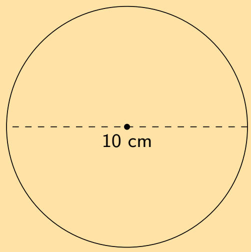
   a)



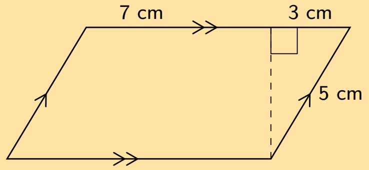
   b)



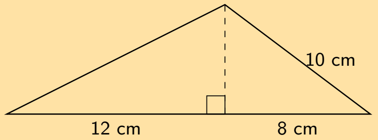
   c)



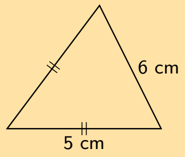
   d)



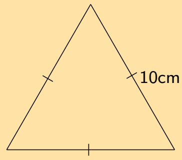
   e)



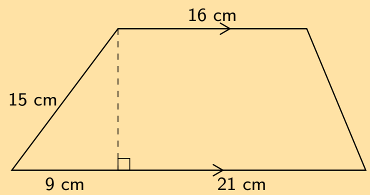
   f)



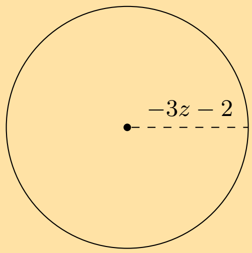
   g)



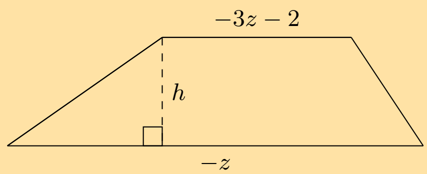
h)



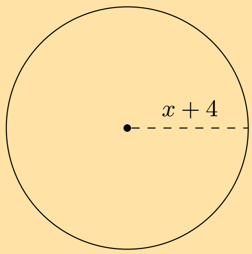
2. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van z en π. Die sirkel het 'n radius van $-3z-2$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



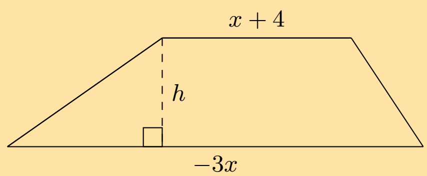
b) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van z en h. Die hoogte van die figuur is h, en twee sye word benoem as $-3z-2$ en $-z$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



3. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van x en π. Die sirkel het 'n radius van $x+4$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



b) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van x en h. Die hoogte van die figuur is h, en twee sye word benoem as $x+4$ en $-3x$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2KDF 1b. 2KDG 1c. 2KDH 1d. 2KDJ 1e. 2KDK 1f. 2KDM
1g. 2KDN 1h. 2KDP 2. 2KDQ 3. 2KDR

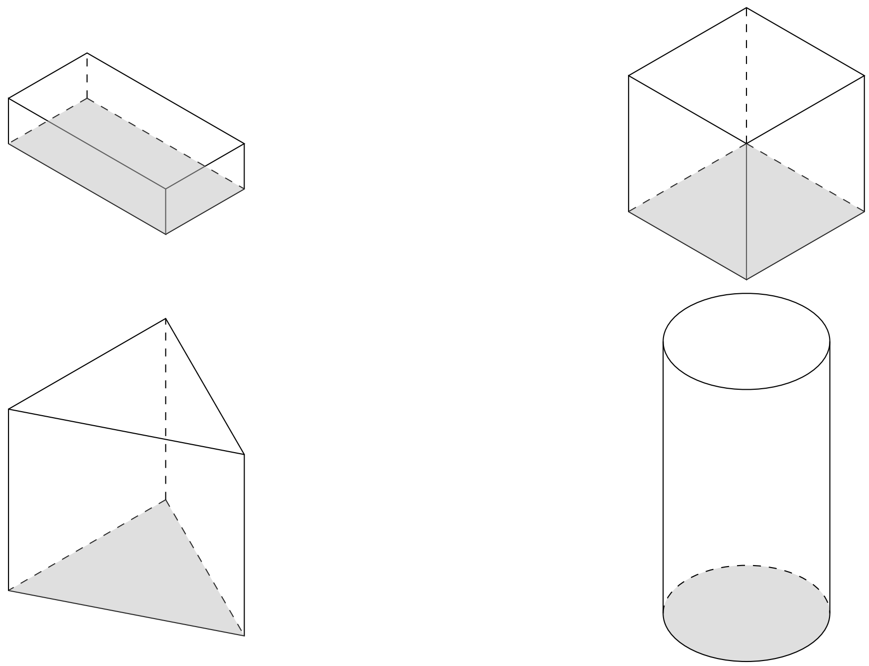
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

13.2 Regte prismas en silinders EMD7M

DEFINISIE: *Regte prisma*

'n Regte prisma is 'n geometriese vaste liggaam met 'n veelhoek as basis en vertikale syvlakke loodreg op die basis.

'n Driehoekige prisma het 'n driehoek as basis, 'n reghoekige prisma het 'n reghoek as basis, en 'n kubus is 'n reghoekige prisma met al sy sye ewe lank. 'n Silinder het 'n sirkel as basis. Voorbeelde van regte prismas en 'n silinder word hieronder gegee: 'n reghoekige prisma, 'n kubus en 'n driehoekige prisma.



Buite-oppervlakte van prismas en silinders EMD7N

DEFINISIE: *Buite-oppervlakte*

Buite-oppervlakte is die totale area van die blootgestelde of buite oppervlakke van 'n prisma.

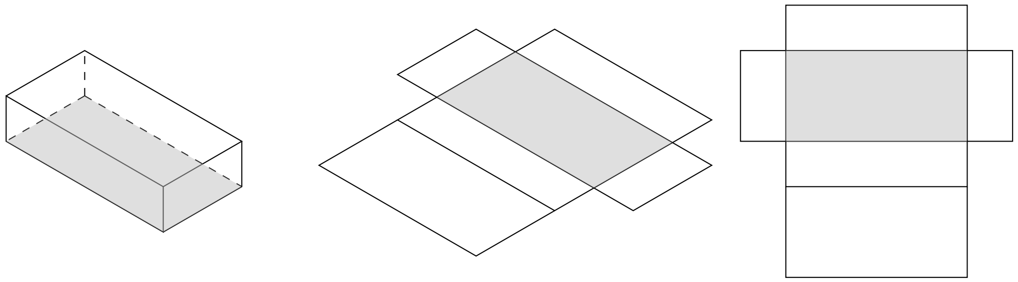
Dit is makliker om te verstaan as ons ons verbeel die prisma is van karton gemaak wat oopgevou kan word. 'n Soliede voorwerp wat op hierdie manier ontvou word, word 'n net genoem. Wanneer 'n prisma ontvou in 'n net, kan ons duidelik elkeen van sy vlakke sien. Ten einde die buite-oppervlakte van 'n prisma te bereken, kan ons dan eenvoudig die area van elke vlak bereken en hulle almal bymekaartel.

Byvoorbeeld, wanneer 'n driehoekige prisma ontvou in 'n net, kan ons sien dat dit twee vlakke het wat driehoeke is en drie aansigte wat reghoeke is. Om die buite-oppervlakte van die prisma te bereken, vind ons die area van elke driehoek en elke reghoek, en tel hulle bymekaar.

In die geval van 'n silinder is die boonste en onderste vlakke sirkels en die gekromde vlak ontvou tot 'n reghoek met lengte gelyk aan die omtrek van die sirkelvormige basis. Om die buite-oppervlakte te bereken, vind ons die area van die twee sirkels en die reghoek en tel hulle bymekaar.

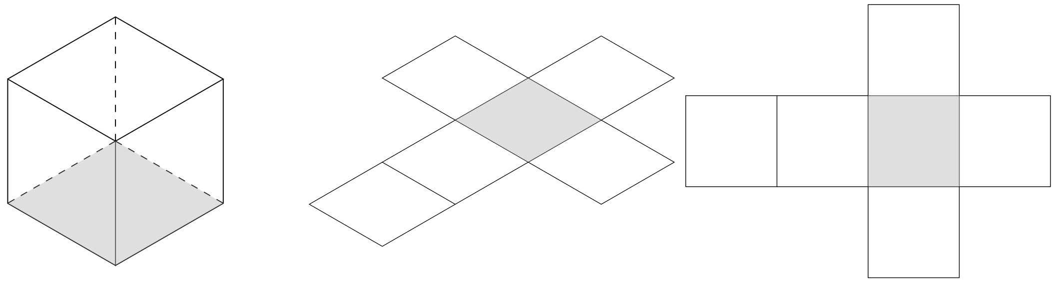
Hieronder is voorbeelde van regte prismas en ’n silinder wat ontvou is in nette:

Reghoekige prisma



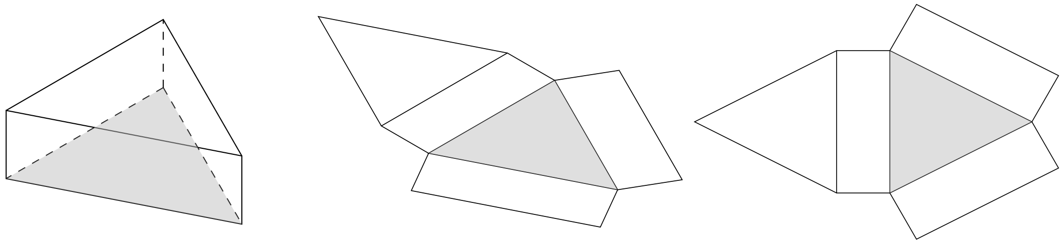
’n Reghoekige prisma, wat ontvou word in ’n net, bestaan uit ses reghoeke.

Kubus



’n Kubus wat ontvou word in ’n net, bestaan uit ses identiese vierkante.

Driehoekige prisma



’n Driehoekige prisma, wat ontvou word in ’n net, bestaan uit twee driehoeke en drie reghoeke. Die som van die lengtes van die reghoeke is gelyk aan die omtrek van die driehoeke.

Silinder

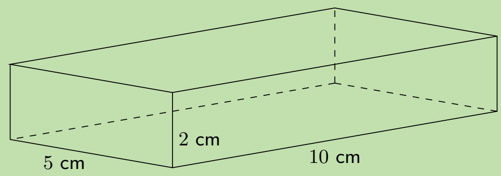
’n Silinder, wat ontvou word in ’n net, bestaan uit twee identiese sirkels en ’n reghoek met ’n lengte gelyk aan die omtrek van die sirkels.

BESOEK:
Die video verduidelik hoe ons vaste liggame kan ontvou in nette.
Sien video: 2KDS at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Vind die buite-oppervlakte van 'n reghoekige prisma

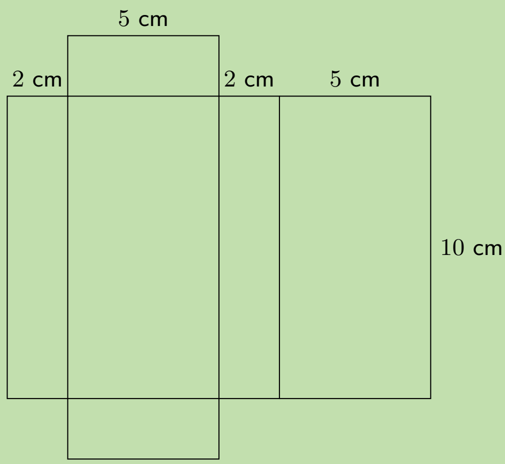
VRAAG

Vind die buite-oppervlakte van die volgende reghoekige prisma:



OPLOSSING

Stap 1: Skets en benoem die net van die prisma



Stap 2: Vind die areas van die verskillende vorme in die net

$$\begin{aligned}\text{groot reghoek} &= \text{omtrek van klein reghoek} \times \text{lengte}\\ &= (2+5+2+5) \times 10\\ &= 14 \times 10\\ &= 140 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times \text{klein reghoek} &= 2\,(5 \times 2)\\ &= 2\,(10)\\ &= 20 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 3: Vind die som van die oppervlaktes van die vlakke

groot reghoek $+ 2 \times$ klein reghoek $= 140 + 20 = 160$

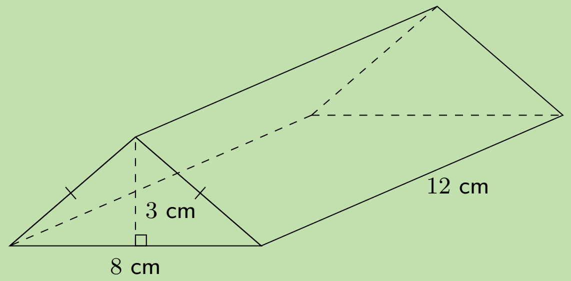
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die reghoekige prisma is 160 cm^2.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Vind die buite-oppervlakte van 'n driehoekige prisma

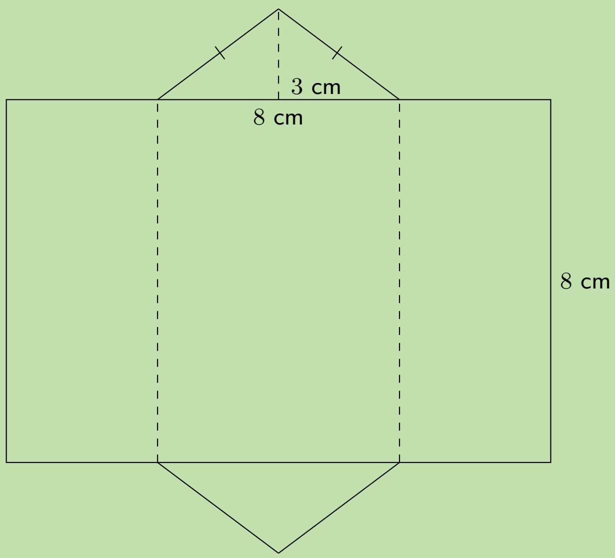
VRAAG

Vind die buite oppervlakte van die volgende driehoekige prisma:



OPLOSSING

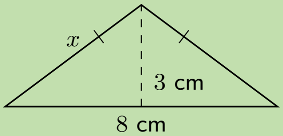
Stap 1: Skets en benoem die net van die prisma



Stap 2: Vind die oppervlaktes van die verskillende vorme in die net

Om die oppervlakte van die reghoek te kry, moet ons sy lengte, wat gelyk is aan die omtrek van die driehoeke, bereken.

Om die omtrek van die driehoek te vind, moet ons eers die lengte vind van sy sye met behulp van die stelling van Pythagoras:



$$
\begin{aligned}
x^2 &= 3^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \\
x^2 &= 3^2 + 4^2 \\
&= 25 \\
\therefore x &= 5 \text{ cm} \\
\therefore \text{omtrek van die driehoek} &= 5 + 5 + 8 \\
&= 18 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{oppervlakte van groot reghoek} &= \text{omtrek van die driehoek} \times \text{lengte} \\
&= 18 \times 12 \\
&= 216 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{oppervlakte van driehoek} &= \frac{1}{2} b \times h \\
&= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \\
&= 12 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Stap 3: Vind die som van die oppervlaktes van die vlakke

$$
\begin{aligned}
\text{buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} + (2 \times \text{oppervlakte van driehoek}) \\
&= 216 + 2\,(12) \\
&= 240 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

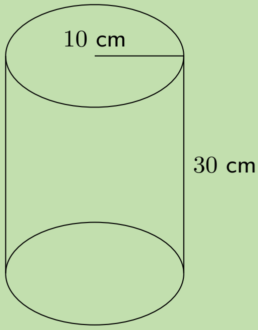
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die driehoekige prisma is 240 cm^2.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vind die buite-oppervlakte van 'n silinder

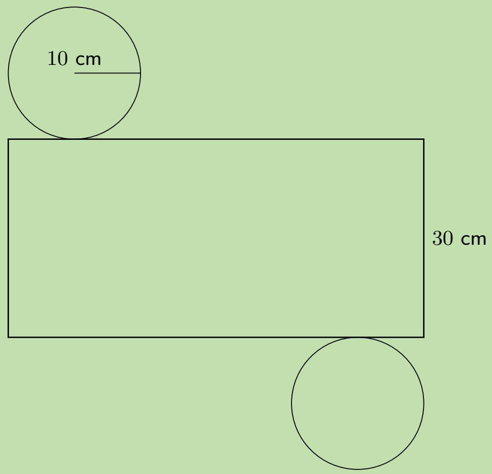
VRAAG

Vind die buite-oppervlakte van die volgende silinder (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Skets en benoem die net van die silinder



Stap 2: Vind die oppervlaktes van die verskillende vorme in die net

$$\begin{aligned}
\text{oppervlakte van groot reghoek} &= \text{omtrek van sirkel} \times \text{lengte} \\
&= 2\pi r \times l \\
&= 2\pi\,(10) \times 30 \\
&= 1884{,}9555...\text{ cm}^2 \\
\text{oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2 \\
&= \pi(10)^2 \\
&= 314{,}1592...\text{ cm}^2 \\
\text{buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} + (2 \times \text{oppervlakte van circle}) \\
&= 1884{,}9555... + 2\,(314{,}1592...) \\
&= 2513{,}3\text{ cm}^2
\end{aligned}$$

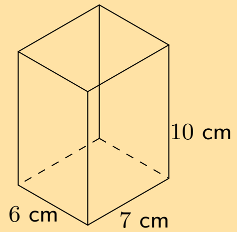
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die silinder is $2513{,}3\text{ cm}^2$.

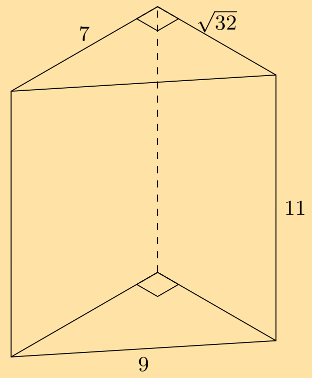
Oefening 13 – 2:

1. Bereken die buite-oppervlakte van die volgende prismas:

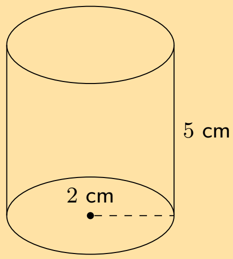
   a)



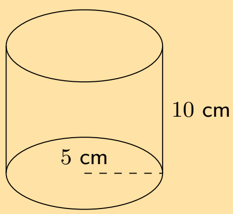
b)



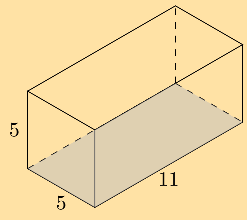
c)



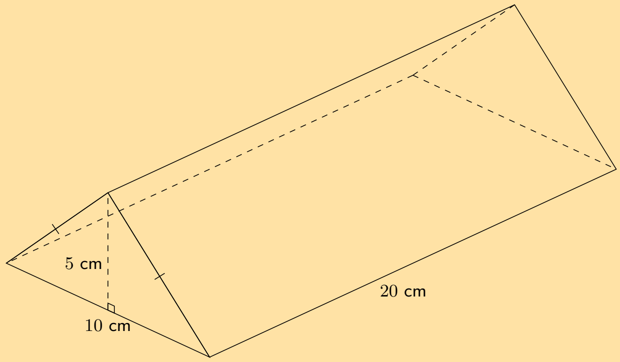
d)



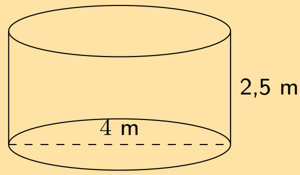
e)



f)



2. As ’n liter verf genoeg is vir ’n area van 2 m^2, hoeveel verf het ’n verwer nodig vir:
   a) ’n reghoekige swembad met afmetings 4 m $\times$ 3 m $\times$ 2,5 m (slegs die binnemure en vloer);
   b) die binnemure en die vloer van ’n sirkelvormige tenk met middellyn 4 m en hoogte 2,5 m.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.
1a. 2KDT 1b. 2KDV 1c. 2KDW 1d. 2KDX 1e. 2KDY 1f. 2KDZ
2. 2KF2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

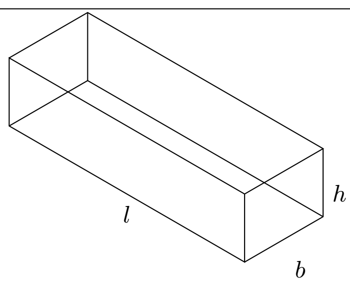
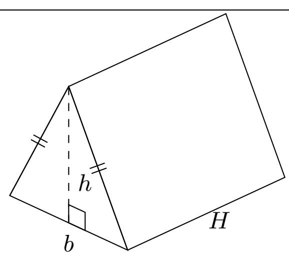
Volume van prismas en silinders EMD7P

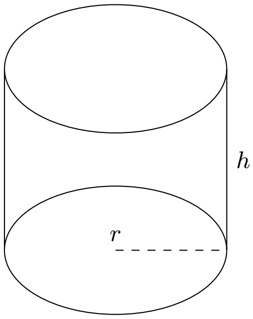
DEFINISIE: *Volume*

Volume is die drie dimensionele ruimte wat opgeneem word deur ’n voorwerp of liggaam, of die inhoud van die voorwerp. Dit word gemeet in kubieke eenhede.

Die volume van regte prismas en silinders word eenvoudig bereken deur die vermenigvuldiging van die area van die basis met die hoogte van die liggaam.

BESOEK:
Die video hieronder toon verskeie voorbeelde van die berekening van die volume van ’n regte prisma.
Sien video: 2KF3 at www.everythingmaths.co.za

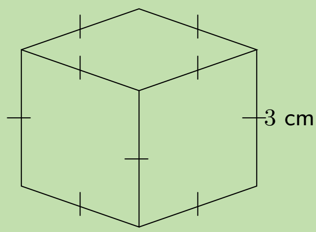
Reghoekige prisma		Volume $= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte}$ $= \text{oppervlakte van reghoek} \times \text{hoogte}$ $= l \times b \times h$
Driehoekige prisma		Volume $= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte}$ $= \text{oppervlakte van driehoek} \times \text{hoogte}$ $= \left(\frac{1}{2}b \times h\right) \times H$

Silinder		Volume $= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte}$ $= \text{oppervlakte van circle} \times \text{hoogte}$ $= \pi r^2 \times h$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Vind die volume van 'n kubus

VRAAG

Vind die volume van die volgende kubus:



OPLOSSING

Stap 1: Vind die area van die basis

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte van vierkant} &= s^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Vermenigvuldig die area van die basis met die hoogte van die vaste liggaam en vind die volume

$$\begin{aligned} \text{volume} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= 9 \times 3 \\ &= 27 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

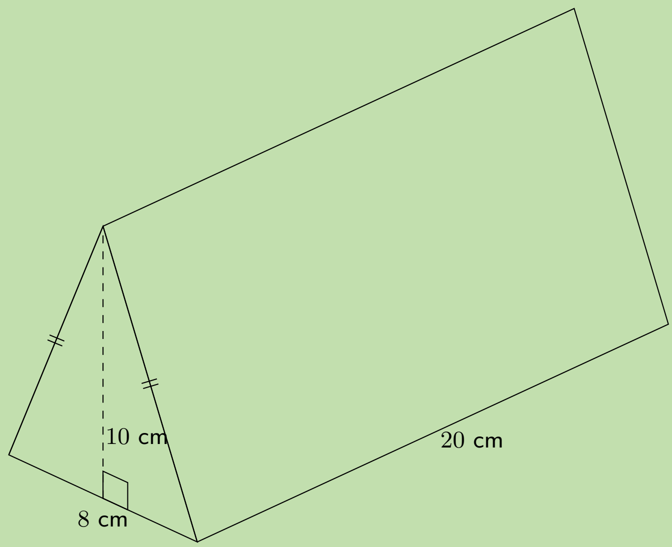
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die volume van die kubus is 27 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vind die volume van 'n driehoekige prisma

VRAAG

Vind die volume van die driehoekige prisma:



OPLOSSING

Stap 1: Vind die area van die basis

$$\begin{aligned}\text{oppervlakte van driehoek} &= \frac{1}{2}b \times h \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 8\right) \times 10 \\ &= 40 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2: Vermenigvuldig die area van die basis met die hoogte van die vaste liggaam en vind die volume

$$\begin{aligned}\text{volume} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= \frac{1}{2}b \times h \times H \\ &= 40 \times 20 \\ &= 800 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

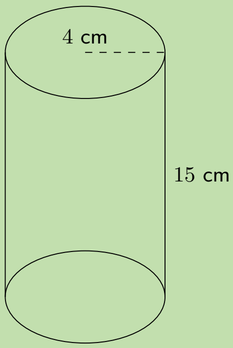
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die volume van die driehoekige prisma is 800 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vind die volume van 'n silinder

VRAAG

Vind die volume van die volgende silinder (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Vind die area van die basis

$$\begin{aligned}\text{oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2\\ &= \pi(4)^2\\ &= 16\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2: Vermenigvuldig die area van die basis met die hoogte van die vaste liggaam en vind die volume

$$\begin{aligned}\text{volume} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte}\\ &= \pi r^2 \times h\\ &= 16\pi \times 15\\ &\approx 754{,}0 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

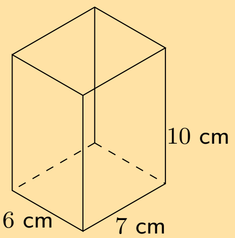
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die volume van die silinder is $754{,}0 \text{ cm}^3$.

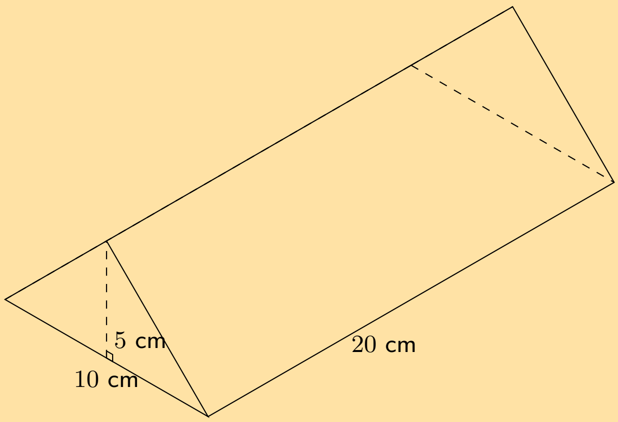
Oefening 13 – 3:

1. Bereken die volumes van die volgende prismas (korrek tot 1 desimale plek):

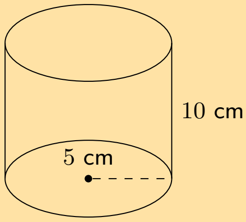
   a)



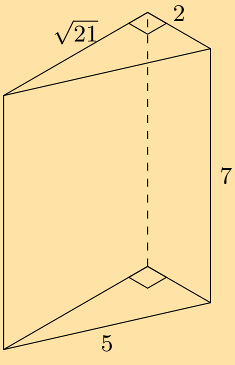
b)



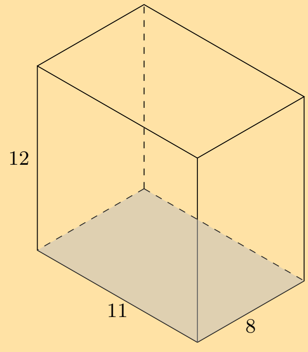
c)



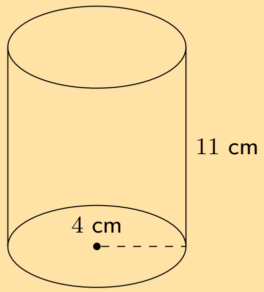
2. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 7 eenhede; die driehoeke, wat beide reghoekig is, het sye wat 2, $\sqrt{21}$ en 5 eenhede lank is. Bereken die volume van die figuur. Rond af tot twee desimale plekke indien nodig.



3. Die figuur hieronder is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 11 en 8 eenhede. Vind die volume van die figuur.



4. Die prentjie hieronder toon 'n silinder. Die hoogte van die silinder is 11 eenhede; die radius van die silinder is $r = 4$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KF4 2. 2KF5 3. 2KF6 4. 2KF7 5. 2KF8 6. 2KF9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

13.3 Regte piramides, regte keëls en sfere EMD7Q

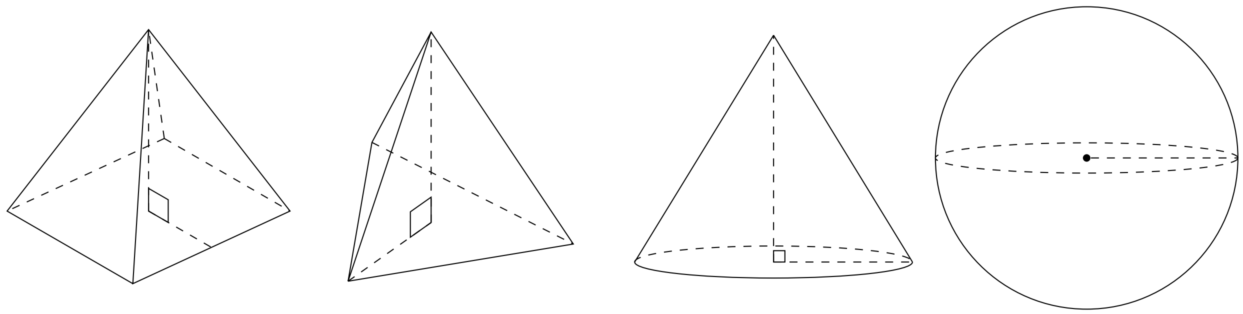
DEFINISIE: *Piramide*

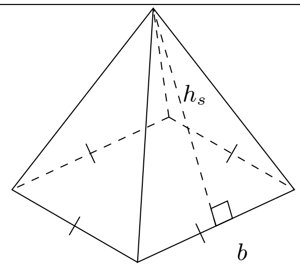
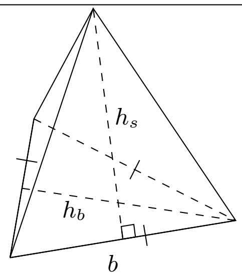
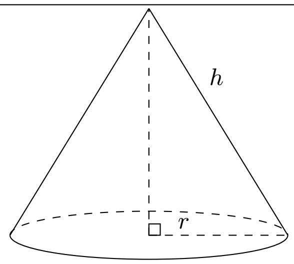
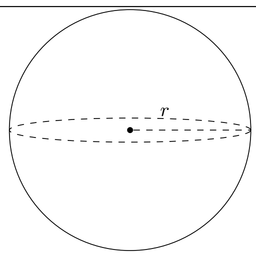
'n Piramide is 'n geometriese vaste liggaam wat 'n veelhoek as basis het en syvlakke wat konvergeer na 'n punt, genoem die toppunt. Met ander woorde, die syvlakke is **nie** loodreg op die basis nie.

Die driehoekige piramide en vierkantige piramide kry hulle name van die vorm van hulle basis. Ons noem 'n piramide 'n "regte piramide" as die lyn tussen die toppunt en die middel van die basis loodreg is op die basis. Keëls is soortelyk behalwe aan piramides dat hulle sirkels as basisie het in plaas van veelhoeke. Sfere is vaste liggame wat perfek rond is en dieselfde lyk vanuit enige rigting.

NOTA:
Keëls word ook konusse of kegels genoem.

Voorbeelde van 'n vierkantige piramide, 'n driehoekige piramide, 'n keël en 'n sfeer:

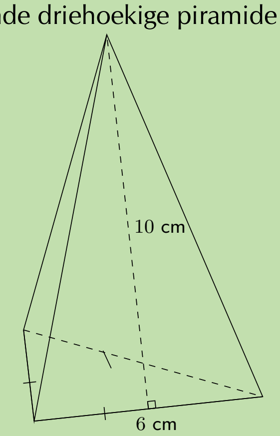


Vierkantig piramide		buite-oppervlakte $=$ basisoppervlakte $+$ oppervlakte van driehoekige syvlakke $= b^2 + 4\left(\frac{1}{2}bh_s\right)$ $= b\left(b + 2h_s\right)$
Driehoekige piramide		buite-oppervlakte $=$ basisoppervlakte $+$ oppervlakte van driehoekige syvlakke $= \left(\frac{1}{2}b \times h_b\right) + 3\left(\frac{1}{2}b \times h_s\right)$ $= \frac{1}{2}b\left(h_b + 3h_s\right)$
Regte keël		buite-oppervlakte $=$ basisoppervlakte $+$ oppervlakte van geboë area $= \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 2\pi r h$ $= \pi r\left(r + h\right)$
Sfeer		buite-oppervlakte $= 4\pi r^2$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Vind die buite-oppervlakte van 'n driehoekige piramide

VRAAG

Vind die buite-oppervlakte van die volgende driehoekige piramide (korrek tot een desimale plek):

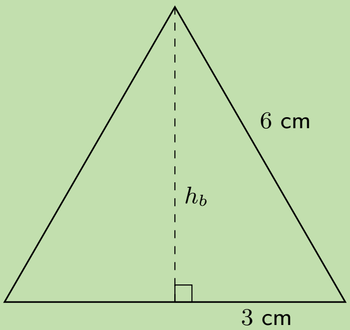


OPLOSSING

Stap 1: Vind die area van die basis

oppervlakte van basis driehoek $= \frac{1}{2}bh_b$

Om die hoogte te vind van die basis driehoek (h_b), gebruik ons die stelling van Pythagoras:



$$\begin{aligned} 6^2 &= 3^2 + h_b^2 \\ \therefore h_b &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= 3\sqrt{3} \\ \therefore \text{ oppervlakte van basis driehoek} &= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \\ &= 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Vind die area van die syvlakke

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte van syvlakke} &= 3\left(\frac{1}{2} \times b \times h_s\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 10\right) \\ &= 90\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Vind die som van die areas

$$9\sqrt{3} + 90 = 105{,}6\ \text{cm}^2$$

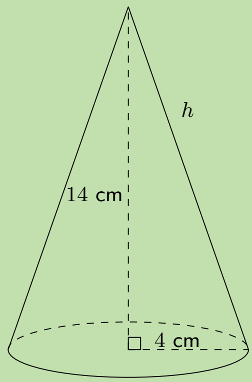
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die driehoekige piramide is 105,6 cm^2.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Vind die buite-oppervlakte van 'n keël

VRAAG

Vind die buite-oppervlakte van die volgende keël (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

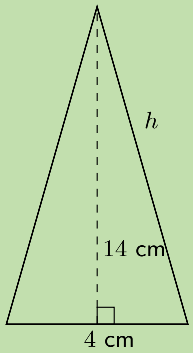
Stap 1: Vind die area van die basis

$$\begin{aligned}\text{oppervlakte van basis sirkel} &= \pi r^2 \\ &= \pi \times 4^2 \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

Stap 2: Vind die geboë area

$$\text{oppervlakte van sykante} = \pi r h$$

Om die skuinssy, h, te vind, gebruik ons die stelling van Pythagoras:



$$\begin{aligned}h^2 &= 4^2 + 14^2 \\ \therefore h &= \sqrt{4^2 + 14^2} \\ &= 2\sqrt{53} \text{ cm} \\ \text{geboë oppervlakte} &= \frac{1}{2} 2\pi r h \\ &= \pi (4) \left(2\sqrt{53}\right) \\ &= 8\pi\sqrt{53} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 3: Vind die som van die areas

$$\begin{aligned}\text{totale buite-oppervlakte} &= 16\pi + 8\pi\sqrt{53}\\ &= 233{,}2\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

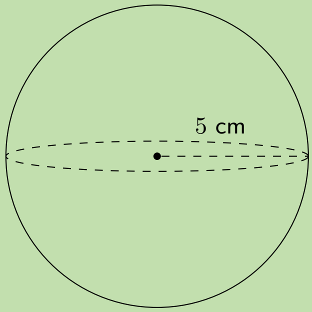
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die keël is 233,2 cm^2.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Vind die buite-oppervlakte van 'n sfeer

VRAAG

Vind die buite-oppervlakte van die volgende sfeer (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte van sfeer} &= 4\pi r^2\\ &= 4\pi(5)^2\\ &= 100\pi\\ &= 314{,}2\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 11: Ondersoek die buite-oppervlakte van 'n keël

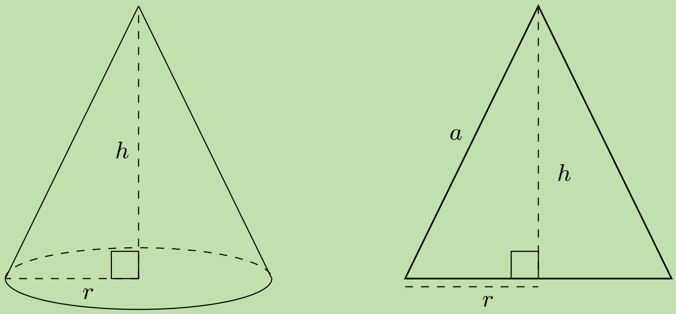
VRAAG

As 'n keël 'n hoogte het van h en 'n basis met radius r, toon dat die buite-oppervlakte die volgende is:

$\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

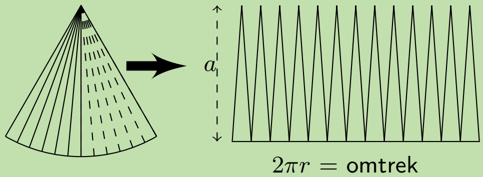
OPLOSSING

Stap 1: Skets en benoem die keël



Stap 2: Identifiseer die vlakke wat die keël vorm

Die keël het twee vlakke: die basis en die geboë oppervlakte. Die basis is 'n sirkel met radius r en die geboë oppervlakte kan ontvou word tot 'n sektor van 'n sirkel:



Hierdie geboë oppervlak kan opgedeel word in baie, smal driehoeke met hoogte naby aan a (waar a die skuinshoogte is). Die area van hierdie driehoeke of sektore, kan as volg opgesom word

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van sektor} &= \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte (van 'n klein driehoek)}\\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times a\\ &= \pi r a\end{aligned}$$

Stap 3: Bereken a

a kan bereken word met die stelling van Pythagoras:

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Stap 4: Bereken die area van die sirkelvormige basis (A_b)

$$A_b = \pi r^2$$

Stap 5: Bereken die area van die geboë area (A_w)

$$\begin{aligned}A_w &= \pi r a\\ &= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}\end{aligned}$$

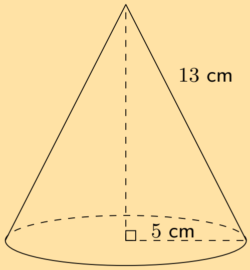
Stap 6: Vind die som van die areas A

$$\begin{aligned}A &= A_b + A_w\\ &= \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}\\ &= \pi r\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)\end{aligned}$$

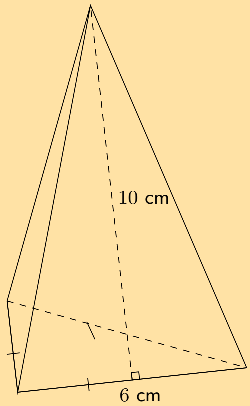
Oefening 13 – 4:

1. Vind die totale buite-oppervlakte van die volgende voorwerpe (korrek tot 1 desimale plek indien nodig):

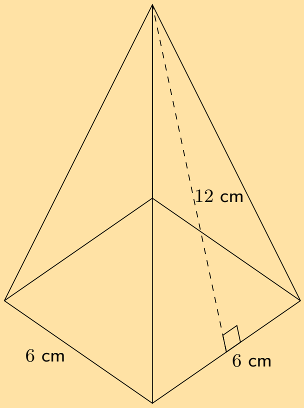
   a)



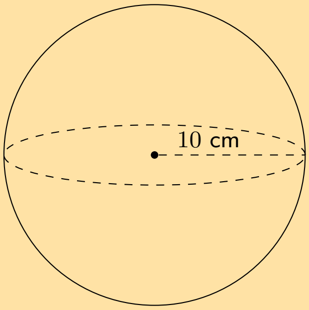
   b)



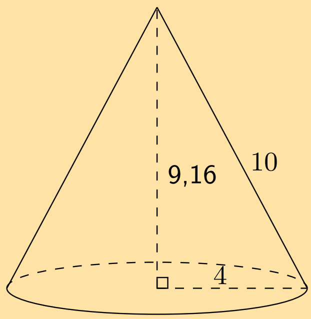
   c)



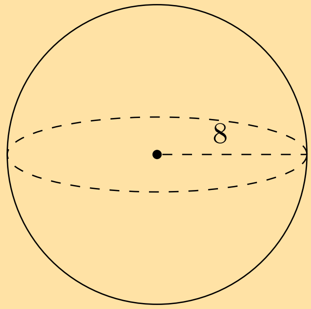
   d)



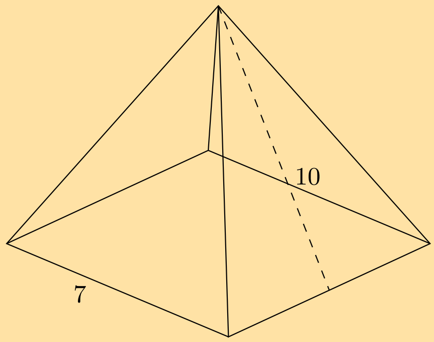
2. Hierdie figuur is 'n keël. Die vertikale hoogte van die keël is $H = 9{,}16$ eenhede en die skuinshoogte van die keël is $h = 10$ eenhede; die radius van die keël word getoon, $r = 4$ eenhede. Bereken die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



3. Die figuur hieronder is 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 8$ eenhede. Bereken die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



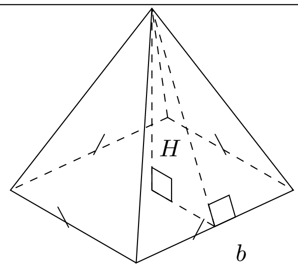
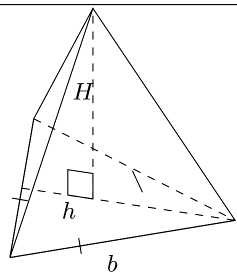
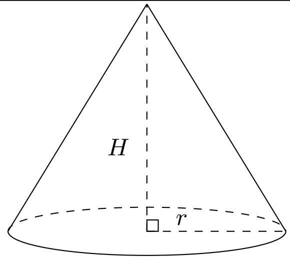
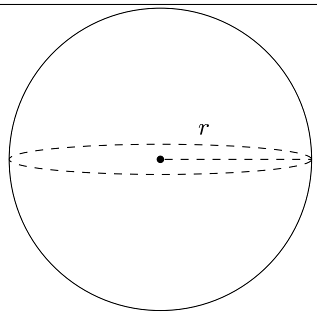
4. Die figuur hieronder toon 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die sye van die basis is almal 7 eenhede lank. Die vertikale hoogte van die piramide is 9,36 eenhede en die skuinshoogte van die piramide is 10 eenhede. Bepaal die buite-oppervlakte van die piramide.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2KFB 1b. 2KFC 1c. 2KFD 1d. 2KFF 2. 2KFG 3. 2KFH 4. 2KFJ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Vierkantige piramide		Volume $= \frac{1}{3} \times$ basisoppervlakte$\times$ hoogte van piramide $= \frac{1}{3} \times b^2 \times H$
Driehoekige piramide		Volume $= \frac{1}{3} \times$ basisoppervlakte$\times$ hoogte van piramide $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh \times H$
Regte keël		Volume $= \frac{1}{3} \times$ basisoppervlakte$\times$ hoogte van keël $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$
Sfeer		Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$

BESOEK:
Hierdie video gee ’n voorbeeld van die berekening van die volume van ’n sfeer.
Sien video: 2KFK at www.everythingmaths.co.za

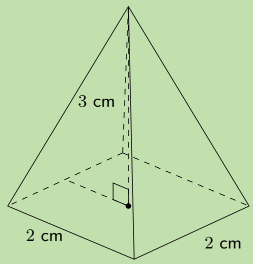
Uitgewerkte voorbeeld 12: Vind die volume van ’n vierkantige piramide

VRAAG

Vind die volume van ’n vierkantige piramide met ’n hoogte van 3 cm en ’n sylengte van 2 cm.

OPLOSSING

Stap 1: Skets en benoem die piramide



Stap 2: Kies die regte formule en substitueer die gegewe waardes

$$V = \frac{1}{3} \times b^2 \times H$$

Ons word $b = 2$ en $H = 3$ gegee, dus

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 \\ &= \frac{1}{3} \times 12 \\ &= 4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

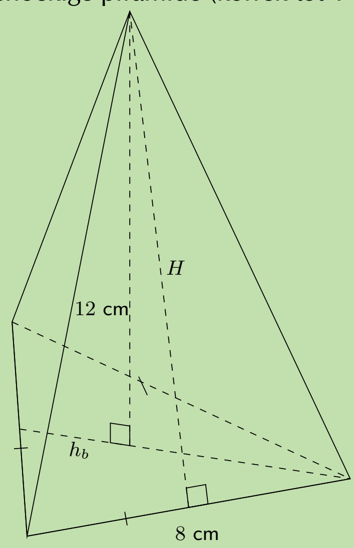
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die volume van die vierkantige piramide is 4 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Vind die volume van 'n driehoekige piramde

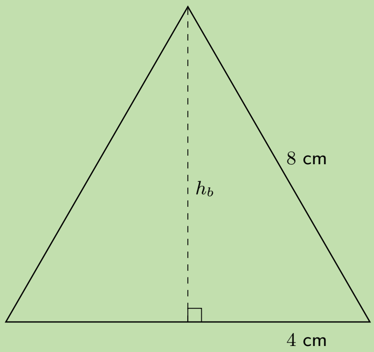
VRAAG

Vind die volume van die volgende driehoekige piramide (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Skets die basis-driehoek en bereken sy area



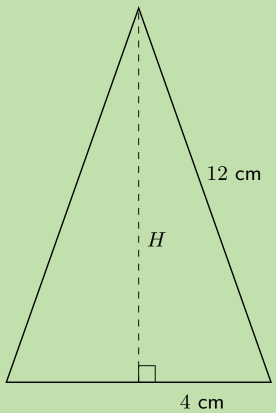
Die hoogte van die basis-driehoek (h_b) is:

$$\begin{aligned} 8^2 &= 4^2 + h_b^2 \\ \therefore h_b &= \sqrt{8^2 - 4^2} \\ &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Die area van die basis-driehoek is

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte basis-driehoek} &= \frac{1}{2}b \times h_b \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \\ &= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Skets die driehoekige syvlak en bereken die piramide se hoogte H



$$\begin{aligned} 12^2 &= 2\sqrt{3}^2 + H^2 \\ H^2 &= 130 \\ \therefore H &= \sqrt{130} \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die volume van die piramide

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh_b \times H \\ &= \frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times \sqrt{130} \\ &= 105{,}3 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

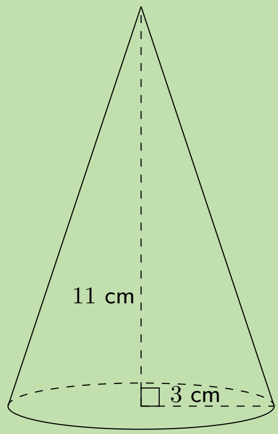
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die volume van die driehoekige piramide is 105,3 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Vind die volume van 'n keël

VRAAG

Vind die volume van die volgende keël (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Vind die area van die basis

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2 \\ &= \pi \times 3^2 \\ &= 9\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die volume

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H \\ &= \frac{1}{3} \times 9\pi \times 11 \\ &= 103{,}7 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

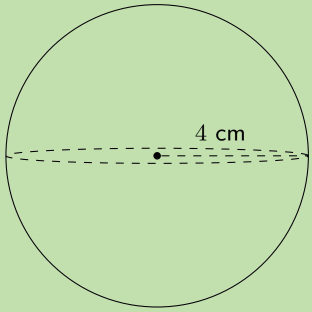
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die volume van die keël is 103,7 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Vind die volume van 'n sfeer

VRAAG

Vind die volume van die volgende sfeer (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die formule om die volume te vind

$$\begin{aligned}\text{volume} &= \frac{4}{3}\pi r^3\\ &= \frac{4}{3}\pi(4)^3\\ &= 268{,}1\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

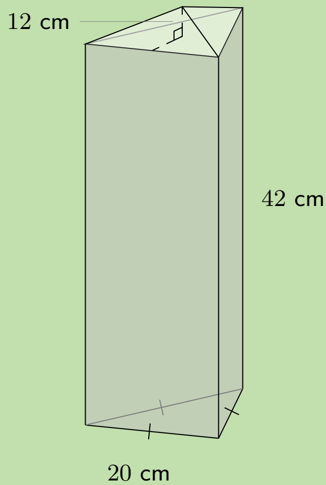
Stap 2: Skryf die finale antwoord

Die volume van die sfeer is 268,1 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Vind die volume van 'n saamgestelde of komplekse voorwerp

VRAAG

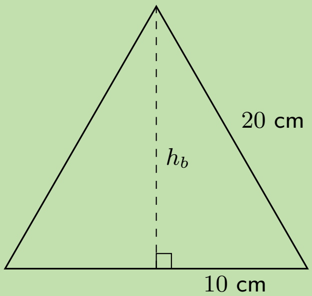
'n Driehoekige piramide word geplaas bo-op 'n driehoekige prisma, soos hieronder aangetoon. Die basis van die prisma is 'n gelyksydige driehoek met sylengte 20 cm en die hoogte van die prisma is 42 cm. Die piramide het 'n hoogte van 12 cm. Bereken die totale volume van die voorwerp.



OPLOSSING

Stap 1: Bereken die volume van die prisma

Vind eers die hoogte van die basis driehoek met die gebruik van die stelling van Pythagoras:



$$\begin{aligned} 20^2 &= 10^2 + h_b^2 \\ \therefore h_b &= \sqrt{20^2 - 10^2} \\ &= 10\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Vind vervolgens die area van die basis-driehoek:

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte van basis-driehoek} &= \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3} \\ &= 100\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Nou kan ons die volume van die prisma vind:

$$\begin{aligned} \therefore \text{volume van prisma} &= \text{oppervlakte van basis-driehoek} \times \text{hoogte van prisma} \\ &= 100\sqrt{3} \times 42 \\ &= 4200\sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die volume van die piramide

Die area van die basis-driehoek is gelyk aan die area van die basis van die piramide.

$$\begin{aligned} \therefore \text{volume van piramide} &= \frac{1}{3}(\text{basisoppervlakte}) \times H \\ &= \frac{1}{3} \times 100\sqrt{3} \times 12 \\ &= 400\sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die totale volume

$$\begin{aligned} \text{totale volume} &= 4200\sqrt{3} + 400\sqrt{3} \\ &= 4600\sqrt{3} \\ &= 7967{,}4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Dus is die totale volume van die voorwerp 7967,4 cm^3.

Uitgewerkte voorbeeld 17: Vind die buite-oppervlakte van 'n saamgestelde voorwerp

VRAAG

Met dieselfde saamgestelde voorwerp as in die vorige voorbeeld, word jy die addisionele inligting gegee dat die skuinshoogte h_s = 13,3 cm. Bereken nou die totale buite-oppervlakte van die voorwerp.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die buite-oppervlakte van elke blootgestelde sigbare vlak van die piramide

$$\begin{aligned}\text{oppervlakte van een vlak van piramide} &= \frac{1}{2}b \times h_s \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times 13{,}3 \\ &= 133 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Omdat die basis-driehoek gelyksydig is, het elke vlak dieselfde basis en dus dieselfde buite-oppervlakte. Dus die buite-oppervlakte vir elke vlak van die piramide is 133 cm^2.

Stap 2: Bereken die buite-oppervlakte van elke syvlak van die prisma

Elke syvlak van die prisma is 'n reghoek met basis $b = 20$ cm en hoogte $h_p = 42$ cm.

$$\begin{aligned}\text{oppervlakte van een syvlak van prisma} &= b \times h_p \\ &= 20 \times 42 \\ &= 840 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Omdat die basis-driehoek gelyksydig is, het elke sy van die prisma dieselfde area. Dus is die buite-oppervlakte van elke syvlak van die prisma 840 cm^2.

Stap 3: Bereken die totale buite-oppervlakte van die voorwerp

total buite-oppervlakte = basisoppervlakte van prisma + oppervlakte van syvlakke van prisma + oppervlakte van sigbare kant van piramide

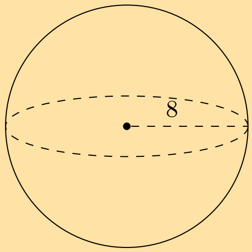
$$\begin{aligned}\text{total buite-oppervlakte} &= \left(100\sqrt{3}\right) + 3\,(840) + 3\,(133) \\ &= 3092{,}2 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Dus is die totale buite-oppervlakte (van die sigbare vlakke) van die voorwerp 3092,2 cm^2.

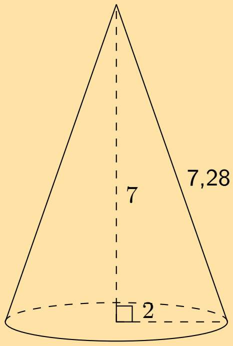
BESOEK:
Hierdie video toon 'n voorbeeld van die berekening van die volume van 'n saamgestelde voorwerp.
Sien video: 2KFM at www.everythingmaths.co.za

Oefening 13 – 5:

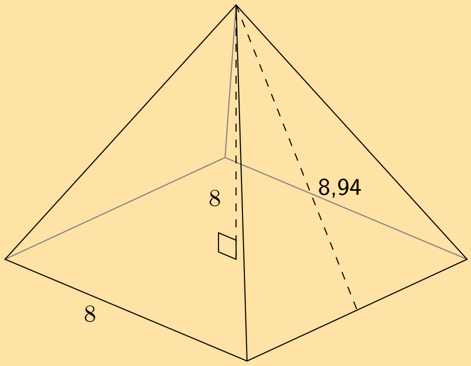
1. Die figuur hieronder toon 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 8$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



2. Die figuur is 'n konus. Die vertikale hoogte van die konus is $H = 7$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 7{,}28$ eenhede; die radius van die konus is getoon, $r = 2$ eenhede. Bereken die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

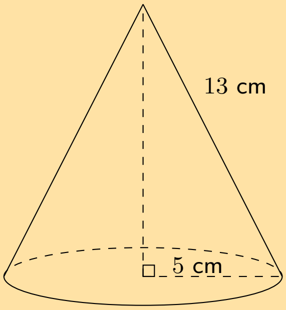


3. Die figuur hieronder is 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die vertikale hoogte van die piramide is $H = 8$ eenhede en die skuinssy is $h = 8{,}94$ eenhede; die lengte van die sy van die piramide is $b = 8$ eenhede. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

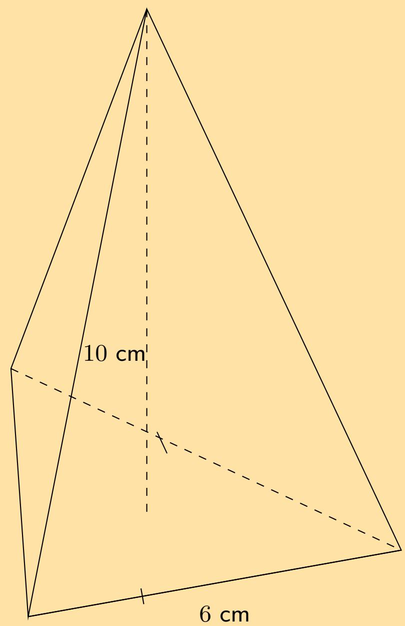


4. Vind die volume van die volgende voorwerpe (rond af tot 1 desimale plek indien nodig):

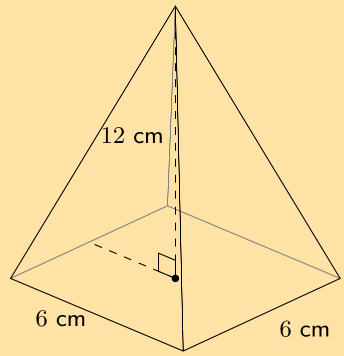
   a)



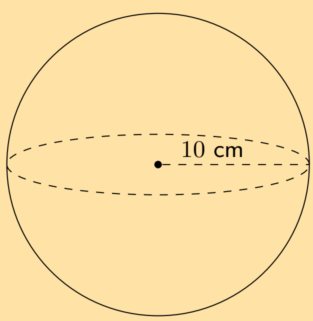
b)



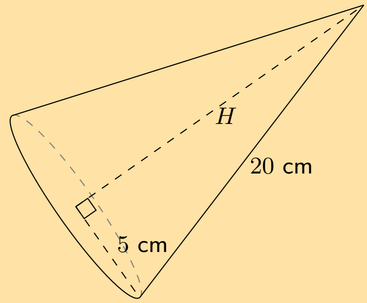
c)



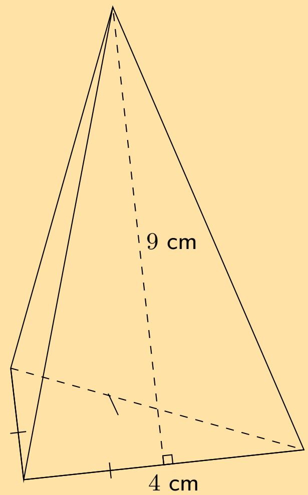
d)



5. Vind die buite-oppervlakte en volume van die keël wat hier getoon word. Rond jou antwoorde af tot die naaste heelgetal.

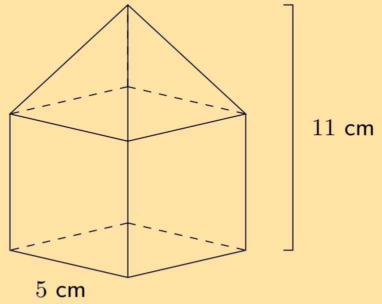


6. Bereken die volgende eienskappe vir die piramide hieronder getoon. Rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke.



   a) Buite-oppervlakte
   b) Volume

7. Die vaste liggaam hieronder bestaan uit 'n kubus en 'n vierkantige piramide. Vind sy volume en buite-oppervlakte (korrek tot 1 desimale plek):



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KFN 2. 2KFP 3. 2KFQ 4a. 2KFR 4b. 2KFS 4c. 2KFT
4d. 2KFV 5. 2KFW 6. 2KFX 7. 2KFY

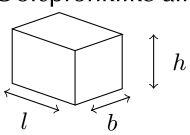
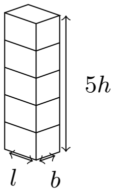
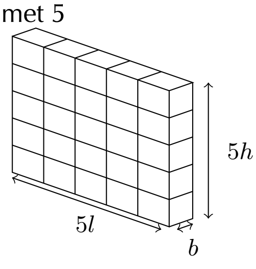
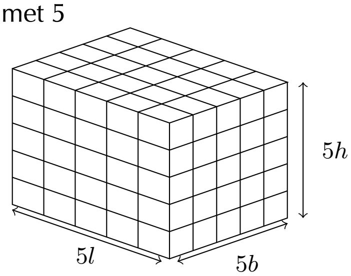
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

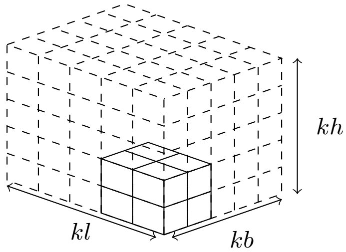
13.4 Die effek van vermenigvuldiging met 'n faktor k EMD7T

Wanneer een of meer afmetings van 'n prisma of 'n silinder vermenigvuldig word met 'n konstante, sal die buite-oppervlakte en die volume verander. Die nuwe buite-oppervlakte en volume kan bereken word deur die formules van die voorafgaande seksie te gebruik.

Dit is moontlik om 'n verband te sien tussen die verandering in afmetings en die gevolglike verandering in die buite-oppervlakte en volume. Hierdie verbande maak dit eenvoudig om die nuwe volume of buite-oppervlakte van 'n voorwerp, waarvan die afmetings op- of afgeskaal word, te bereken.

Beskou 'n reghoekige prisma met afmetings l, b en h. Hieronder vermenigvuldig ons een, twee en drie van sy afmetings met 'n konstante faktor van 5 en bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte.

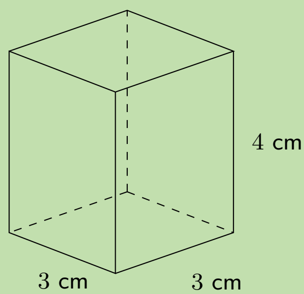
Afmetings	**Volume**	**Oppervlak**
Oorspronklike afmetings 	$\begin{aligned} V &= l \times b \times h \\ &= lbh \end{aligned}$	$\begin{aligned} A &= 2\left[(l \times h) + (l \times b) + (b \times h)\right] \\ &= 2\left(lh + lb + bh\right) \end{aligned}$
Vermenigvuldig een afmeting met 5 	$\begin{aligned} V_1 &= l \times b \times 5h \\ &= 5\left(lbh\right) \\ &= 5V \end{aligned}$	$\begin{aligned} A_1 &= 2\left[(l \times 5h) + (l \times b) + (b \times 5h)\right] \\ &= 2\left(5lh + lb + 5bh\right) \end{aligned}$
Vermenigvuldig twee afmetings met 5 	$\begin{aligned} V_2 &= 5l \times b \times 5h \\ &= 5.5\left(lbh\right) \\ &= 5^2 \times V \end{aligned}$	$\begin{aligned} A_2 &= 2\left[(5l \times 5h) + (5l \times b) + (b \times 5h)\right] \\ &= 2 \times 5\left(5lh + lb + bh\right) \end{aligned}$
Vermenigvuldig al drie afmetings met 5 	$\begin{aligned} V_3 &= 5l \times 5b \times 5h \\ &= 5^3\left(lbh\right) \\ &= 5^3 V \end{aligned}$	$\begin{aligned} A_3 &= 2\left[(5l \times 5h) + (5l \times 5b) + (5b \times 5h)\right] \\ &= 2\left(5^2 lh + 5^2 lb + 5^2 bh\right) \\ &= 5^2 \times 2\left(lh + lb + bh\right) \\ &= 5^2 A \end{aligned}$

Afmetings	Volume	Oppervlak
Vermenigvuldig al drie afmetings met k 	$V_k = kl \times kb \times kh$ $= k^3 (lbh)$ $= k^3 V$	$A_k = 2 [(kl \times kh) + (kl \times kb) + (kb \times kh)]$ $= k^2 \times 2 (lh + lb + bh)$ $= k^2 A$

Uitgewerkte voorbeeld 18: Bereken die nuwe afmetings van 'n reghoekige prisma

VRAAG

Beskou 'n reghoekige prisma met 'n hoogte van 4 cm en basislengte van 3 cm.



1. Bereken die buite-oppervlakte van volume.
2. Bereken die nuwe buite-oppervlakte (A_n) en volume (V_n) as die lengtes vermenigvuldig word met 'n konstante faktor van 3.
3. Druk die nuwe buite-oppervlakte en volume uit as 'n faktor van die oorspronklike buite-oppervlakte en volume.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die oorspronklike volume en buite-oppervlakte

$$\begin{aligned} V &= l \times b \times h \\ &= 3 \times 3 \times 4 \\ &= 36 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 [(l \times h) + (l \times b) + (b \times h)] \\ &= 2 [(3 \times 4) + (3 \times 3) + (3 \times 4)] \\ &= 66 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte

Twee van die afmetings word vermenigvuldig met 'n faktor van 3

$$\begin{aligned} V_n &= 3l \times 3b \times h \\ &= 3(3) \times 3(3) \times 4 \\ &= 324 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= 2 [(3l \times h) + (3l \times 3b) + (3b \times h)] \\ &= 2 [(3(3) \times 4) + (3(3) \times 3(3)) + (3(3) \times 4)] \\ &= 306 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Druk die nuwe afmetings uit as 'n faktor van die oorspronklike afmetings

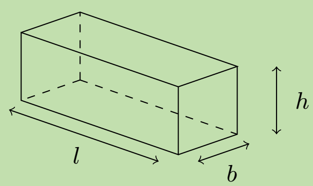
$$\begin{aligned} V &= 36 \\ V_n &= 324 \\ \frac{V_n}{V} &= \frac{324}{36} \\ &= 9 \\ \therefore V_n &= 9V \\ &= 3^2 V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 66 \\ A_n &= 306 \\ \frac{A_n}{A} &= \frac{306}{66} \\ \therefore A_n &= \frac{306}{66} A \\ &= \frac{51}{11} A \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 19: Vermenigvuldig die afmetings van 'n reghoekige prisma met k

VRAAG

Bewys dat as die hoogte van 'n reghoekige prisma met afmetings l, b en h is, vermenigvuldig word met 'n konstante waarde van k, sal die volume vermeerder met 'n faktor van k.



OPLOSSING

Stap 1: Bereken die oorspronklike volume

Die oorspronklike afmetings van l, b en h is gegee, en dus is die oorspronklike volume $V = l \times b \times h$.

Stap 2: Bereken die nuwe volume

Die nuwe afmetings is l, b, en kh en dus is die nuwe volume:

$$\begin{aligned} V_n &= l \times b \times (kh) \\ &= k\,(lbh) \\ &= kV \end{aligned}$$

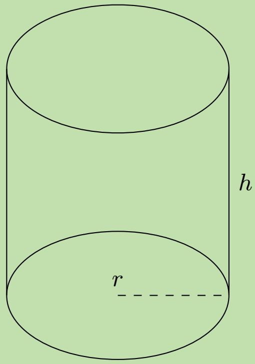
Stap 3: Skryf die finale antwoord

As die hoogte van 'n reghoekige prisma vermenigvuldig word met 'n konstante k, dan neem die volume ook toe met 'n faktor van k.

Uitgewerkte voorbeeld 20: Vermenigvuldiging van die afmetings van 'n silinder met k

VRAAG

Beskou 'n silinder met 'n radius van r en 'n hoogte van h. Bereken die nuwe volume en die buite-oppervlakte (uitgedruk in terme van r en h) as die radius vermenigvuldig word met 'n konstante faktor van k.



OPLOSSING

Stap 1: Bereken die oorspronklike volume en buite-oppervlakte

$$V = \pi r^2 \times h$$
$$A = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Stap 2: Bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte

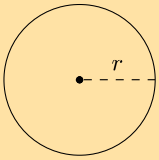
Die nuwe afmetings is kr en h.

$$\begin{aligned} V_n &= \pi(kr)^2 \times h \\ &= \pi k^2 r^2 \times h \\ &= k^2 \times \pi r^2 h \\ &= k^2 V \end{aligned}$$

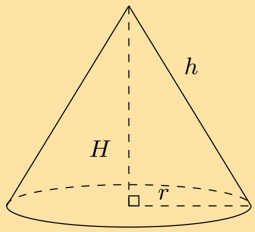
$$\begin{aligned} A_n &= \pi(kr)^2 + 2\pi\,(kr)\,h \\ &= \pi k^2 r^2 + 2\pi k r h \\ &= k^2\left(\pi r^2\right) + k\,(2\pi r h) \end{aligned}$$

Oefening 13 – 6:

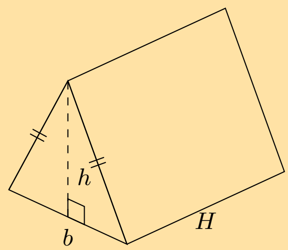
1. As die lengte van die radius van 'n sirkel 'n derde is van sy oorspronklike grootte, wat sal die area van die nuwe sirkel wees?



2. As die lengte van die radius van die basis en die hoogte van 'n konus verdubbel word, wat sal die buite-oppervlakte van die nuwe konus wees?



3. As die hoogte van 'n prisma verdubbel, met hoeveel sal sy volume vermeerder?
4. Beskryf die verandering in die volume van 'n reghoekige prisma as die
   a) lengte en breedte toeneem met 'n konstante faktor van 3.
   b) lengte, breedte en hoogte word vermenigvuldig met 'n konstante faktor van 3.
5. As die lengte van elke sy van 'n driehoekige prisma vervierdubbel, wat sal die volume van die nuwe driehoekige prisma wees?



6. Gegee 'n prisma met 'n volume van 493 cm^3 en 'n buite-oppervlakte van 6007 cm^2. Vind die nuwe buite-oppervlakte en volume vir prisma as al die afmetings vermeerder met 'n konstante faktor van 4.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2KFZ 2. 2KG2 3. 2KG3 4a. 2KG4 4b. 2KG5 5. 2KG6 6. 2KG7

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

13.5 Hoofstuk opsomming EMD7V

Sien aanbieding: 2KG8 at www.everythingmaths.co.za

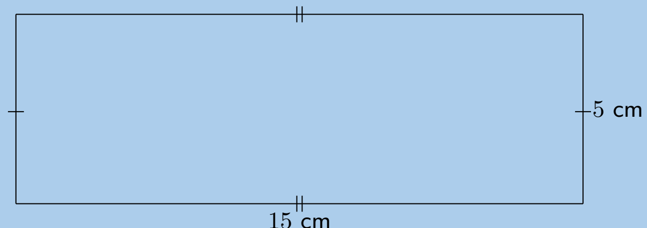
- Area (oppervlak) is die tweedimensionale ruimte binne die grense van 'n plat voorwerp. Dit word gemeet in vierkante eenhede.
- Oppervlakte formules
  - vierkant: s^2
  - reghoek: $b \times h$
  - driehoek: $\frac{1}{2}b \times h$
  - trapesium: $\frac{1}{2}(a+b) \times h$
  - parallelogram: $b \times h$
  - sirkel: πr^2

- ’n Regte prisma is ’n geometriese vaste liggaam met ’n veelhoek as basis en vertikale syvlakke loodreg op die basis.
- ’n Driehoekige prisma het ’n driehoek as sy basis, ’n reghoekige prisma het ’n reghoek as sy basis, en ’n kubus is ’n reghoekige prisma met al die sye dieselfde lengte. ’n Silinder is ’n ander tipe regte prisma met ’n sirkel as sy basis.
- Buite-oppervlakte is die totale area van die blootgestelde of buite oppervlakke van ’n prisma.
- ’n Net is die ontvouings -”plan” van ’n vaste liggaam.
- Volume is die drie dimensionele ruimte wat opgeneem word deur ’n voorwerp of liggaam, of die inhoud van die voorwerp. Dit word gemeet in kubieke eenhede.
- Volume formules vir prismas en silinders:
  - Volume van ’n reghoekige prisma: $l \times b \times h$
  - Volume van ’n driehoekige prisma: $\left(\frac{1}{2}b \times h\right) \times H$
  - Volume van ’n vierkantige prisma of kubus: s^3
  - Volume van ’n silinder: $\pi r^2 \times h$
- ’n Piramide is ’n geometriese vaste liggaam wat ’n veelhoek as sy basis het en syvlakke wat konvergeer na ’n punt wat die toppunt genoem word. Die syvlakke is nie loodreg op die basis nie.
- Die driehoekige piramide en vierkantige piramide kry hulle name van die vorm van hulle basis. Ons noem ’n piramide ’n ”regte piramide” as die lyn tussen die toppunt en die middel van die basis loodreg is op die basis. Keëls is soortelyk behalwe aan piramides dat hulle sirkels as basisie het in plaas van veelhoeke. Sfere is vaste liggame wat perfek rond is en dieselfde lyk vanuit enige rigting.
- Buite-oppervlakte formules vir regte piramides, regte keëls en sfere:
  - vierkantige piramide: $b\left(b + 2h\right)$
  - driehoekige piramide: $\frac{1}{2}b\left(h_b + 3h_s\right)$
  - regte keël: $\pi r\left(r + h_s\right)$
  - sfeer: $4\pi r^2$
- Volume formules vir regte piramides, regte keëls en sfere:
  - vierkantige piramide: $\frac{1}{3} \times b^2 \times H$
  - driehoekige piramide: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh \times H$
  - regte keël: $\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$
  - sfeer: $\frac{4}{3}\pi r^3$
- Vermenigvuldiging van een of meer afmetings van ’n prisma of ’n silinder met ’n konstante k beïnvloed die buite-oppervlakte en volume.

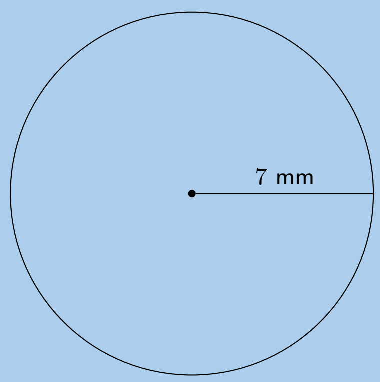
End of chapter Exercise 13 – 7:

1. Vind die area van elk van die vorme getoon. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke waar nodig.

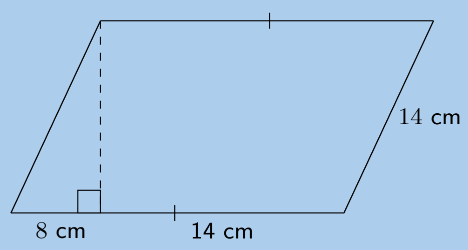
   a)



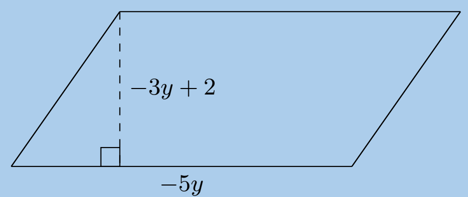
b)



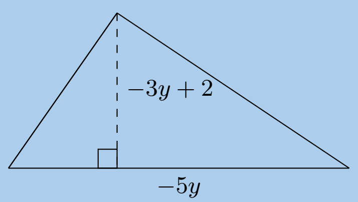
c)



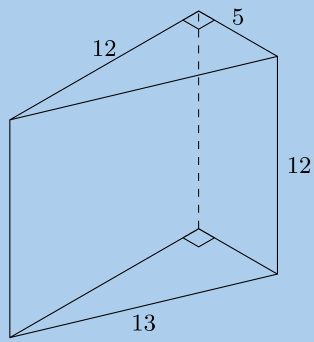
2. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van y. Die afmetings van die figuur is benoem $-5y$ en $-3y+2$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



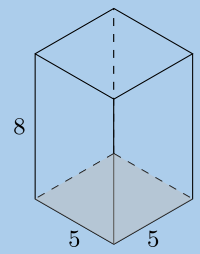
b) Vind 'n uitdrukking vir die oppervlakte van hierdie figuur in terme van y. Die figuur het afmetings van $-5y$ en $-3y+2$, soos benoem. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



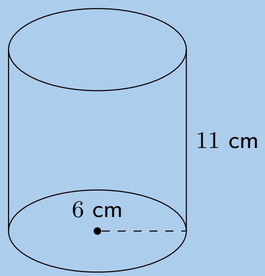
3. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die driehoeke, wat beide regte driehoeke is, het sye wat 5, 12 en 13 eenhede lank is. Vind die buite-oppervlakte van die figuur.



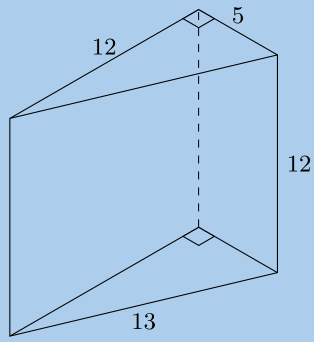
4. Hierdie figuur is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 5 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 8 en 5 eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur.



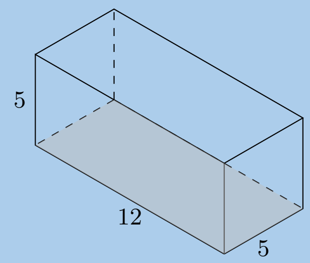
5. 'n Silinder word hieronder gewys. Die hoogte van die silinder is 11 eenhede; die radius van die silinder is $r = 6$ eenhede, soos getoon. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



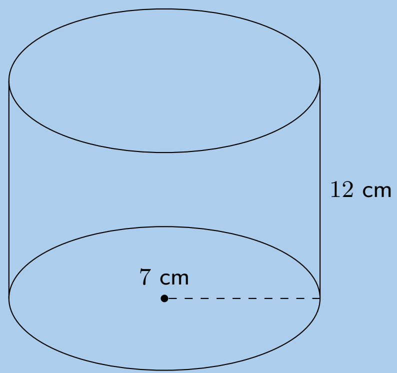
6. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die driehoeke, wat beide regte hoeke bevat, het sye van 5, 12 en 13 eenhede. Bepaal die volume van die figuur.



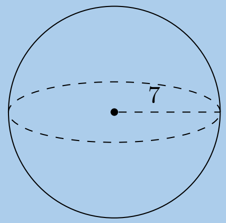
7. Die figuur hieronder is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 5 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 12 en 5 eenhede. Bereken die volume van die figuur.



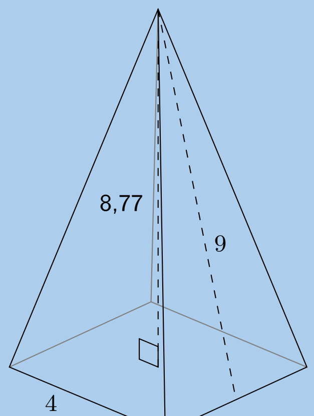
8. Die figuur hieronder toon 'n silinder. Die hoogte van die silinder is 12 cm; die radius van die silinder is $r = 7$ cm. Bereken die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke



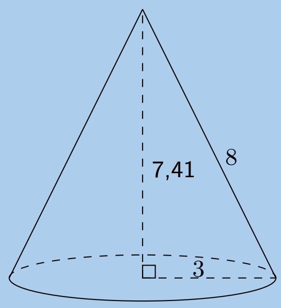
9. Die figuur hieronder is 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 7$ eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



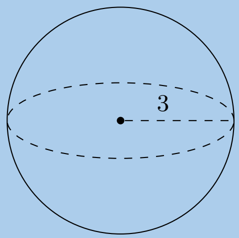
10. Die figuur hieronder toon 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die sye van die basis is almal 4 eenhede lank. Die vertikale hoogte van die piramide is 8,77 eenhede en die skuinshoogte van die piramide is 9 eenhede. Bepaal die buite-oppervlakte van die piramide.



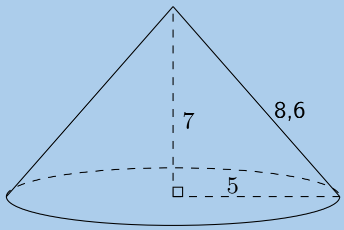
11. Die figuur hier is 'n kegel. Die vertikale hoogte van die kegel is $H = 7{,}41$ eenhede en die skuinshoogte van die kegel is $h = 8$ eenhede; die radius van die kegel word getoon, $r = 3$ eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



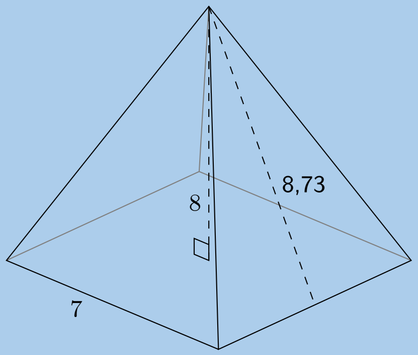
12. Die figuur hieronder toon 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 3$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



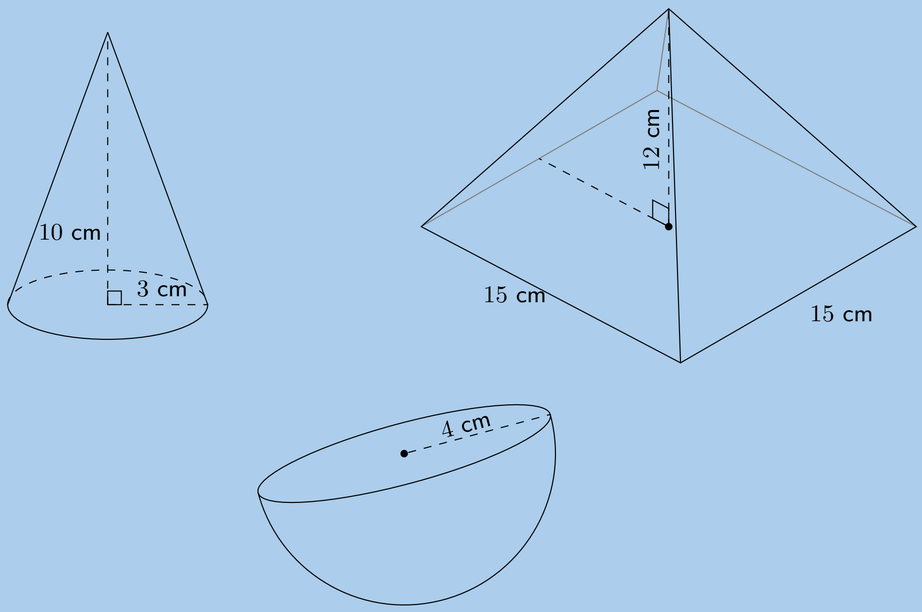
13. Die figuur hier is 'n keël. Die vertikale hoogte van die keël is $H = 7$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 8{,}60$ eenhede; die radius van die keël word getoon, $r = 5$ eenhede. Vind die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



14. Die figuur hieronder is 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die vertikale hoogte van die piramide is $H = 8$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 8{,}73$ eenhede; die sye van die basis van die piramide is $b = 7$ eenhede. Vind die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

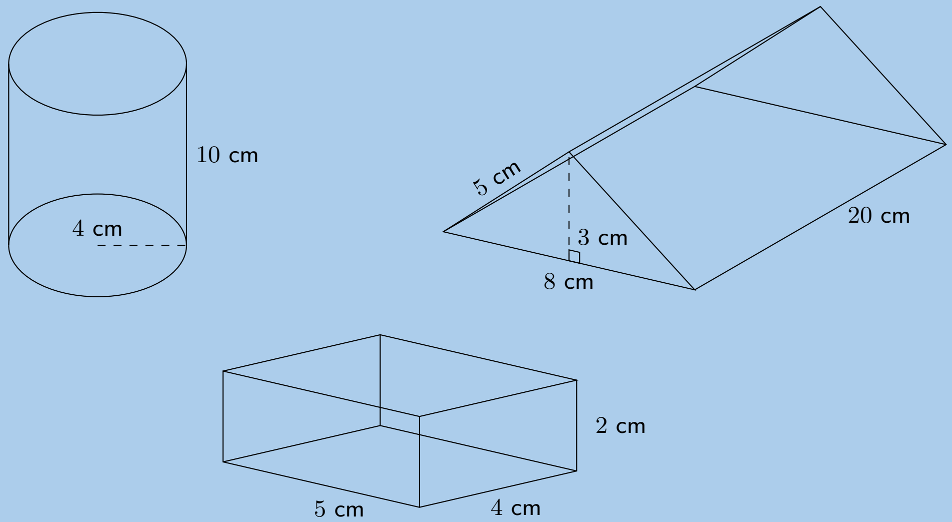


15. Beskou die vaste liggame hieronder:



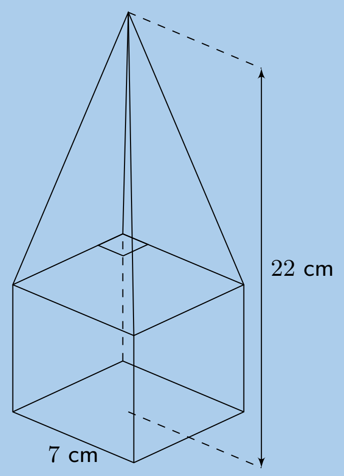
   a) Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.
   b) Bereken die volume van elke vaste liggaam.

16. As die lengte van elke sy van ’n vierkant ’n kwart is van sy oorspronklike grootte, wat sal die oppervlakte van die nuwe vierkant wees?
17. As die lengte van elke sy van ’n vierkantige piramide verminder word na ’n derde van die oorspronklike lengte, wat sal die buite-oppervlakte van die nuwe vierkantige piramide wees?
18. As die lengte van die radius van die basis en die hoogte van ’n silinder gehalveer word, wat sal die volume van die nuwe silinder wees?
19. Beskou die vaste liggame hieronder en antwoord die vrae wat volg (korrek tot 1 desimale plek, indien nodig):



   a) Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.
   b) Bereken die volume van elke vaste liggaam.
   c) As elke afmeting van die vaste liggame toeneem met ’n faktor van 3, bereken die nuwe buite-oppervlakte van elke vorm.
   d) As elke afmeting van die vorme toeneem met ’n faktor van 3, bereken die nuwe volume van elke vaste liggaam.

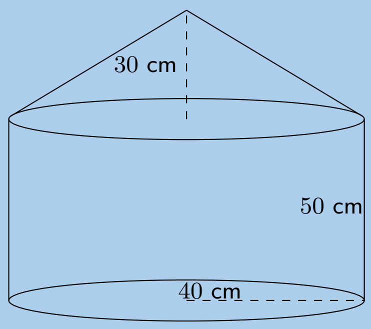
20. Die vaste liggaam hieronder bestaan uit ’n kubus en ’n vierkantige piramide. Beantwoord die volgende:



a) Vind die buite-oppervlakte van die vorm getoon. Gee jou antwoorde tot twee desimale plekke.

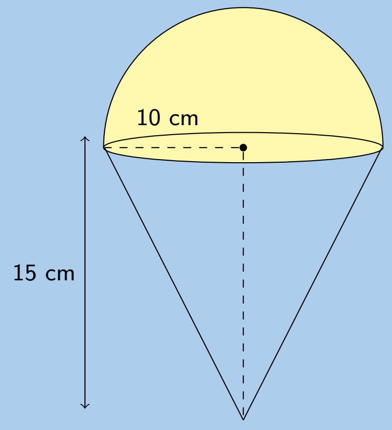
b) Bepaal nou die volume van die vorm. Gee jou antwoord tot die naaste heelgetalwaarde.

21. Bereken die volume en die totale buite-oppervlakte van die vaste liggaam hieronder (korrek tot 1 desimale plek):

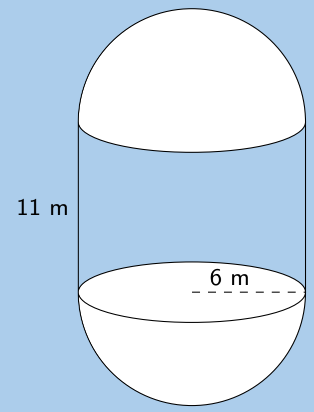


22. Vind die volume en buite-oppervlakte van die volgende saamgestelde vorme.

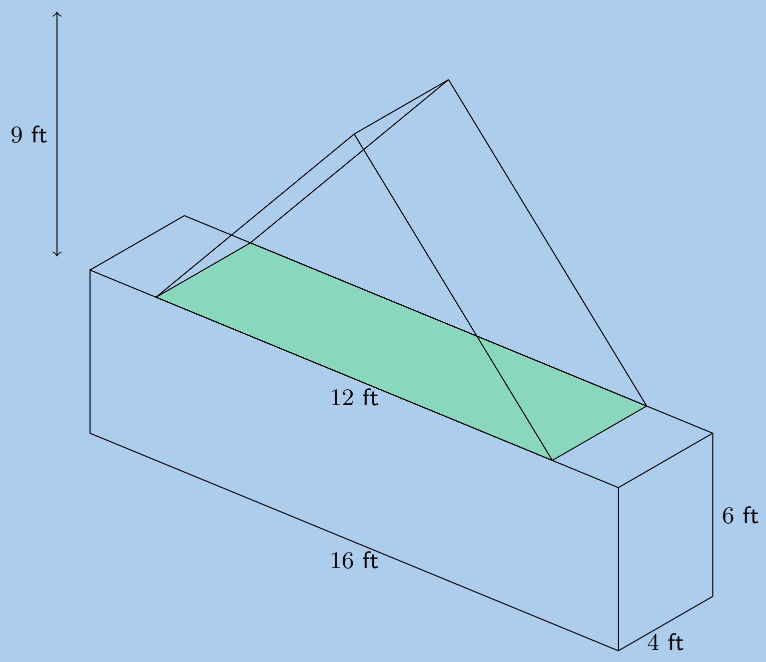
a)



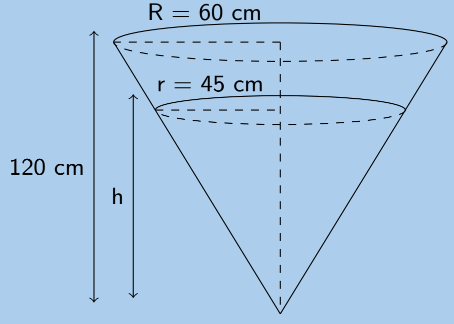
b)



c)



23. 'n Roomyshorinkie (regte keël) het 'n radius van 3 cm en 'n hoogte van 12 cm. 'n Halwe bolletjie roomys (hemisfeer) word bo-op die horinkie geskep. As die roomys smelt, sal dit in die horinkie pas? Toon al jou werk.
24. 'n Houer wat gevul is met petrol het die vorm van 'n omgekeerde regte sirkelvormige keël met hoogte 120 cm en die radius van die basis is 60 cm. 'n Sekere hoeveelheid brandstof word uitgetap uit die houer sodat brandstof tot op 'n diepte van h cm oor is.

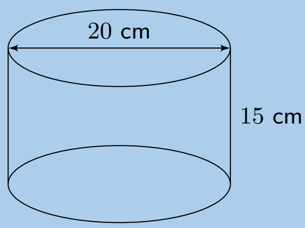


a) Toon dat $h = 90$ cm.

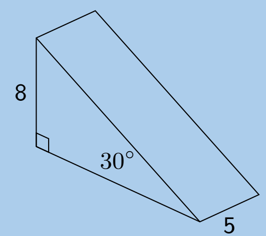
b) Bepaal die volume van die brandstof wat uitgetap is. Druk jou antwoord uit in liters as 1 l = 1000 cm^3

25. Vind die **volume** en **buite-oppervlakte** van die volgende prismas.

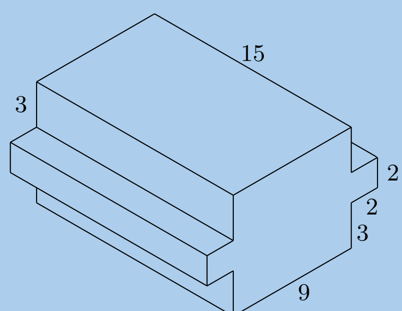
a)



b)

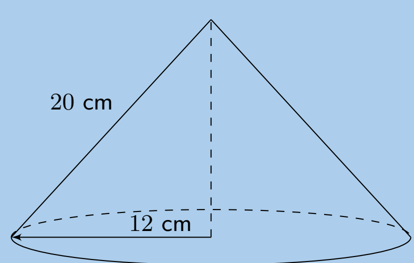


c)

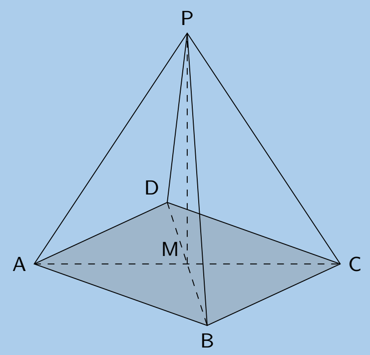


26. Bepaal die volume van die volgende:

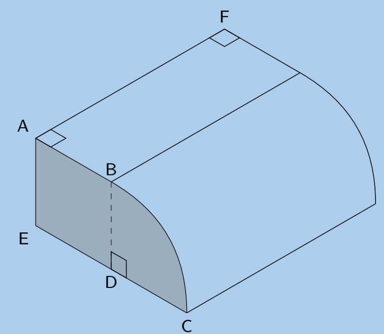
a)



b) $ABCD$ is 'n vierkant, $AC = 12$ cm, $AP = 10$ cm.

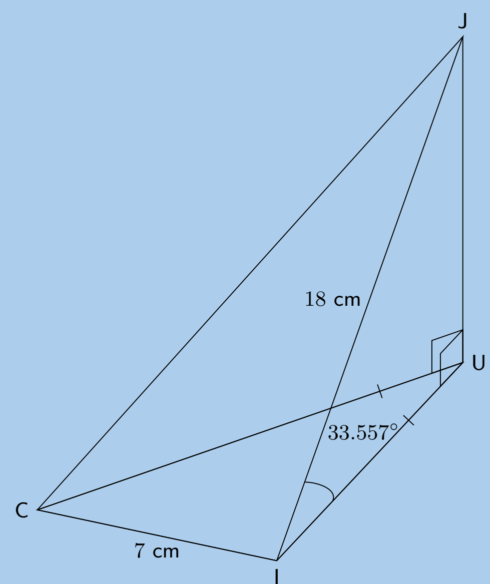


27. Die prisma hier langsaan het die volgende afmetings:
$AB = 4$ eenhede, $EC = 8$ eenhede, $AF = 10$ eenhede. BC is 'n boog van 'n sirkel met middelpunt D. $AB \parallel EC$.



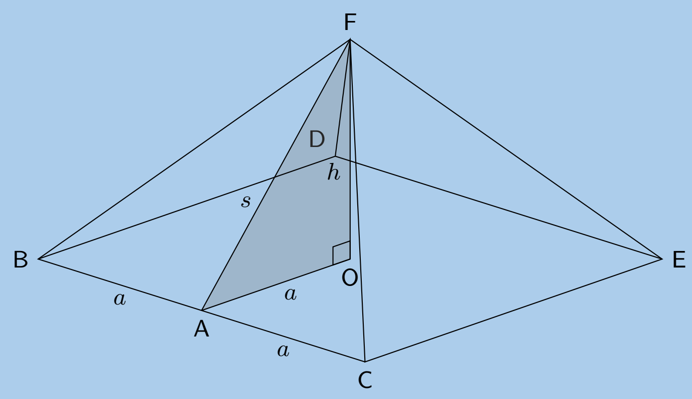
a) Verduidelik hoekom BD, die radius van die sirkelboog BC, 4 eenhede is.
b) Bereken die oppervlakte van die gearseerde gedeelte.
c) Vind die volume van die prisma.

28. 'n Koeldrankhouer is gemaak in die vorm van 'n piramide met 'n gelykbenige driehoekige basis. Dit staan bekend as 'n tetrahedron. Die hoogtehoek na die bopunt van die houer, is 33,557°. $CI = 7$ cm; $JI = 18$ cm.



a) i. Wys dat die lengte UI, 15 cm is.
ii. Vind die hoogte van JU (tot die naaste eenheid).
iii. Bereken die area van $\triangle CUI$.
Wenk: konstrueer 'n loodregte lyn van U tot CI
iv. Vind die volume van die houer
b) Die houer word gevul met sap sodat 'n 11,85% opening vir lug gelaat word. Bepaal die volume van die sap.

29. Hieronder is 'n diagram van Die Groot Piramide.
Dit is 'n vierkantige piramide en O is die middelpunt van die vierkant.



$BA = AC = a$ en $OF = h =$ hoogte van die piramide. Die lengte van die sy van die piramide is $BC = 755{,}79$ voet en die hoogte van die piramide is 481,4 voet.

a) Bepaal die area van die basis van die piramide in terme van a.
b) Bereken $AF(= s)$ tot 5 desimale plekke.
c) Van jou berekening in vraag (b), bepaal $\frac{s}{a}$.
d) Bepaal die volume en buite-oppervlakte van die piramide.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KG9	2. 2KGB	3. 2KGC	4. 2KGD	5. 2KGF	6. 2KGG
7. 2KGH	8. 2KGJ	9. 2KGK	10. 2KGM	11. 2KGN	12. 2KGP
13. 2KGQ	14. 2KGR	15a. 2KGS	15b. 2KGT	16. 2KGV	17. 2KGW
18. 2KGX	19a. 2KGY	19b. 2KGZ	19c. 2KH2	19d. 2KH3	20. 2KH4
21. 2KH5	22a. 2KH6	22b. 2KH7	22c. 2KH8	23. 2KH9	24. 2KHB
25a. 2KHC	25b. 2KHD	25c. 2KHF	26a. 2KHG	26b. 2KHH	27. 2KHJ
28. 2KHK	29. 2KHM				

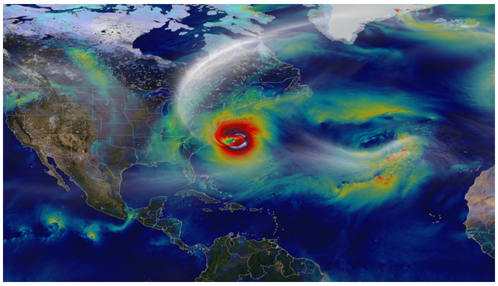
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 14

Waarskynlikheid

Ons gebruik waarskynlikheid om onsekere gebeurtenisse te beskryf. As jy per ongeluk ’n sny brood laat val, weet jy nie of dit gaan val met die gesmeerde kant boontoe of ondertoe nie. Wanneer jou gunsteling sportspan ’n wedstryd speel, weet jy nie of hulle gaan wen nie. Wanneer die weervoorspeller sê daar is ’n 40% kans van reën môre, mag dit gebeur dat jy natreën, of jy mag droog bly. Onsekerheid kom tot ’n mindere of meerdere mate voor in elke gebeurtenis rondom ons en in elke besluit wat ons maak.

Ons sal in hierdie hoofstuk sien dat al hierdie onsekerhede kan beskryf word deur die reëls van die waarskynlikheidsteorie te gebruik en dat ons besliste gevolgtrekkings kan maak oor onseker prosesse.



Figuur 14.1: Bepaling van die pad van ’n superstorm. Meteoroloë gebruik rekenaar sagteware om hulle te help om storms se paaie te volg en om die weer te voorspel.

Ons sal drie voorbeelde van onseker prosesse gebruik om jou te help om die betekenis van verskillende woorde in waarskynlikheidsteorie te verstaan: opskiet van ’n muntstuk, rol van ’n dobbelsteen, en ’n sokkerwedstryd.

BESOEK:
Die volgende video lei die konsepte in wat gebruik word in waarskynlikheid.
Sien video: 2KHN at www.everythingmaths.co.za

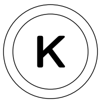
DEFINISIE: *Eksperiment*

’n Eksperiment verwys na onseker prosesse.

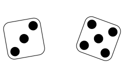
DEFINISIE: *Uitkoms*

’n Uitkoms van ’n eksperiment is ’n enkele resultaat van daardie eksperiment.

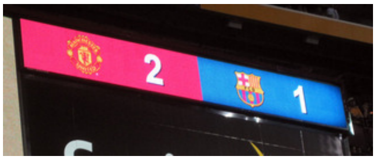
Eksperiment 1: ’n Muntstuk word opgeskiet en dit land met kop (K) of stert (S) boontoe. ’n Voorbeeld van ’n uitkoms van die opskiet van ’n muntstuk is dat dit land met kop boontoe:



Eksperiment 2: Twee dobbelstene word gerol en die totale aantal kolletjies bymekaargetel. ’n Voorbeeld van ’n uitkoms as die dobbelsteen tweemaal gerol word:



Eksperiment 3: Twee spanne speel 'n sokkerwedstryd en ons stel belang in die finale telling. 'n Voorbeeld van die uitkoms van 'n sokkerwedstryd:

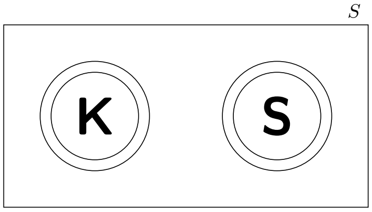


DEFINISIE: *Steekproefruimte*

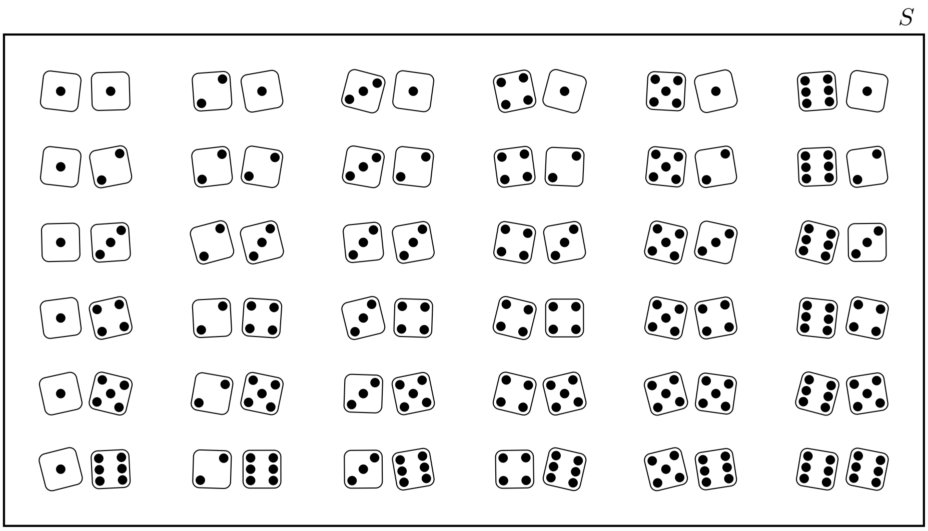
Die steekproefruimte van 'n eksperiment is die versameling van moontlike uitkomste van daardie eksperiment. Die steekproefruimte word aangedui met die simbool S en die grootte van die steekproefruimte (die totale aantal moontlike uitkomste) word aangedui met $n(S)$

Selfs al is ons gewoonlik geïnteresseerd in die uitkoms van 'n eksperiment, wil ons ook weet wat die ander uitkomste kon gewees het. Laat ons kyk na die steekproefruimte van elk van ons drie eksperimente.

Eksperiment 1: Aangesien 'n muntstuk slegs op een van twee maniere kan land (ons laat die moontlikheid dat die muntstuk op sy kant kan val, buite rekening), is die steekproefruimte die versameling $S = \{\text{K}; \text{S}\}$. Die grootte van die steekproefruimte van die muntstuk se opskiet is $n(S) = 2$:



Eksperiment 2: Elk van die dobbelstene kan land op 'n getal van 1 tot 6. In hierdie eksperiment is die steekproefruimte van die al die moontlike uitkomste, elke moontlike kombinasie van die 6 getalle op die eerste dobbelsteen met die 6 getalle op die tweede dobbelsteen. Dit gee 'n totaal van $n(S) = 6 \times 6 = 36$ moontlike uitkomste. Die figuur hieronder toon al die uitkomste in die steekproefruimte van die rol van twee dobbelstene:



Eksperiment 3: Elke sokkerspan kan 'n heelgetaltelling kry van 0 of meer. Gewoonlik verwag ons nie 'n telling van veel meer as 5 doele nie, maar daar is geen rede hoekom dit nie kan gebeur nie. Dus die steekproefruimte van die eksperiment bestaan uit alle moontlike kombinasies van twee nie-negatiewe heelgetalle. Die figuur hieronder toon al die moontlikhede. Aangesien ons nie die telling van 'n span beperk nie, is die steekproefruimte oneindig groot:

S

0 – 0	1 – 0	2 – 0	3 – 0	$\cdots$
0 – 1	1 – 1	2 – 1	3 – 1	$\cdots$
0 – 2	1 – 2	2 – 2	3 – 2	$\cdots$
0 – 3	1 – 3	2 – 3	3 – 3	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$

NOTA:
Wanneer ons 'n steekproefruimte wat die reële getalle bevat voorstel, kan ons al die uitkomste in die steekproefruimte skryf: $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ of ons kan die steekproefruimte voorstel as: $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 10\}$.

DEFINISIE: *Gebeurtenis*

'n Gebeurtenis is 'n spesifieke stel uitkomste van 'n eksperiment waarin jy geïnteresseerd is. 'n Gebeurtenis word aangedui met die letter E en die aantal uitkomste in die gebeurtenis met $n(E)$.

Eksperiment 1: Laat ons sê dat ons wil hê dat die muntstuk moet land met kop boontoe. Hier bevat die gebeurtenis 'n enkele uitkoms: $E = \{\text{K}\}$. Die grootte van die gebeurtenisversameling is $n(E) = 1$.

Eksperiment 2: Laat ons sê ons wil hê die som van die dobbelstene moet 8 wees. In hierdie geval is die gebeurtenisversameling:

$$E = \{(\text{⚁}\,\text{⚅}); (\text{⚂}\,\text{⚄}); (\text{⚃}\,\text{⚃}); (\text{⚄}\,\text{⚂}); (\text{⚅}\,\text{⚁})\}$$

aangesien dit al die moontlike maniere bevat om 8 kolletjies te kry met 2 dobbelstene. Die grootte van die gebeurtenis is $n(E) = 5$.

Eksperiment 3: Ons sal graag wil weet of die eerste span gaan wen. Vir hierdie gebeurtenis om te gebeur moet die eerste telling groter wees as die tweede.

$E = \{(1; 0); (2; 0); (2; 1); (3; 0); (3; 1); (3; 2); ...\}$. Hierdie gebeurtenisversameling is oneindig groot.

14.1 Teoretiese waarskynlikheid EMD7W

DEFINISIE: *Waarskynlikheid*

'n Waarskynlikheid is 'n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe waarskynlik dit is dat die gebeurtenis sal plaasvind.

Ons kan waarskynlikhede beskryf op drie maniere:

1. As 'n reële getal tussen 0 en 1. Byvoorbeeld 0,75.
2. As 'n persentasie. Byvoorbeeld 0,75 kan geskryf word as 'n 75%.
3. As 'n breuk. Byvoorbeeld 0,75 kan ook geskryf word as $\frac{3}{4}$.

Ons let die volgende op met betrekking tot waarskynlikhede:

- 'n Waarskynlikheid van 0 beteken dat die gebeurtenis nooit sal plaasvind nie.
- 'n Waarskynlikheid van 1 beteken dat die gebeurtenis altyd sal plaasvind.
- 'n Waarskynlikheid van 0,5 beteken dat 'n gebeurtenis die helfte van die tyd sal voorkom, of 1 keer uit elke 2.

Wanneer al die moontlike uitkomste van die eksperiment 'n gelyke kans het om te gebeur, kan ons die presiese teoretiese waarskynlikheid van die gebeurtenis bereken. Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is die ratio of verhouding tussen die aantal uitkomste in die gebeurtenisversameling en die getal moontlike uitkomste in die steekproefruimte.

$$P\left(E\right) = \frac{n\left(E\right)}{n\left(S\right)}$$

BESOEK:
Die volgende video toon 'n voorbeeld van die berekening van die teoretiese waarskynlikhede van 'n gebeurtenis.
Sien video: 2KHP at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Teoretiese waarskynlikhede

VRAAG

Wat is die teoretiese waarskynlikheid van elke van die gebeurtenisse in die eerste twee van ons drie eksperimente?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die waarde neer van $n\left(S\right)$

Eksperiment 1 (muntstuk): $n\left(S\right) = 2$

Eksperiment 2 (dobbelstene): $n\left(S\right) = 36$

Stap 2: Skryf die grootte neer van die gebeurtenisversameling

Eksperiment 1: $n\left(E\right) = 1$

Eksperiment 2: $n\left(E\right) = 5$

Stap 3: Bereken die teoretiese waarskynlikheid

Eksperiment 1:

$$P\left(E\right) = \frac{n\left(E\right)}{n\left(S\right)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Eksperiment 2:

$$P\left(E\right) = \frac{n\left(E\right)}{n\left(S\right)} = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8}$$

Let daarop dat ons nie die teoretiese waarskynlikheid van die derde eksperiment oorweeg nie. Die derde eksperiment is anders as die eerste twee in 'n belangrike opsig, naamlik dat al die moontlike uitkomste (al die finale tellings) is nie ewe moontlik nie. Ons weet byvoorbeeld dat 'n sokkertelling van 1-1 baie algemeen is, terwyl 'n telling van 11-15 uiters raar is. Omdat al die uitkomste nie ewe moontlik is nie, kan ons nie die ratio tussen $n(E)$ en $n(S)$ gebruik om die teoretiese waarskynlikheid dat een span sal wen te bereken nie.

Oefening 14 – 1:

1. 'n Leerder wil die term "gebeurtenis" verstaan. Dus rol die leerder 2 dobbelstene in die hoop om 'n totaal van 8 te kry. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term "gebeurtenis"?
   - gebeurtenisversameling $= \{(4;4)\}$
   - gebeurtenisversameling $= \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$
   - gebeurtenisversameling $= \{(2;6);(6;2)\}$
2. 'n Leerder wil die term "steekproefruimte" verstaan. Dus rol die leerder 'n dobbelsteen. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term "steekproefruimte"?
   - $\{1;2;3;4;5;6\}$
   - $\{K;S\}$
   - $\{1;3;5\}$
3. 'n Leerder kry 'n 6-kantige dobbelsteen en rol dit dan eenmaal op 'n tafel. Wat is die waarskynlikheid dat die dobbelsteen op 'n 1 of 'n 2 sal land?
   Skryf jou antwoord as 'n vereenvoudigde breuk.
4. 'n Leerder kry 'n handboek wat 100 bladsye het. Sy kies dan een bladsy van die handboek. Wat is die waarskynlikheid dat die bladsy 'n onewe bladsynommer het?
   Skryf jou antwoord as 'n desimaal (korrek tot 2 desimale plekke).
5. Ewe getalle van 2 tot 100 word op kaarte geskryf. Wat is die waarskynlikheid om 'n veelvoud van 5 te kies as 'n kaart willekeurig gekies word?
6. 'n Sak bevat 6 rooi balle, 3 blou balle, 2 groen balle en 1 wit bal. 'n Bal word willekeurig gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat dit:
   a) rooi is
   b) blou of wit is
   c) nie groen is nie
   d) nie groen of rooi is nie
7. 'n Speelkaart word willekeurig gekies uit 'n pak van 52 kaarte. Bepaal die waarskynlikheid dat dit:
   a) die 2 van harte is
   b) 'n rooi kaart is
   c) 'n prentkaart is
   d) 'n aas is
   e) 'n getal kleiner as 4 is

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KHQ 2. 2KHR 3. 2KHS 4. 2KHT 5. 2KHV 6. 2KHW
7. 2KHX

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.2 Relatiewe frekwensie EMD7X

DEFINISIE: *Relatiewe frekwensie*

Die relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis is gedefinieer as die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom gedurende eksperimentele proefnemings, gedeel deur die totale aantal proefnemings wat uitgevoer is.

Die relatiewe frekwensie is nie 'n teoretiese hoeveelheid nie, maar 'n eksperimentele een. Ons moet 'n eksperiment 'n aantal kere herhaal en tel hoeveel kere die uitkoms van die proefneming in die gebeurtenisversameling voorkom. Omdat dit eksperimenteel is, is dit moontlik om elke keer wat ons die eksperiment herhaal, 'n ander relatiewe frekwensie te kry.

BESOEK:
Die volgende video verduidelik die konsep van relatiewe frekwensie deur gebruik te maak van die gooi van 'n dobbelsteen.
Sien video: 2KHY at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Relatiewe frekwensie en teoretiese waarskynlikheid

VRAAG

Ons skiet 'n muntstuk 30 keer op en neem die uitkoms waar. Die resultaat van die proefnemings word getoon in die tabel hieronder.

proefneming	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
uitkoms	K	S	S	S	K	S	K	K	K	S
proefneming	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
uitkoms	K	S	S	K	S	S	S	K	S	S
proefneming	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
uitkoms	K	K	K	S	K	S	K	S	S	S

Wat is die relatiewe frekwensie om kop te kry na elke proefneming en hoe vergelyk dit met die teoretiese waarskynlikheid om kop te kry?

OPLOSSING

Stap 1: Tel die aantal positiewe uitkomste

'n Positiewe uitkoms is wanneer die uitkoms in ons gebeurtenisversameling val. Die tabel toon 'n lopende telling (na elke proef t) van die aantal positiewe uitkomste p wat ons waargeneem het. Byvoorbeeld, na $t = 20$ proefnemings het ons 8 keer kop gesien en 12 keer stert en dus is die positiewe uitkomstelling $p = 8$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	9	10	11	11	12	12	13	13	13	13

Stap 2: Bereken die relatiewe frekwensie

Aangesien die relatiewe frekwensie gedefinieer is as die verhouding tussen die aantal positiewe proefnemings en die totale aantal proefnemings,

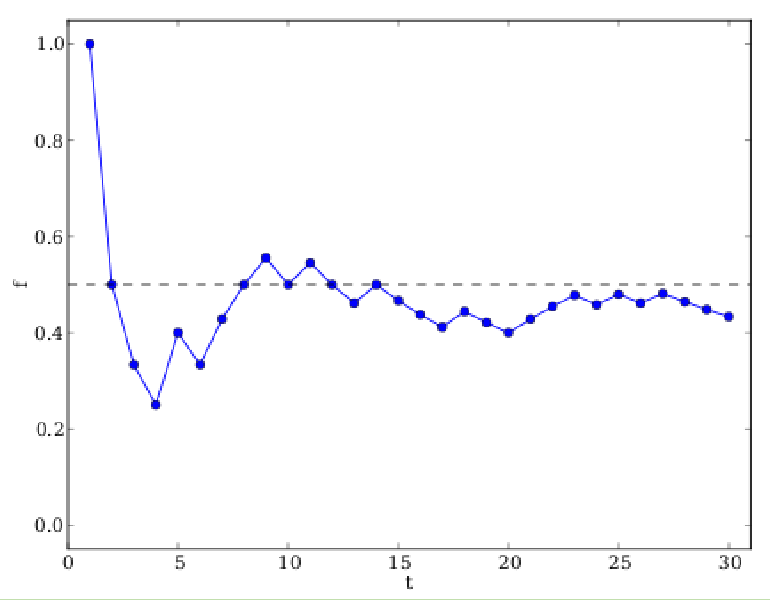
$$f = \frac{p}{t}$$

Die relatiewe frekwensie om kop te kry, f, na voltooiing van t munt-opskiete is:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1,00	0,50	0,33	0,25	0,40	0,33	0,43	0,50	0,56	0,50
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f	0,55	0,50	0,46	0,50	0,47	0,44	0,41	0,44	0,42	0,40
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f	0,43	0,45	0,48	0,46	0,48	0,46	0,48	0,46	0,45	0,43

Van die laaste inskrywing in hierdie tabel kan ons maklik die relatiewe frekwensie na 30 proefnemings aflees, naamlik $\frac{13}{30} = 0{,}4\dot{3}$. Die relatiewe frekwensie is naby aan die teoretiese waarskynlikheid van 0,5. Algemeen gesproke, sal die relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis neig om al nader te kom aan die teoretiese waarskynlikheid van die gebeurtenis soos ons meer proefnemings uitvoer.

'n Veel beter manier om hierdie tabel van relatiewe frekwensies op te som, is met 'n grafiek:



Die grafiek hierbo is die stipping van die relatiewe frekwensie om kop te kry, f, na die voltooiing van t munt opskiete. Dit is verkry van die tabel van getalle hierbo deur die getal proefnemings wat reeds voltooi is, te stip met t op die x-as en die relatiewe frekwensie, f, op die y-as. In die begin (na 'n klein aantal proefnemings) fluktueer die relatiewe frekwensie baie rondom die teoretiese frekwensie by 0,5, wat getoon word met die stippellyn. Soos die aantal proefnemings toeneem, fluktueer die relatiewe frekwensie al minder en kom dit al nader aan die teoretiese waarskynlikheid.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Relatiewe frekwensie en teoretiese waarskynlikheid

VRAAG

Terwyl ons na 10 sokkerwedstryde kyk waar Span 1 teen Span 2 speel, teken ons die volgende finale tellings aan:

Proefneming	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Span 1	2	0	1	1	1	1	1	0	5	3
Span 2	0	2	2	2	2	1	1	0	0	0

Wat is die relatiewe frekwensie dat Span 1 wen?

OPLOSSING

Stap 1:
In hierdie eksperiment is elke proefneming 'n sokkerwedstryd tussen Span 1 en Span 2.

Stap 2: Tel die aantal positiewe uitkomste
Ons stel belang in die gebeurtenis waar Span 1 wen. Van die tabel hierbo sien ons dat dit 3 keer gebeur het.

Stap 3: Bereken die relatiewe frekwensie
Die totale aantal proefnemings is 10. Dit beteken die relatiewe frekwensie van die gebeurtenis is

$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$

Dit is belangrik om die verskil te verstaan tussen die teoretiese waarskynlikheid van 'n gebeurtenis en die waargenome relatiewe frekwensie van die gebeurtenis in eksperimentele proewe. Die teoretiese waarskynlikheid is 'n getal wat ons kan bereken as ons genoeg inligting het oor die eksperiment. As elke moontlike uitkoms in die steekproefruimte ewe moontlik is, tel ons die aantal uitkomste in die gebeurtenis en die aantal uitkomste in die steekproefruimte om die teoretiese waarskynlikheid te bereken.

Die relatiewe frekwensie is afhanklik van die volgorde van uitkomste wat ons waarneem terwyl ons 'n statistiese eksperiment uitvoer. Die relatiewe frekwensie kan baie verskillend wees elke keer wat ons die eksperiment herhaal. Hoe meer proewe ons doen gedurende die eksperiment, hoe nader sal die waargenome relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis kom aan die teoretiese waarskynlikheid van die gebeurtenis.

So, waarom doen ons statistiese eksperimente as ons teoretiese waarskynlikhede het? In sommige gevalle, soos ons sokker eksperiment, is dit moeilik om die teoretiese waarskynlikheid van 'n gebeurtenis te bereken. Aangesien ons nie presies weet hoe moontlik dit is dat een sokkerspan doele sal aanteken teen 'n ander span nie, kan ons nooit die teoretiese waarskynlikheid van gebeure in sokker bereken nie. In sulke gevalle kan ons wel die relatiewe frekwensie gebruik om die teoretiese waarskynlikheid te skat deur eksperimente te doen en die aantal positiewe uitkomste te tel.

BESOEK:
Jy kan hierdie Phet simulasie op probability gebruik om sommige eksperimente uit te voer vir die val 'n bal deur 'n driehoekige rooster.

Oefening 14 – 2:

1. 'n Dobbelsteen word 44 keer gegooi en land 5 keer op die getal 3.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om 'n 3 gooi met die dobbelsteen? Skryf jou antwoord neer tot 2 desimale plekke.
2. 'n Muntstuk word 30 keer opgeskiet en land 17 keer op kop.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan dat 'n muntstuk op kop land? Skryf jou antwoord neer korrek tot 2 desimale plekke.
3. 'n Dobbelsteen word 27 keer gegooi en land 6 keer op die getal 6.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om waar te neem dat die dobbelsteen op die getal 6 land? Skryf jou antwoord korrek tot 2 desimale plekke.

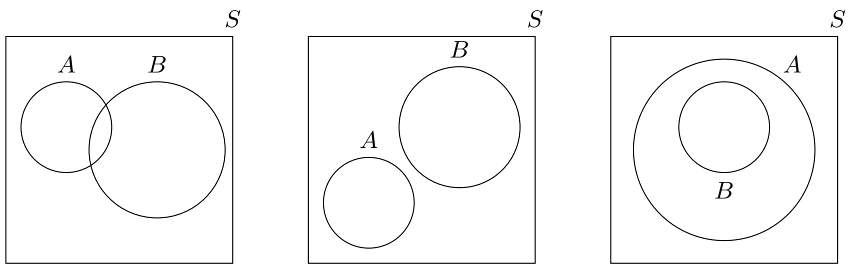
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2KHZ 2. 2KJ2 3. 2KJ3

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.3 Venndiagramme EMD7Y

'n Venndiagram is 'n grafiese manier om die verwantskappe tussen versamelings voor te stel. In elke Venndiagram word 'n versameling voorgestel deur 'n geslote kromme. Die area binne in die kromme verteenwoordig die elemente wat behoort aan daardie versameling, terwyl die area buite die kromme die elemente verteenwoordig wat uitgesluit is van die versameling.

Venndiagramme is nuttig vir ons denke oor waarskynlikheid aangesien ons met verskillende versamelings werk. Oorweeg twee gebeurtenisse, A en B, in die steekproefruimte S. Die diagram hieronder toon die moontlike maniere waarop die versamelings kan oorvleuel, voorgestel met Venndiagramme:



Die versamelings word voorgestel met die gebruik van 'n reghoek vir S en sirkels vir elk van A en B. In die eerste diagram oorvleuel die twee gebeurtenisse gedeeltelik. In die tweede diagram oorvleuel die twee gebeurtenisse glad nie. In die derde diagram is die een gebeurtenis ten volle ingesluit in die ander. Let daarop dat gebeurtenisse altyd binne in die steekproefruimte sal verskyn aangesien die steekproefruimte alle moontlike uitkomste van die eksperiment bevat.

BESOEK:
Die video wys hoe om 'n Venndiagram te trek deur 'n pak kaarte te gebruik as die steekproefruimte.
Sien video: 2KJ4 at www.everythingmaths.co.za

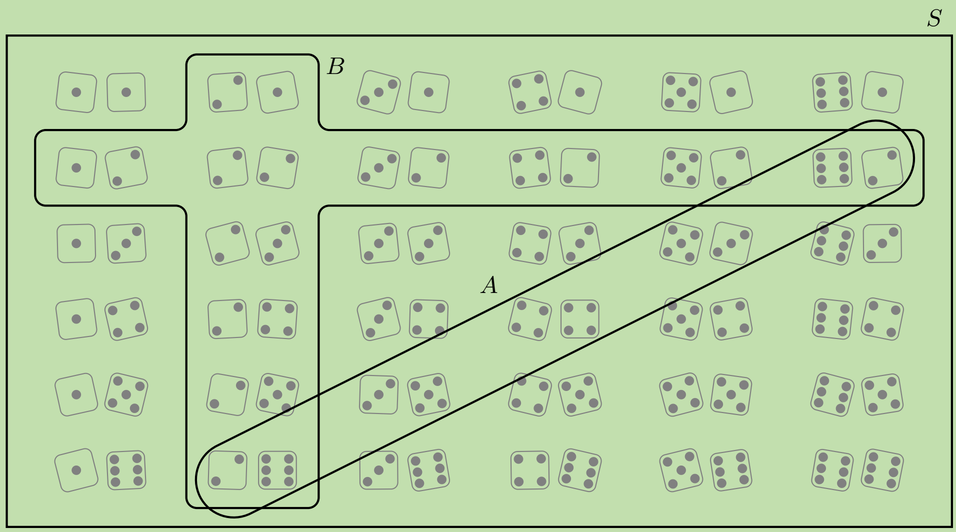
Uitgewerkte voorbeeld 4: Venndiagramme

VRAAG

Teken die steekproefruimte van twee dobbelstene wat gegooi word en die volgende twee gebeurtenisse deur 'n Venndiagram te gebruik:

- Gebeurtenis A: die som van die dobbelstene is gelyk aan 8
- Gebeurtenis B: ten minste een van die dobbelstene toon 'n 2

OPLOSSING



Uitgewerkte voorbeeld 5: Venndiagramme

VRAAG

Beskou die stel van diamante wat uitgehaal is uit 'n pak kaarte. 'n Kaart word willekeurig geselekteer uit die stel diamante.

- Skryf die steekproefruimte, S, vir die eksperiment neer.
- Wat is die waarde van $n\left(S\right)$?
- Beskou die volgende twee gebeurtenisse:
  - P: 'n Ewe diamantkaart word gekies
  - R: 'n Adelike diamant word gekies

  Stel die steekproefruimte S en gebeurtenisse P en R voor met die gebruik van 'n Venndiagram.

OPLOSSING

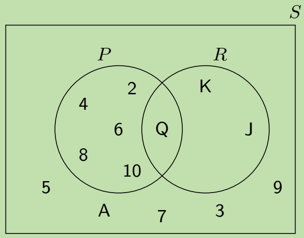
Stap 1: Skryf steekproefruimte S neer

$$S = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K\}$$

Stap 2: Skryf die waarde neer van $n\left(S\right)$

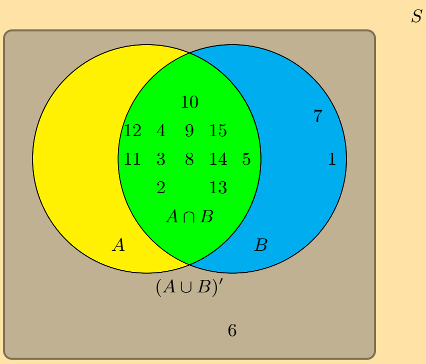
$n\left(S\right) = 13$

Stap 3: Trek die Venndiagram



Oefening 14 – 3:

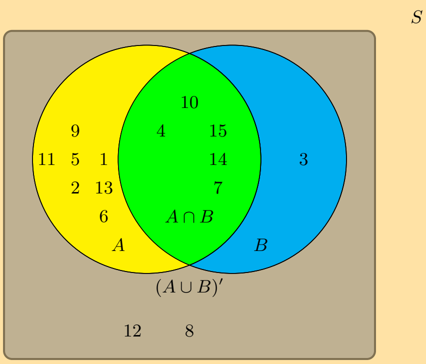
1. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van B te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B die beste?

- $\{2; 3; 4; 5; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
- $\{1; 6; 7\}$
- $\{6\}$

2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.

Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van A te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.

Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling A die beste?

- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
- $\{3; 8; 12\}$
- $\{3; 4; 7; 10; 14; 15\}$
- $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$
- $\{4; 7; 10; 14; 15\}$

3. Stukkies papier waarop die getalle van 1 tot 12 geskryf is, word in 'n boks geplaas en die boks word geskud. Een stukkie papier word uitgehaal en dan teruggeplaas.

   a) Wat is die steekproefruimte, S?

   b) Skryf die versameling A neer. Dit verteenwoordig die gebeurtenis om 'n papiertjie te trek met 'n getal op wat 'n faktor is van 12.

   c) Skryf die versameling B neer. Dit verteenwoordig die gebeurtenis om 'n papiertjie te trek met 'n priemgetal op.

   d) Stel A, B en S deur middel van 'n Venndiagram.

   e) Vind:

   i. $n(S)$ ii. $n(A)$ iii. $n(B)$

4. Gestel S stel 'n versameling heelgetalle voor van 1 tot 16, X stel die versameling ewe getalle voor van 1 tot 16 en Y stel die versameling priemgetalle voor van 1 tot 16. Trek 'n Venndiagram wat S, X en Y voorstel.

5. Daar is 71 Graad 10 leerders by die skool. Al hierdie leerders neem 'n kombinasie van Wiskunde (M), Geografie (G) en Geskiedenis (H). Die aantal wat Geografie neem is 41, 36 neem Geskiedenis, en 30 neem Wiskunde. Die aantal wat Wiskunde en Geskiedenis neem, is 16; die getal wat Geografie en Geskiedenis neem, is 6, en daar is 8 wat slegs Wiskunde neem en 16 wat slegs Geskiedenis neem.

   a) Trek 'n Venndiagram om al hierdie inligting te illustreer.

   b) Hoeveel leerders neem Wiskunde en Geografie maar nie Geskiedenis nie?

   c) Hoeveel leerders neem slegs Geografie?

   d) Hoeveel leerders neem al drie vakke?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KJ5 2. 2KJ6 3. 2KJ7 4. 2KJ8 5. 2KJ9

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.4 Vereniging en snyding EMD7Z

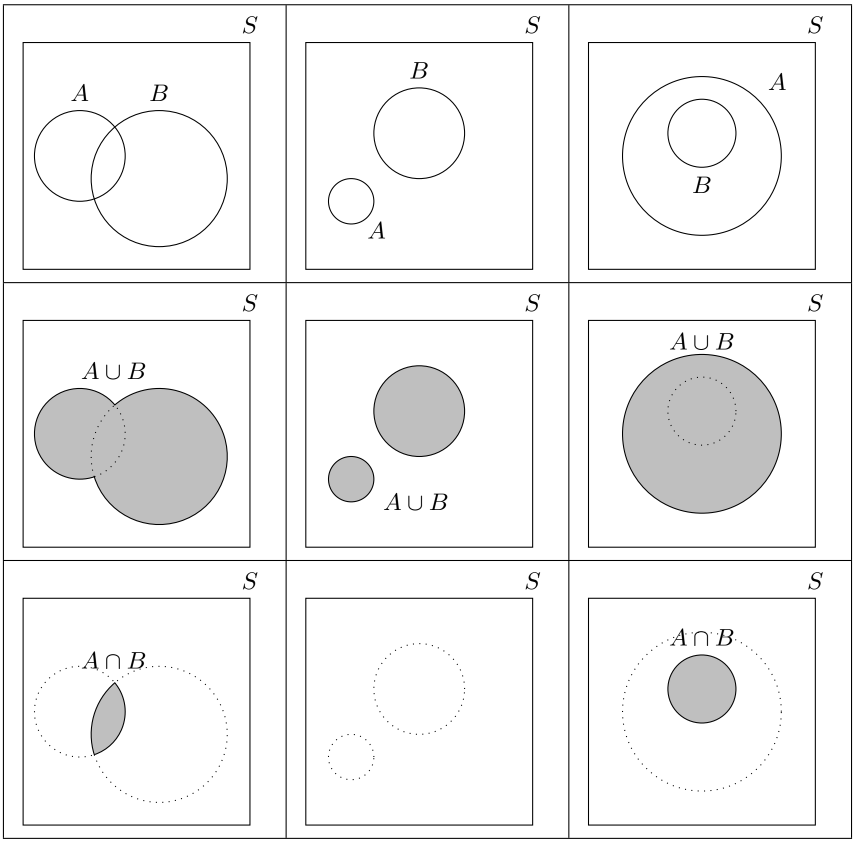
DEFINISIE: *Vereniging*

Die vereniging van twee versamelings is 'n nuwe versameling van al die elemente wat in ten minste een van die twee versamelings is. Die versameling word geskryf as $A \cup B$ of "A of B".

DEFINISIE: *Snyding*

Die snyding van twee versamelings is 'n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat in beide versamelings voorkom. Die snyding word geskryf as $A \cap B$ of "A en B".

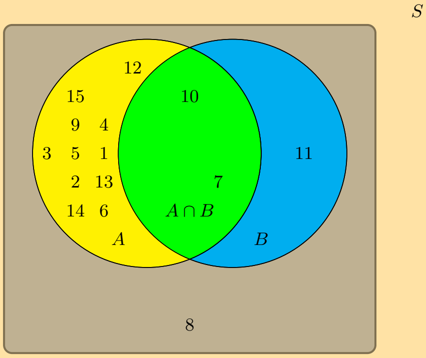
Die figuur hieronder toon die vereniging en die snyding vir verskillende konfigurasies van die twee gebeurtenisse in die steekproefruimte, deur van Venndiagramme gebruik te maak.



Figuur 14.2: Die verenigings en snydings van verskillende gebeurtenisse. Let daarop dat in die middelste kolom, is die snyding $A \cap B$ leeg aangesien die twee versamelings nie oorvleuel nie. In die finale kolom is die vereniging, $A \cup B$, gelyk aan A en die snyding, $A \cap B$, is gelyk aan B aangesien B ten volle ingesluit is in A.

Oefening 14 – 4:

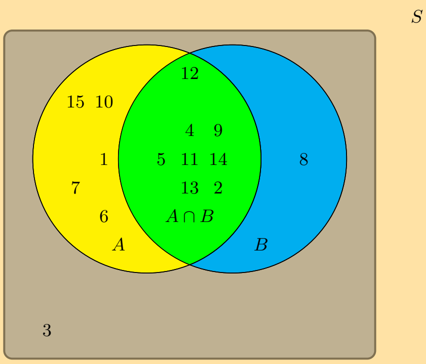
1. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die snyding tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cap B$, te identifiseer. Hulle steek vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter versameling beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cap B$ die beste?

- $\{7; 10; 11\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$
- $\{7; 10\}$

2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf kan word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$
Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, te identifiseer.. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter versameling beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cup B$ die beste?

- $\{1; 6; 7; 10; 15\}$
- $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
- $\{2; 4; 5; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$
- $\{3\}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2KJB 2. 2KJC

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.5 Waarskynlikheidsidentiteite EMD82

Per definisie bevat die steekproefruimte al die moontlik uitkomste van 'n eksperiment. Dus weet ons dat die waarskynlikheid om 'n uitkoms waar te neem wat in die steekproefruimte is, 1 is.

$$P(S) = 1$$

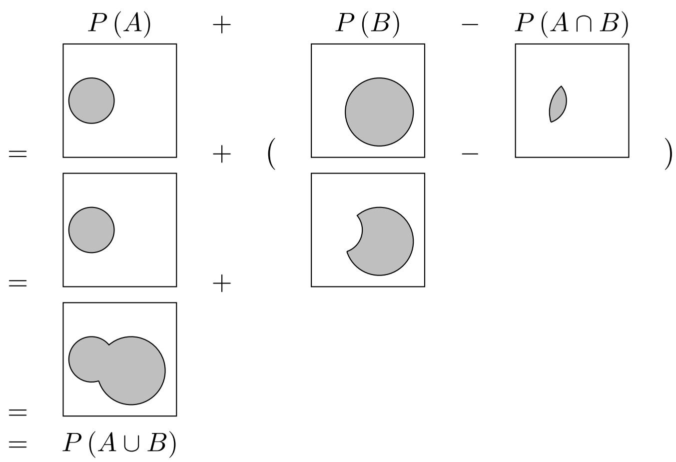
Ons kan die waarskynlikheid van die vereniging van twee gebeurtenisse bereken met:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ons sal hierdie identiteit bewys deur die Venndiagramme hierbo te gebruik.

Vir elk van die 4 terme in die vereniging- en die snydingsidentiteit, kan ons die Venndiagram trek en dan die verskillende diagramme optel en aftrek. Die area van 'n ruimte verteenwoordig sy waarskynlikheid.

Ons sal dit doen vir die eerste kolom van die Venndiagram figuur wat vantevore gegee is. Jy behoort te probeer om dit vir die ander kolomme ook te doen.



BESOEK:
Hierdie video gee 'n voorbeeld van hoe ons die waarskynlikhede bymekaar kan tel.
Sien video: 2KJD at www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vereniging en snyding van gebeurtenisse.

VRAAG

Verduidelik die waarskynlikhede van gebeurtenisse A en B van Voorbeeld 4 (twee dobbelstene gerol) en toon dat hulle die identiteit bevredig

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die waarskynlikhede van die twee gebeurtenisse neer, sowel as hulle vereniging en hulle snyding

Van die Venndiagram in Voorbeeld 4, kan ons die aantal uitkomste in elke gebeurtenis tel. Om die waarskynlikheid van enige gebeurtenis te kry, deel ons die grootte van die gebeurtenis deur die grootte van die steekproefruimte, wat $n(S) = 36$ is.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} &= \frac{5}{36} \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} &= \frac{11}{36} \\ P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(S)} &= \frac{2}{36} \\ P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} &= \frac{14}{36} \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die identiteit neer en kontroleer dit

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
\text{RK} &= \frac{14}{36} \\
\text{LK} &= \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} \\
&= \frac{5}{36} + \frac{9}{36} \\
&= \frac{14}{36} \\
\therefore \text{RK} &= \text{LK}
\end{aligned}$$

Oefening 14 – 5:

1. Die volgende gebeurtenisversameling word aan 'n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	1	2	5	6

Gebeurtenisversameling B	3

Gebeurtenisversameling $A \cap B$	leeg

   Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$.
   Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cup B)$ te bereken. Hulle haak vas en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

2. Die volgende gebeurtenisversameling word aan 'n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	1	2	6

Gebeurtenisversameling B	1	5

Gebeurtenisversameling $A \cup B$	1	2	5	6

   Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$.
   Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cap B)$ te bereken. Hulle kan dit nie regkry nie en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2KJF 2. 2KJG

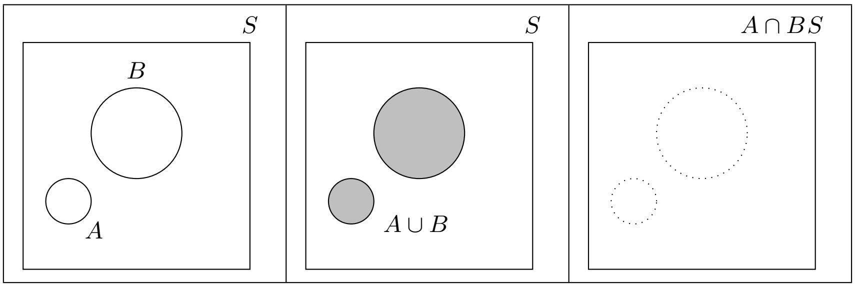
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.6 Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse EMD83

DEFINISIE: *Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse*

Twee gebeurtenisse word wedersyds uitsluitend genoem as hulle nie terselfdertyd kan plaasvind nie. Wanneer die uitkoms van 'n eksperiment in die eerste gebeurtenis is, kan dit nie ook in die tweede gebeurtenis wees nie, en omgekeerd.

'n Ander manier om dit te sê, is dat die twee gebeurtenisversamelings A en B, geen gemeenskaplike elemente kan hê nie, of $P(A \cap B) = \varnothing$ (waar $\varnothing$ die leë versameling aandui). Ons het alreeds die Venndiagram van wedersyds uitsluitende gebeurtenisse gesien in die middelkolom van die Venndiagramme wat vroeër verskaf is.



Van hierdie figuur kan jy sien die snyding het geen elemente nie. Jy kan ook sien die waarskynlikheid van die vereniging is die som van die waarskynlikhede van die gebeurtenisse.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Die verwantskap is waar vir wedersyds uitsluitende gebeurtenisse alleenlik.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse

VRAAG

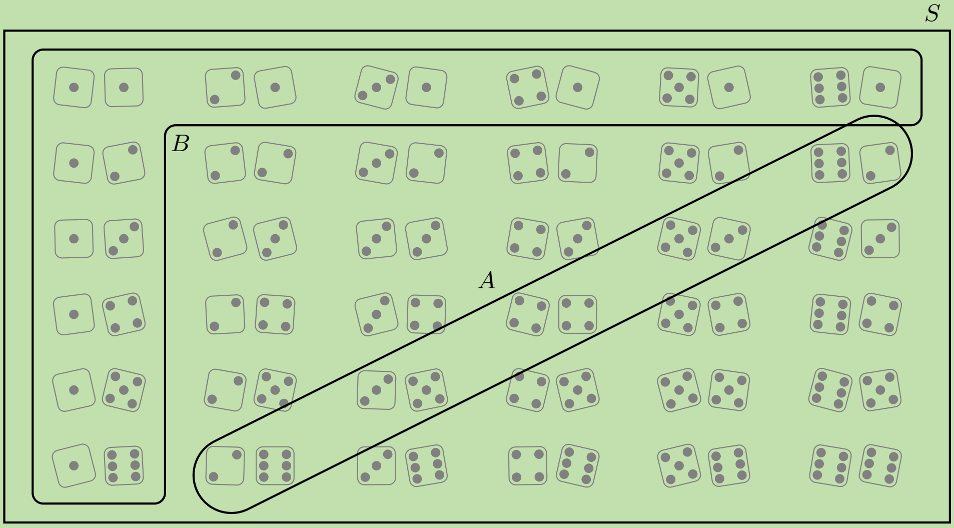
Ons rol twee dobbelstene en stel belang in die volgende twee gebeurtenisse:

- A : Die som van die dobbelstene is gelyk aan 8
- B : Ten minste een van die dobbelstene wys

Toon aan dat die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is.

OPLOSSING

Stap 1: Trek die steekproefruimte en die twee gebeurtenisse



Stap 2: Bepaal die snyding

Van die bostaande figuur sien ons daar is geen elemente gemeenskaplik aan A en B nie. Dus is die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend.

Oefening 14 – 6:

Sê of die volgende gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is of nie.

1. ’n Yskas bevat lemoensap, appelsap en druiwesap. ’n Koeldrank word willekeurig gekies uit die yskas. Gebeurtenis A: die koeldrank is lemoensap. Gebeurtenis B: die koeldrank is appelsap.
2. ’n Pakkie kolwyntjies bevat sjokeladekoekies, vanillakoekies en rooi fluweelkoekies. ’n Kolwyntjie word willekeurig uit die pakkie geneem. Gebeurtenis A: die kolwyntjie is rooi fluweel. Gebeurtenis B: die kolwyntjie is vanilla.
3. ’n Kaart word willekeurig uit ’n pak kaarte gekies. Gebeurtenis A: die kaart is rooi kaart. Gebeurtenis B: die kaart is ’n prentkaart.
4. ’n Krieketspan speel ’n wedstryd. Gebeurtenis A: hulle wen die wedstryd. Gebeurtenis B: hulle verloor die wedstryd.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

1. 2KJH 2. 2KJJ 3. 2KJK 4. 2KJM

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.7 Komplementêre gebeurtenisse EMD84

DEFINISIE: *Komplementêre versameling*

Die komplement van ’n versameling, A, is ’n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat nie in A is nie. Ons skryf die komplement van A as A', of somtyds nie (A).

Vir 'n eksperiment met steekproefruimte S en 'n gebeurtenis A kan ons sekere identiteite vir komplementêre gebeurtenisse aflei. Aangesien elke element in A nie in A' is nie, weet ons dat die komplementêre gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is.

$$A \cap A' = \varnothing$$

Aangesien elke element in die steekproefruimte in A of in A' is, sal die vereniging van die komplementêre gebeurtenisse die hele steekproefruimte dek.

$$A \cup A' = S$$

Van die voorafgaande twee identiteite, weet ons ook dat die waarskynlikhede van komplementêre gebeurtenisse se som 1 is.

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Beredenering met Venndiagramme

VRAAG

In 'n opname word 70 mense gevra oor watter produk hulle gebruik: A of B of beide. Die verslag van die opname toon dat 25 mense produk A gebruik, 35 mense gebruik produk B en 15 mense gebruik nie een van die twee nie.

Bepaal hoeveel mense:

1. gebruik slegs produk A
2. gebruik slegs produk B
3. gebruik beide produk A en produk B

OPLOSSING

Stap 1: Som die groottes van die steekproefruimtes, die gebeurtenisversamelings, hulle vereniging en hulle snyding op

- Ons word vertel dat 70 mense ondervra is, dus is die grootte van die steekproefruimte $n(S) = 70$.
- Ons word vertel dat 25 mense produk A gebruik, dus $n(A) = 25$.
- Ons word vertel dat 35 mense produk B gebruik, dus $n(B) = 35$.
- Ons word vertel dat 15 mense nie een van die produkte gebruik nie. Dit beteken dat $70 - 15 = 55$ mense ten minste een van die twee produkte gebruik, dus $n(A \cup B) = 55$.

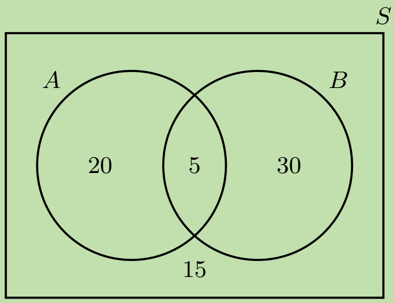
- Ons word nie vertel hoeveel mense beide produkte gebruik nie, dus moet ons die grootte van die snyding uitwerk, $A \cap B$, deur die identiteit vir die vereniging van die twee gebeurtenisse te gebruik:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \frac{n(A \cup B)}{n(S)} &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ \frac{55}{70} &= \frac{25}{70} + \frac{35}{70} - \frac{n(A \cap B)}{70} \\ \therefore n(A \cap B) &= 25 + 35 - 55 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal of die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is

Aangesien die snyding van die gebeurtenisse, $A \cap B$, nie leeg is nie, is die gebeurtenisse nie wedersyds uitsluitend nie. Dit beteken dat hulle sirkels sal oorvleuel in die Venndiagram.

Stap 3: Trek die Venndiagram en vul die getalle in

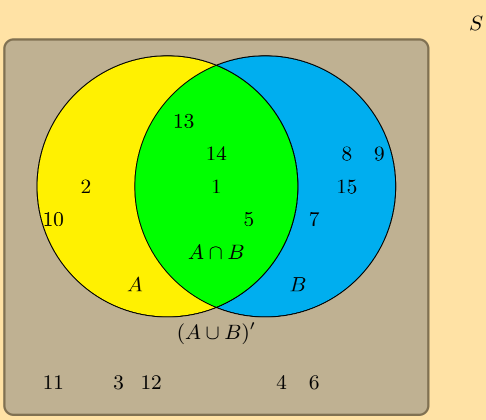


Stap 4: Lees die antwoorde af

1. 20 mense gebruik net produk A.
2. 30 mense gebruik net produk B.
3. 5 mense gebruik beide produkte.

Oefening 14 – 7:

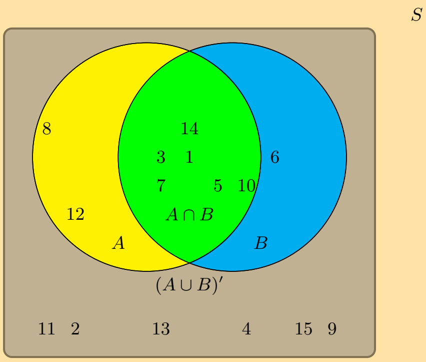
1. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van B, ook bekend as B' te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B' die beste?

- $\{1; 5; 13; 14\}$
- $\{2; 3; 4; 6; 10; 11; 12\}$
- $\{3; 4; 6; 11; 12\}$

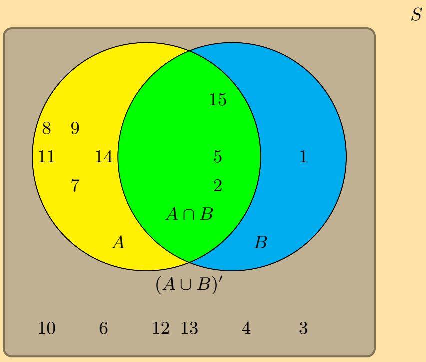
2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van $(A \cup B)$, ook bekend as $(A \cup B)'$ te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling $(A \cup B)'$ die beste?

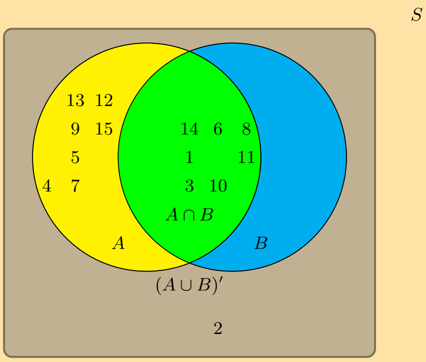
- $\{2; 4; 9; 11; 13; 15\}$
- $\{1; 3; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 14\}$
- $\{6; 8; 12\}$

3. Gegee die volgende Venndiagram:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$. Is $(A \cup B)'$ en $A \cup B$ wedersyds uitsluitend?

4. Gegee die volgende Venndiagram:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$. Is A' en B' wedersyds uitsluitend?

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KJN 2. 2KJP 3. 2KJQ 4. 2KJR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.8 Hoofstuk opsomming EMD85

Sien aanbieding: 2KJS at www.everythingmaths.co.za

- ’n Eksperiment verwys na ’n onseker proses.
- ’n Uitkoms van ’n eksperiment is ’n enkele resultaat van daardie eksperiment.
- Die steekproefruimte van ’n eksperiment is die versameling van alle moontlike uitkomste van daardie eksperiment. Die steekproefruimte word aangedui met die simbool S en die grootte van die steekproefruimte (die totale aantal moontlike uitkomste) word aangedui met $n(S)$.
- ’n Gebeurtenis is ’n spesifieke stel uitkomste van ’n eksperiment waarin jy geïnteresseerd is. ’n Gebeurtenis word aangedui met die letter E en die aantal uitkomste in die gebeurtenis met $n(E)$.
- ’n Waarskynlikheid is ’n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe waarskynlik dit is dat die gebeurtenis sal plaasvind.
  - ’n Waarskynlikheid van 0 beteken dat die gebeurtenis nooit sal plaasvind nie.
  - ’n Waarskynlikheid van 1 beteken dat die gebeurtenis altyd sal plaasvind.
  - ’n Waarskynlikheid van 0,5 beteken dat ’n gebeurtenis die helfte van die tyd sal voorkom, of 1 keer uit elke 2.
- ’n Waarskynlikheid kan ook geskryf word as ’n persentasie of as ’n breuk.
- Wanneer al die moontlike uitkomste van die eksperiment ’n gelyke kans het om te gebeur, kan ons die presiese teoretiese waarskynlikheid van die gebeurtenis bereken. Die waarskynlikheid van ’n gebeurtenis is die ratio of verhouding tussen die aantal uitkomste in die gebeurtenisversameling en die getal moontlike uitkomste in die steekproefruimte.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

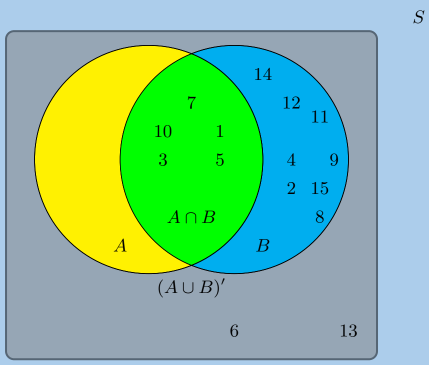
- Die relatiewe frekwensie van ’n gebeurtenis is gedefinieer as die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom gedurende eksperimentele proefnemings, gedeel deur die totale aantal proefnemings wat uitgevoer is.

$$f = \frac{\text{aantal positiewe probeerslae}}{\text{aantal proefnemings}} = \frac{p}{n}$$

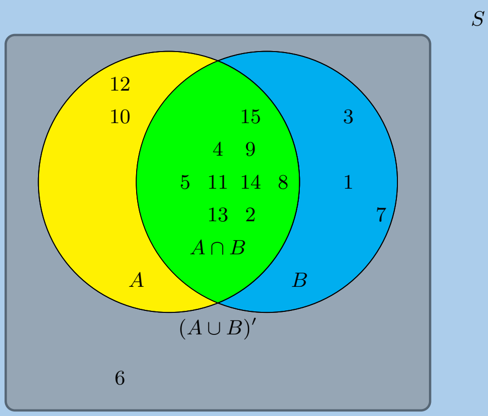
- Die vereniging van twee versamelings is ’n nuwe versameling van al die elemente wat in ten minste een van die twee versamelings is. Die versameling word geskryf as $A \cup B$ of A of B.
- Die snyding van twee versamelings is ’n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat in beide versamelings voorkom. Die snyding word geskryf as $A \cap B$ of A en B.
- Die waarskynlikheid om ’n uitkoms wat in die steekproefruimte lê, waar te neem, is 1: $P(S) = 1$.
- Die waarskynlikheid van die vereniging van twee gebeurtenisse word bereken met: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse is twee gebeurtenisse wat nie op dieselfde tyd kan voorkom nie. Wanneer die uitkoms van ’n eksperiment in die eerste gebeurtenis is, kan dit nie ook in die tweede gebeurtenis wees nie.
- Die komplement van ’n versameling, A, is ’n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat nie in A is nie. Ons skryf die komplement van A as A' of “nie (A)”.
- Komplementêre gebeurtenisse is wedersyds uitsluitend : $A \cap A' = \varnothing$.
- Komplementêre gebeurtenisse dek die steekproefruimte: $A \cup A' = S$
- Waarskynlikhede van komplementêre gebeurtenisse tel op na 1: $P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$.

End of chapter Exercise 14 – 8:

1. 'n Leerder wil die term "uitkoms" verstaan. Dus gooi die leerder 'n dobbelsteen. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term "uitkoms"?
   - 'n Onderwyser stap die klaskamer binne.
   - Die dobbelsteen land op die gestel 5.
   - Die horlosie slaan 3 nm.
2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:

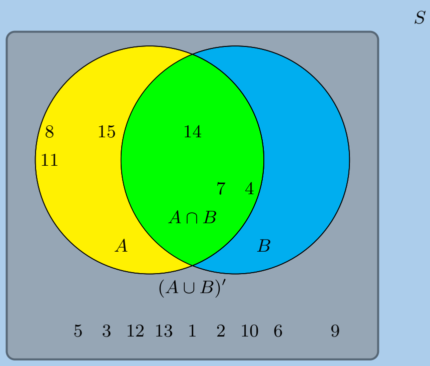
   

   Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
   Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van B te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
   Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B die beste?
   - $\{6; 13\}$
   - $\{1; 3; 5; 7; 10\}$
   - $\{2; 4; 6; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15\}$
   - $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
3. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:

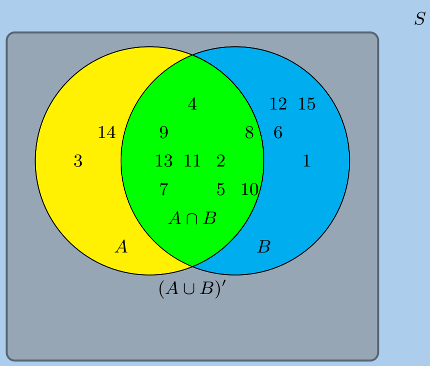
   Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
   Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
   Skryf die gebeurtenisverameling neer wat $A \cup B$ die beste beskryf.

4. Gegee die volgende Venndiagram:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Is $A \cup B$ en $(A \cup B)'$ wedersyds uitsluitend?

5. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van $(A \cap B)$, ook bekend as $(A \cap B)'$ te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.
Skryf die versameling neer wat die gebeurtenisversameling van $(A \cap B)'$ die beste beskryf.

6. 'n Leerder vind 'n pak van 52 kaarte en neem dan een kaart uit die pak. Wat is die waarskynlikheid dat die kaart 'n koning is?
Skryf jou antwoord as 'n desimaal (korrek tot 2 desimale plekke).

7. 'n Dobbelsteen word 21 keer gegooi en land 2 keer op die getal 3.
Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om 'n 3 gooi met die dobbelsteen? Skryf jou antwoord neer tot 2 desimale plekke.

8. 'n Muntstuk word 44 keer opgeskiet en land 22 keer op kop.
Wat is die relatiewe frekwensie daarvan dat 'n muntstuk op kop land? Skryf jou antwoord neer korrek tot 2 desimale plekke.

9. 'n Groep van 45 kinders word gevra of hulle Frosties, Strawberry Pops of beide eet. 31 kinders sê hulle eet beide en 6 sê hulle eet net Frosties. Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind wat willekeurig gekies word slegs Strawberry Pops sal eet?

10. In 'n groep van 42 leerders, het almal behalwe 3 'n pakkie skyfies of 'n koeldrank of beide. As 23 'n pakkie skyfies het en 7 van hierdie ook 'n koeldrank het, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word, die volgende sal hê:

    a) beide skyfies en koeldrank
    b) slegs koeldrank

11. ’n Boks bevat gekleurde blokkies. Die aantal van elke kleur word in die volgende tabel gegee.

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pienk
Aantal blokkies	24	32	41	19

’n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende sal wees:

a) pers
b) pers of wit
c) pienk en oranje
d) nie oranje

12. ’n Klein kleuterskool het ’n klas met kinders van verskeie ouderdomme. Die tabel gee die aantal kinders van elke ouderdomsgroep in die klas.

Ouderdom	3 jaar oud	4 jaar oud	5 jaar oud
Manlik	2	7	6
Vroulik	6	5	4

As ’n kind willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die kind die volgende sal wees:

a) vroulik
b) ’n 4 jaar oue manlike persoon
c) 3 of 4 jaar oud
d) 3 en 4 jaar oud
e) nie 5
f) of 3 of vroulik

13. Fiona het 85 diskette wat genommer is van 1 tot 85. As ’n disket willekeurig geselekteer word, wat is die waarskynlikheid dat die disketnommer:

a) eindig met 5
b) ’n veelvoud is van 3
c) ’n veelvoud is van 6
d) nommer 65 is
e) nie ’n veelvoud van 5 is nie
f) ’n veelvoud is van 3 of 4
g) ’n veelvoud is van 2 en 6
h) nommer 1 is

14. Gebruik ’n Venndiagram om die volgende waarskynlikhede uit te werk vir ’n dobbelsteen wat gegooi word:

a) ’n veelvoud van 5 en ’n onewe getal
b) ’n getal wat nie ’n veelvoud van 5 is nie en ook nie ’n onewe getal is nie
c) ’n getal wat nie ’n veelvoud van 5 is nie, maar wat onewe is

15. ’n Pakkie bevat geel lekkers en pienk lekkers. Die waarskynlikheid om ’n pienk lekker uit die pakkie te haal, is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid om ’n geel lekker uit te haal?

16. In ’n parkeerterrein met 300 motors, is daar 190 Opels. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste motor wat die parkeerterrein verlaat:

a) ’n Opel is
b) nie ’n Opel is nie

17. Nezi het 18 los sokkies in ’n laai. Agt van hierdie is oranje en twee is pienk. Die oorblywende sokkies is nie oranje of pienk nie. Bereken die waarskynlikheid dat die eerste sokkie wat willekeurig gevat word:

a) oranje is
b) nie oranje
c) pienk is
d) nie pienk is nie
e) oranje of pienk is
f) nie oranje of pienk is nie

18. ’n Bakplaat bevat 9 ’shortbread’ koekies, 4 gemmerkoekies, 11 ’chocolate chip’ koekies en 18 Jambos. As ’n koekie willekeurig geneem word, wat is die waarskynlikheid dat:

a) dit ’n gemmerkoekie of ’n Jambo is
b) dit is nie ’n ”shortbread” koekie nie

19. 280 kaartjies is verkoop vir ’n gelukkige trekking. Jabulile het 15 kaartjies gekoop. Wat is die waarskynlikheid dat Jabulile:

a) ’n prys wen
b) nie ’n prys wen nie

20. ’n Groep kinders is waargeneem om te sien hoeveel het rooi hare en bruin oë. 44 kinders het rooi hare maar nie bruin oë nie, 14 kinders het bruin oë en rooi hare, 5 kinders het bruin oë maar nie rooi hare nie en 40 kinders het nie bruin oë of rooi hare nie.

a) Hoeveel kinders was daar in die skool?
b) Wat is die waarskynlikheid dat ’n willekeurig gekose kind die volgende sal hê:
i. bruin oë
ii. rooi hare
c) ’n Kind met bruin oë word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat hierdie kind rooi hare sal hê?

21. ’n Fles het pers lekkers, blou lekkers en groen lekkers daarin. Die waarskynlikheid dat ’n lekkertjie wat willekeurig gekies word, pers sal wees, is $\frac{1}{7}$ en die waarskynlikheid dat dit groen sal wees, is $\frac{3}{5}$.

    a) As ons ’n lekkertjie willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dat dit die volgende sal wees:

        i. pers of blou   ii. groen   iii. pers

    b) As daar 70 lekkers in die fles is, hoeveel pers lekkers is daar?

    c) $\frac{2}{5}$ van die pers lekkers in (b) het strepies op en die res het nie. Hoeveel pers lekkers het strepies?

22. Boks A bevat 3 kaarte wat genommer is as 1, 2 en 3.
    Boks B bevat 2 kaarte wat genommer is as 1 en 2.
    Een kaart word willekeurig verwyder uit elke boks.
    Vind die waarskynlikheid dat:

    a) die som van die getalle 4 is.
    b) die som van die twee getalle ’n priemgetal is.
    c) die produk van die twee getalle ten minste 3 is.
    d) die som gelyk is aan die produk.

23. ’n Kaart word willekeurig getrek uit ’n gewone pak van 52 speelkaarte.

    a) Vind die waarskynlikheid dat die gekose kaart die volgende sal wees:

        i. die drie van diamante
        ii. die drie van diamante of enige hart
        iii. ’n diamant of ’n drie

    b) Die kaart wat getrek is, is die drie van diamante. Dit word op die tafel geplaas en ’n tweede kaart word getrek. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede kaart nie ’n diamant is nie?

24. Die volgende gebeurtenisversameling word aan ’n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	3	4

Gebeurtenisversameling B	2	4	5

Gebeurtenisversameling $A \cup B$	2	3	4	5

    Die steekproefruimte kan beskryf kan word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$
    Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cap B)$ te bereken. Hulle kan dit nie regkry nie en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as ’n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

25. Vir elk van die volgende, trek ’n Venndiagram om die situasie te voor te stel en vind ’n voorbeeld om die situasie te illustreer.

    a) ’n steekproefruimte waarin daar twee gebeurtenisse is wat nie wedersyds uitsluitend is nie
    b) ’n Steekproefruimte waarin daar twee gebeurtenisse is

26. Gebruik ’n Venndiagram om te bewys dat die waarskynlikheid dat of gebeurtenis A of gebeurtenis B sal plaasvind (A en B is nie wedersyds uitsluitend nie) gegee word deur:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

27. Al die klawers word uitgehaal uit ’n pak kaarte. Die oorblywende kaarte word dan geskommel en een kaart gekies. Nadat die kaart gekies is, word dit teruggesit in die pak voordat ’n volgende kaart gekies word.

    a) Wat is die steekproefruimte?

b) Vind ’n versameling om die gebeurtenis , P, dat ’n prentkaart getrek word, te verteenwoordig.

c) Vind ’n versameling, N, om ’n genommerde kaart te trek.

d) Stel die bostaande gebeurtenisse voor met ’n Venndiagram.

e) Watter beskrywing van die versamelings P en N is geskik? (Wenk: Vind enige elemente van P in N en van N in P.)

28. ’n Opname is uitgevoer by Mutende Laerskool om vas te stel hoeveel van die 650 leerders koop vetkoek en hoeveel koop lekkers gedurende pouse. Die volgende is gevind:

    - 50 leerders het niks gekoop nie
    - 400 leerders het vetkoek gekoop
    - 300 leerders het lekkers gekoop

    a) Stel hierdie inligting voor met ’n Venndiagram

    b) As ’n leerder willekeurig gekies word, bereken die waarskynlikheid dat hierdie leerder die volgende koop:

        i. slegs lekkers
        ii. slegs vetkoek
        iii. nie vetkoek of lekkers nie
        iv. vetkoek en lekkers
        v. vetkoek of lekkers

29. In ’n opname by Lwandani Sekondêre Skool, is 80 mense ondervra om uit te vind hoeveel lees die Sowetan, hoeveel lees die Daily Sun en hoeveel lees beide. Die opname het getoon 45 lees die Daily Sun, 30 lees die Sowetan en 10 lees nie een van die twee nie. Gebruik ’n Venndiagram om die persentasie mense te vind wat die volgende lees:

    a) slegs die Daily Sun
    b) slegs die Sowetan
    c) beide die Daily Sun en die Sowetan

30. In ’n klas is daar

    - 8 leerders wat sokker en hokkie speel
    - 7 leerders wat nie sokker of hokkie speel nie
    - 13 leerders wat hokkie speel
    - 19 leerders wat sokker speel

    Hoeveel leerders is daar in die klas?

31. Uit 36 mense, stel 17 belang om tydskrifte te lees, 12 stel belang om boeke te lees, 6 stel belang om beide tydskrifte en boeke te lees.

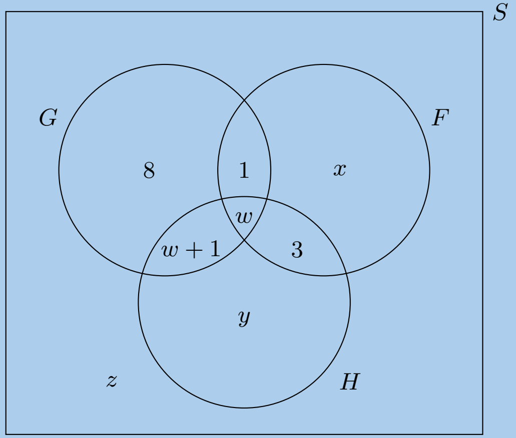
    a) Stel die inligting voor met ’n Venndiagram.
    b) Hoeveel mense stel glad nie belang om tydskrifte of boeke te lees nie?
    c) Vind die waarskynlikheid dat ’n persoon wat willekeurig gekies word uit die groep, sal:

        i. belangstel om tydskrifte en boeke te lees.
        ii. slegs belangstel om boeke te lees.
        iii. nie belangstel om boeke te lees nie.

32. 30 leerders is ondervra en die volgende inligting is verkry van hierdie groep:

    - 18 leerders neem Geografie (G)
    - 10 leerders neem Frans (F)
    - 6 leerders neem Geskiedenis (H), maar neem nie Geografie of Frans nie.

Addisioneel is die volgende Venndiagram hieronder ingevul.
Gestel G is die gebeurtenis dat 'n leerder Geografie neem
Gestel F is die gebeurtenis dat 'n leerder Frans neem.
Gestel H is die gebeurtenis dat 'n leerder Geskiedenis neem.



a) Van die inligting hierbo, bepaal die waardes van w, x, y en z.
b) Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word uit hierdie groep:
   i. net Geografie sal neem.
   ii. Frans en Geskiedenis sal neem, maar nie Geografie nie.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KJT	2. 2KJV	3. 2KJW	4. 2KJX	5. 2KJY	6. 2KJZ
7. 2KK2	8. 2KK3	9. 2KK4	10. 2KK5	11. 2KK6	12. 2KK7
13. 2KK8	14. 2KK9	15. 2KKB	16. 2KKC	17. 2KKD	18. 2KKF
19. 2KKG	20. 2KKH	21. 2KKJ	22. 2KKK	23. 2KKM	24. 2KKN
25a. 2KKP	25b. 2KKQ	26. 2KKR	27. 2KKS	28. 2KKT	29. 2KKV
30. 2KKW	31. 2KKX	32. 2KKY			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1 Algebraïese uitdrukkings

Exercise 1 – 1:

1. a) $\mathbb{Z}$
   b) (ii)
2. a) tussen die reghoek en die buitenste ovaal
   b) (ii)
3. a) reëel
   b) reëel
   c) nie-reëel
   d) ongedefinieerd
   e) nie-reëel
   f) reëel
4. a) rasionaal
   b) irrasionaal
   c) rasionaal, 'n heelgetal, 'n telgetal en 'n natuurlike getal
   d) irrasionaal
   e) irrasionaal
   f) irrasionaal
   g) rasionaal, 'n heelgetal, 'n telgetal en 'n natuurlike getal
   h) irrasionaal
   i) irrasionaal
5. a) rasionaal
   b) rasionaal
   c) rasionaal
   d) irrasionaal
6. a) rasionaal
   b) rasionaal
   c) irrasionaal
   d) rasionaal
7. a) 7 en 11
   b) $-\sqrt{8}$; 3,3231089... ; $3+\sqrt{2}$; π
   c) $\sqrt{-1}$
   d) -3 ; 0 ; $-8\frac{4}{5}$; $\frac{22}{7}$; 7 ; $1{,}\overline{34}$; $9\frac{7}{10}$; 11
   e) -3 ; 7 ; 11
   f) $\frac{14}{0}$
8. a) (i) 555 (ii) rasionaal
   b) (i) enige drie syfers (ii) irrasionaal
   c) (i) enige drie syfers (ii) irrasionaal
   d) (i) enige drie syfers (ii) irrasionaal
   e) (i) 545 (ii) rasionaal
9. a) $\frac{1}{10}$
   b) $\frac{3}{25}$
   c) $\frac{29}{50}$
   d) $\frac{2589}{10\,000}$
10. a) $0{,}\dot{1}$
    b) $0{,}\overline{12}$
    c) $0{,}\overline{123}$
    d) $0{,}11\overline{4145}$
11. a) $0{,}\dot{5}$
    b) $0{,}\dot{5}$
    c) $0{,}\dot{2}\dot{1}$
    d) $0{,}\dot{6}$
    e) $1{,}\overline{27}$
    f) $4{,}8\dot{3}$
    g) $2{,}\dot{1}$
12. a) $\frac{5}{9}$
    b) $\frac{57}{90}$
    c) $\frac{4}{9}$
    d) $\frac{526}{99}$
    e) $\frac{163}{33}$
    f) $\frac{130}{33}$

Exercise 1 – 2:

1. a) 12,566
   b) 3,317
   c) 0,267
   d) 1,913
   e) 6,325
   f) 0,056
2. a) 345,0440
   b) 1361,73
   c) 728,009052
   d) 0,0370
   e) 0,45455
   f) 0,08
3. a) 9,87
   b) 4,93
   c) 14,80
   d) 14,8044...
4. a) 0,01
   b) 519 854,59
   c) 648 768,22
5. 11
6. R 5,03

Exercise 1 – 3:

1. a) 4 en 5
   b) 5 en 6
   c) 1 en 2
   d) 4 en 5
   e) 12 en 13
   f) 7 en 8
   g) 8 en 9
   h) 4 en 5
   i) 4 en 5
   j) 4 en 5
2. a) 3,1
   b) 9,1
   c) 3,9
   d) 3,5
3. $-\sqrt{8}$; $-\sqrt{\frac{9}{4}}$; 0,45 ; $0{,}\overline{45}$; $\frac{27}{7}$; $\sqrt{19}$; 6 ; 2π ; $\sqrt{51}$

Exercise 1 – 4:

1. a) $2y^2+8y$
   b) $y^2+7y+10$
   c) $2t^2-5t+2$
   d) x^2-16
   e) x^2-16
   f) a^2-b^2
   g) $6p^2+29p+9$
   h) $3k^2+16k-12$
   i) $s^2+12s+36$
   j) x^2-49
   k) $9x^2-1$
   l) $-14k^2+17k+6$
   m) $16x^2-8x+1$
   n) $y^2-2y-15$
   o) $-x^2+64$
   p) $x^2+18x+81$
   q) $84y^2-153y+33$
   r) $g^2-10g+25$
   s) $d^2+18d+81$
   t) $36d^2-49$
   u) $25z^2-1$
   v) $1-9h^2$
   w) $4p^2+10p+6$
   x) $8a^2+60a+28$
   y) $10r^2+28r+16$
   z) w^2-1
2. a) g^2-121
   b) $8b^2-20b+8$
   c) $8b^2-10b+3$
   d) $18x^2+24x-24$
   e) $6w^2+17w-14$
   f) $4t^2-12t+9$
   g) $25p^2-80p+64$
   h) $16y^2+40y+25$
   i) $-10y^7-39y^6-36y^5$
   j) $72y^2-18y+27$
   k) $-10y^3+4y^2+103y-132$
   l) $-14y^3+26y^2+4y-16$
   m) $-20y^3-116y^2-13y+6$
   n) $-24y^3+126y^2-3y-9$
   o) $-20y^2-80y-30$
   p) $49y^3+42y^2+79y+30$
   q) $a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$
   r) x^3+y^3
   s) $52m^3+6m+30m^2$
   t) $48x^5+16x^2+24x^3$
   u) $15k^5+9k^3+14k^2$
   v) $81x^4-72x+16$
   w) $-6y^6+107y^4+3y^3-176y^2-48y$
   x) $x^4+x^3-11x^2-9x+18$
   y) $-3a^2+20a-12$
3. a) $3x^2+16x+5$
   b) $2a^4+5a^3-5a-2$
   c) $-y^4-8y^3-14y^2+8y-1$
   d) $2x^3-2x^2y-2xy^2-2y^3$
   e) $3a^3-30ab^2+9b^3$
   f) $8a^4-12a^3b+2a^2b^2+3ab^3-b^4$
   g) $9x^2+6xy-3y^2$
   h) $5x^2-6xy-2y^2$
   i) $\frac{x^2}{12}+\frac{7}{12}+\frac{3}{x^2}$
   j) $\frac{x^2}{3}+\frac{10}{3}-\frac{8}{x^2}$
   k) $10x-12y$
   l) $2a^2+3ab+2a+3b$
4. 4
5. -4

6. a) 5
b) $k = -3$ of $k = -1$
c) $k < 0$
d) $k > 4$
7. a) $x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}$
b) 6
8. a) $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$
b) 9
c) 13
9. a) $9y^2 + 3 + \frac{1}{4y^2}$
b) 16
10. a) $a^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9a^2}$
b) $a^3 + \frac{1}{27a^3}$
c) 6

Exercise 1 – 5:

1. $4(3x + 8y)$
2. $-2ab(b + 2a)$
3. $3b(6a - c)$
4. $6k(2j + 3q)$
5. $12a(-1 + 2a^2)$
6. $-2a(b + 4)$
7. $8kj(3 - 2k)$
8. $-ab(a + b)$
9. $18b^2q(4 - bq)$
10. $5(5x^3 - y)(5x^3 + y)$
11. $2x(3x + 1 + 5x^2)$
12. $xy(2y + yz + 3)$
13. $12k^2j(1 + 2j)$
14. $3(a^2 + 2a - 6)$
15. $7a + 4$

Exercise 1 – 6:

1. $(y - 3)(4 - k)$
2. $(a - 1)(a - 5)(a + 5)$
3. $(b + 4)(m)(b - 6)$
4. $(a + 7)(a^2 + 9)$
5. $(b - 4)(3b + 7)$
6. $(z + 6)(3g + 2)$
7. $(y + 2)(4b + 5)$
8. $(r + 5)(3d + 14)$
9. $(6x + y - 3)(6x + y + 3)$
10. $3(2x - y)(3y - 2x)$
11. $(4a + 3b + 4c)(4a - 3b - 4c)$
12. $(-2b + 11)(4b - 19)$
13. $(29 - 26a)(30a - 41)$
14. $(4k - 2)(4k + 2)$
15. $(abc - 1)(abc + 1)$
16. $\left(\frac{1}{3}a - 2b\right)\left(\frac{1}{3}a + 2b\right)$
17. $2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$
18. $(y - \sqrt{8})(y + \sqrt{8})$
19. $(y - \sqrt{13})(y + \sqrt{13})$
20. $(a - 3b)(a - 5b)(a + 3b)^2$

Exercise 1 – 7:

1. $(2d - 3r)(3 + t^5)$
2. $(z - 2m)(9 + b^3)$
3. $(7z - 2y)(5 + c^5)$
4. $(3 + a)(2x + 1)$
5. $(x + 5)(x - 6)$
6. $(5 - a)(x + 2y)$
7. $(a - x)(a - 2)$
8. $(y + 2)(5x - 3)$
9. $(-a + b)(a + 1)$
10. $(7m - 2n)(2 + j)$
11. $(7r - 5x)(4 + g)$
12. $(5d - 3m)(5 + y)$
13. $(5q - 2z)(9 + c)$
14. $(2j - 5v)(3 + y)$
15. $(2a - 5k)(8 + z)$
16. $(a - b)(x + y + 2)$
17. $(3a + b)(x - y - 3)$

Exercise 1 – 8:

1. $(x + 5)(x + 3)$
2. $(x + 8)(x + 1)$
3. $(x + 6)^2$
4. $(h + 3)(2h - 1)$
5. $(x + 1)(3x + 1)$
6. $(s + 2)(3s - 5)$
7. $(x + 3)(x - 5)$
8. $(x + 3)(x - 1)$
9. $(x + 5)(x - 4)$
10. $(x - 5)(x + 4)$
11. $2(x + 1)(x + 10)$
12. $2\,(a + 1)\,(3a + 4)$
13. $3\,(2v - 3)\,(v - 3)$
14. $3\,(g - 3)\,(2g + 1)$
15. $(3x + 1)(x + 6)$
16. $(3x - 1)(x + 6)$
17. $(7x + 1)(x - 1)$
18. $3(2x + 1)(x - 3)$
19. $(a - 4b)(a - 3b)$
20. $(3a - 4b)(a + 3b)$
21. $2((7x + 2)(7x - 1))$
22. $(x - 6)(x - 5)$
23. $(a - 7)(a - 1)$
24. $(y - 3)(y + 6)$
25. $3(b + 4)(b + 1)$
26. $6(a + 7)(a - 4)$

Exercise 1 – 9:

1. $(w - 2)(w^2 + 2w + 4)$
2. $(g + 4)(g^2 - 4g + 16)$
3. $(h + 1)(h^2 - h + 1)$
4. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
5. $(3 - m)(9 + 3m + m^2)$
6. $2(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
7. $3(k + 3q)(k^2 - 3kq + 9q^2)$
8. $(4t - 1)(16t^2 + 4t + 1)$
9. $(8x - 1)(8x + 1)$
10. $(5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$
11. $(\sqrt[3]{25}x + 1)((\sqrt[3]{25})^2x^2 - \sqrt[3]{25}x + 1)$
12. $(z)(1 - 5z)(1 + 5z + 25z^2)$
13. $(2m^2 + n^3)(4m^4 - 2m^2n^3 + n^6)$
14. $(6n - k)(36n^2 + 6nk + k^2)$
15. $(5s + d)(25s^2 - 5sd + d^2)$
16. $(2k + r)(4k^2 - 2kr + r^2)$
17. $(2jkl - b)(4j^2k^2l^2 + 2jklabc + b^2)$
18. $(3xy + w)(9x^2y^2 - 3xyw + w^2)$
19. $2(4m + f)(16m^2 - 4mf + f^2)$
20. $\left(p^5 - \frac{1}{2}y^4\right)\left(p^{10} + \frac{1}{2}p^5y^4 + \frac{1}{4}y^8\right)$
21. $(\frac{3}{t} - s)(\frac{9}{t^2} + \frac{3s}{t} + s^2)$
22. $(\frac{1}{4q} - h)(\frac{1}{16q^2} + \frac{h}{4q} + h^2)$
23. $\frac{1}{3}(6g + v)(36g^2 - 6gv + v^2)$
24. $(1 - x + y)(1 - x + y + x^2 - 2xy + y^2)$
25. $(h - 1)(h + 1)(h^2 + 1)(2g^2 + h)(4g^4 - 2g^2h + h^2)$
26. $(x + y)(5w - h)(25w^2 + 5wh + h^2)$
27. $(x - 6)(x + 1)(3p + w)(9p^2 - 3pw + w^2)$

Exercise 1 – 10:

1. a) $\frac{a}{5}$
b) $\frac{a+5}{2}$
c) 5
d) a
e) $\frac{3a}{2}$
f) $\frac{a+3}{a+2}$
g) $\frac{a(3b+1)}{b}$
h) $\frac{4xy}{3}$
i) $\frac{p(y-2)}{3y}$
j) $\frac{3x+4}{2}$
k) $-\frac{b+9}{2}$
l) $\frac{t+s}{t-s}$
m) $\frac{x+3}{5}$
n) $\frac{x-3}{x+3}$
o) $\frac{x+2}{x^2+3x+9}$
p) $\frac{a+8}{a^2+2a+4}$
q) $\frac{a-6b}{a+2b}$
r) $\frac{2a-3}{b}$
s) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$
t) $q + 16$
u) $p + 5$
v) $h + 13$
w) af

2. a) 5
b) 3
c) 4
d) $\frac{3(a+3)}{98}$
e) $\frac{4a^2(a-5)}{6(a+5)^2}$
f) $\frac{(3x+4)^2}{96p^2}$
g) $\frac{4(3a-1)}{3(a-1)}$
h) $2a$
i) $\frac{3q}{8}$
j) $\frac{30b^3}{4(a+b)}$
k) -1
l) $\frac{5(a^2-ab+b^2)}{a^3}$

m) $\frac{1}{a+4}$

n) $\frac{1}{(x-4)(x+2)}$

o) $\frac{2a^2-14a+15}{6}$

p) 1

q) $\frac{14-x}{6}$

r) $\frac{3(p^2-pq+q^2)}{p^2}$

3. a) $\frac{x-27}{12}$

b) $\frac{47-x}{36}$

c) $\frac{5x-8}{12}$

d) $\frac{19a}{(a+11)(a-8)}$

e) $\frac{6x}{(x-12)(x-6)}$

f) $\frac{20r}{(r+12)(r-8)}$

g) $\frac{2z+4y+3x}{xyz}$

h) $\frac{4t-12}{(t-2)(t-3)}$

i) $\frac{2(k+2)}{(k^2+2)(k+2)}$

j) $\frac{5t+7}{6q}$

k) $\frac{5p-2}{(p+2)(p-2)^2}$

l) $\frac{2x^2-xy}{(x+y)(x-y)}$

m) $\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}$

n) $\frac{f}{(h+f)(h^2+hf+f^2)}$

o) $\frac{2x-1}{6}$

p) 0

q) $\frac{-x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

r) $\frac{2t^2+5t-8}{t^2-9}$

s) $\frac{x^2-9x-1}{(x+3)(x+1)(x-2)}$

t) $\frac{a^2+4b-4b^2}{(a-2b)^2(a+2b)}$

4. a) $x \neq 2$

b) $x \neq -1$

c) $x \neq 0$ en $x \neq \pm 1$

Exercise 1 – 11:

1. a) tussen die reghoek en die buitenste ovaal

b) (i)

2. a) nie-reëel

b) ongedefinieerd

c) reëel

d) reëel

e) nie-reëel

f) reëel

3. a) Irrasionaal

b) Irrasionaal

c) Rasionaal

d) Rasionaal

4. a) rasionaal

b) rasionaal

c) irrasionaal

d) irrasionaal

5. a) $\sqrt{-24}$

b) $-\sqrt{24}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{26}$; π ; $\sqrt{39}$; $7{,}\dot{1}\dot{1}$; 7,12 ; $\sqrt{78}$; 9 ; 3π ; π^2

c) $-\sqrt{24}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{26}$; π ; $\sqrt{39}$; $\sqrt{78}$; 3π ; π^2

d) $\frac{3}{2}$; $7{,}\dot{1}\dot{1}$; 7,12 ; 9

e) 9

f) $\frac{\sqrt{2}}{0}$

6. a) $\frac{3}{25}$

b) $\frac{3}{500}$

c) $\frac{410}{99}$

d) $1\frac{59}{100}$

e) $\frac{221}{18}$

f) $\frac{37}{45}$

g) $\frac{81}{11}$

8. a) $0{,}0\dot{5}$

b) 1,5

9. $\frac{78}{99}$

10. a) (i) enige drie getalle (ii) irrasionaal

b) (i) 111 (ii) rasionaal

11. a) 0,50

b) 1,00

c) 0,11

d) 1,00

12. a) 3,142

b) 1,618

c) 1,414

d) 2,718

13. 1523,0020

14. 1982,940290

15. 101,5238

16. a) 1,414

b) 1,732

c) 2,236

d) 2,449

17. a) Irrasionale getal.

b) Irrasionale getal.

c) Rasionale getal.

d) Rasionale getal.

e) Rasionale getal.

f) Rasionale getal.

g) Irrasionale getal.

h) Rasionale getal.

i) Rasionale getal.

j) Irrasionale getal.

18. a) 0,71

b) 3,742

20. a) 2 en 3

b) 3 en 4

c) 4 en 5

d) 5 en 6

e) 1 en 2

f) 2 en 3

g) 2 en 3

h) 3 en 4

i) 9 en 10

j) 8 en 9

k) 3 en 4

l) 4 en 5

21. a) 3,7

b) 10,5

c) 6,9

d) 4,5

22. a) $a^2 + 10a + 25$

b) $n^2 + 24n + 144$

c) $d^2 - 8d + 16$

d) $49w^2 - 4$

e) $144q^2 - 1$

f) $x^2 + 4x + 4$

g) $25k^2 - 16$

h) $10f^2 + 18f + 8$

i) $18n^2 + 51n + 30$

j) $2g^2 + 18g + 36$

k) $16y^2 + 36y + 8$

l) $7d^2 - 19d - 6$

m) $6z^2 - 16z + 8$

n) $25w^2 - 110w + 121$

o) $25s^2 - 10s + 1$

p) $9d^2 - 48d + 64$

q) $36f^3 + 25f^2 + 49f$

r) $74d^4 + 16d + 24d^2$

s) $59x^3 + 10x^2 + 49x$

23. a) $y^6 - y^5 + y^4 - 2y^3 - 7y^2 - 2y$

b) $4x$

c) $x^4 - 2x^2 + 1$

d) $64a^3 - 27b^3$

e) $2x^3 + 4x^2y - 8xy^2 - 6y^3$

f) $9a^4 + 9a^3 - 34a^2b^2 + 25ab^3 - 25b^4$

g) $y^2 - \frac{1}{y^2}$

h) $\frac{a^2}{9} - \frac{3}{a^2}$

i) $6x$

j) $-4x - 8$

24. 4

25. a) -1 ; 0 ; 1 ; 6

b) 0 ; 1 ; 6

c) $k > 0$

d) $k > -2$

26. a) $9a^2 + 3 + \frac{1}{4a^2}$

b) $27a^3 - \frac{1}{8a^3}$

c) $374\frac{1}{2}$

27. a) 64

b) 25

c) 2400800

d) 100

28. a) 11×13

b) $2^3 \times 3 \times 7$

c) 29×31

d) $3^2 \times 11$

e) $3 \times 13 \times 41$

29. a) $(a-3)(a+3)$

b) $9(b-3)(b+3)$

c) $\left(m - \frac{1}{3}\right)\left(m + \frac{1}{3}\right)$

d) $5(1 - ab^3)(1 + ab^3)$

e) $b(2a-3)(2a+3)(4a^2+9)$

f) $(a-5)(a-5)$

g) $(4b+7)(4b+7)$

h) $-4b^2(6b^3-1)^2$

i) $(4+x^2)(2+x)(2-x)$

j) $7(x-2)(x+y)$

k) $(y-10)(y+3)$

l) $(1-x)^2(1+x)$

m) $(1+p)(-2+3p)$

n) $x(x-2)+(1+y)(1-y)(1+y^2)$

o) $(x-1)(x^2+x+1)(4b-x)$

p) $(v-7)(3m+19)$

q) $(3f+19)(z+3)$

r) $3(p-\frac{1}{3})(p^2+\frac{p}{3}+\frac{1}{9})$

s) $(2x^2-5y^3)(4x^4+10x^2y^3+25y^6)$

t) $(-p)(12+18p+7p^2)$

u) $\frac{(a+3b)^2(a-3b)}{3}$

v) $(2a-5)(3a-1)$

w) $(s-3)(s+5)$
x) $(2v+3h)(8+j^5)$
y) $(2h-5g)(9+m^3)$
z) $(7d-2s)(9+u^2)$

30. a) $2\,(a+1)\,(3a+4)$
b) $3\,(g-3)\,(2g+1)$
c) $(5g-r)(25g^2+5gr+r^2)$
d) $(2r+z)(4r^2-2rz+z^2)$
e) $(7m-2n)(2+j)$
f) $(5d-3m)(5+y)$
g) $(g-3)(g^2+3g+9)$
h) $(z+5)(z^2-5z+25)$
i) $3(b-a)(3a-b)$
j) $(4x+5y)(y-4x)$
k) $4(4x^3-3y^4)(4x^3+3y^4)$
l) $\frac{1}{6}\left(a-12b^2\right)\left(a+12b^2\right)$
m) $(a-3)(2-9x)(2+9x)$
n) $(b+3)(b-10)$
o) $(2x+5y)(x+y)$
p) $(x-5y)(x+3y)$
q) $(4x^2+3)(x^2+2)$
r) $2(3x^2-4)(x^2-5)$
s) $(3a+b)(3a-b)(x+y+3)$
t) $2(2y+3)(y-4)$
u) $\frac{(x-4)(x-3)(x+3)}{2}$
v) $(3rs-1)(9r^2s^2+3rs+1)$
w) $\left(\frac{1}{5h}+r\right)\left(\frac{1}{25h^2}-\frac{r}{5h}+r^2\right)$
x) $(j+k)(4n-b)(16n^2+4nb+b^2)$

31. a) $-8a+4$
b) $125a^3-64b^3$
c) $16m^4-81$
d) $a^2+4ab+4b^2-c^2$
e) 2
f) 5
g) $-\frac{2+b}{3}$
h) $\frac{1}{x-2}$
i) $\frac{x-7}{3}$
j) 5
k) $\frac{a-5}{(a+2)^2}$
l) $\frac{1}{a^2+6a+36}$
m) $-2(2a+b)$
n) $s+31$
o) $n+8$
p) $p^2-2pq+q^2$
q) $\frac{12-x^2}{6x}$
r) $\frac{-14}{(a+7)(a-7)}$
s) $\frac{32x^3+x+2}{2x^3}$
t) $\frac{4a-1}{(2a+1)(2a-1)(a-1)}$
u) $\frac{5x+20}{6}$
v) $\frac{4x^3+11x^2+7x+3}{x(x+2)(x+3)}$
w) $\frac{2(b^2+9)}{(b-3)(b+3)}$
x) $\frac{x(x+1)}{x^2+x+6}$
y) $\frac{17z}{(z+12)(z-5)}$
z) $\frac{7w}{(w-11)(w-4)}$

32. $(3x-4)(x+2)$
33. $5x$
34. 8,85
35. $a^2+2ab+4b^2$
36. $9x^2-3x+1$
37. a) $x \neq \frac{1}{3}$ en $x \neq -1$
b) $a \neq b$ en $a \neq -3$

2 Eksponente

Exercise 2 – 1:

1. 1
2. 16
3. 11^{11x}
4. 10^{8x}
5. $216c^3$
6. $125n^3$
7. $\frac{1}{36}$
8. 40
9. $\frac{27}{8}$
10. a^3
11. $\frac{1}{x^3y^4}$
12. x^{3t+3}
13. 3^{2a+3}
14. 1
15. 2
16. $6a^5b^2$
17. $56m^{10}n^9$
18. $-72a^{16}b^{16}$
19. $-\frac{1}{5}x^{14}y^{19}$
20. a^{2x}
21. $5ax$
22. $2c^4p^3$
23. $3a^5m^5$
24. 27
25. $7a^2$
26. $9a^5b^{27}$
27. $\frac{1}{9}$
28. $\frac{a^{30}}{b^{35}}$
29. $8t^{12}$
30. 3^{2n+6}
31. $\frac{1}{27}$
32. 85
33. 3^{9x+3}
34. 4^x+12^b
35. $5^{7y-8}\times 2^{9y-1}$
36. $\frac{2^{17}}{3^2 5^3}$
37. 12
38. $\frac{51}{49}$
39. $\frac{4^y-2^{5y}}{3}$

Exercise 2 – 2:

1. $3t^2$
2. $8x$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{3}$
5. $3p^3$
6. $96a^3b^5$
7. $4a^3b$
8. $\frac{b^3}{a}$
9. $2\,.\,2^{\frac{1}{3}}a^4b^2$

Exercise 2 – 3:

1. a) 0
b) $-\frac{5}{2}$
c) -7
d) $\frac{5}{9}$
e) 6
f) -2
g) 4
h) $-\frac{1}{2}$
i) $\frac{4}{5}$
j) 3
k) $x=2$ of $x=3$
l) $x=3$ of $x=1$
m) $x=0$ of $x=4$
n) 1
o) $\frac{3}{2}$ of 0
p) 1
q) $-\frac{7}{2}$
r) -3
s) -3
t) 3 of -1
u) 3
v) -2

2. 7
3. $x \approx 2{,}81$
4. $x \approx 1{,}49$

Exercise 2 – 4:

1. a) $512x^3$
b) $2t^3$
c) $5^{5x+y+3z}$
d) 15^{15x}
e) 7
f) $21d^7$
g) $-\frac{18}{7}a^{15}b^{12}$
h) b^{k^2+k}
i) $4c^6m^2$
j) 2
k) $\frac{1}{7a^{10}b}$
l) $\frac{a^{14}}{b^8}$
m) $2^{5p}.3^{3p}$
n) $27m^t$
o) $\frac{1}{3x^5}$
p) $\frac{1}{625}$
q) $\frac{27}{4}$
r) $\frac{1}{27}$
s) $\frac{1}{27}$
t) $\frac{y^2}{x^5}$
u) -8
v) $8x^{6a}y^{3b}$
w) 4^{x+3}
x) 22
y) -27
z) $\frac{6}{5}$

2. a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{8}$
c) 14
d) $2^{2p}-2^p+1$
e) a^5b^3
f) $3x^4y^2$
g) 34
h) 3^{20z+2}
i) 11^b-4^p
j) $11^{2c-2}\times 2^{14c-4}$
k) $\frac{3^4}{2^{13}\times 5}$
l) $\frac{81}{50}$

m) $\frac{9}{10}$

n) $108a^6b^9$

o) $22p^{10}q^6$

p) $-(ab)^{-1}$

q) x^6

r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2y}$

s) 4

3. a) -3

b) 3

c) 1

d) $\frac{2}{3}$

e) -9

f) -5

g) $\frac{1}{2}$

h) -1

i) 16

j) $\frac{1}{16}$

k) -1

l) 1 of 16

m) 2

n) $k = \frac{1}{81}$

o) $x = 81$

p) $\frac{1}{2}$

q) $x = 3$ of $x = 2$

r) $x = 2$

s) $x = 1$ of $x = -1$

t) $x = -8$

u) $x = 1$

v) $x = -1$

w) $x = -\frac{1}{3}$ of $x = -1$

x) geen oplossing

4. $x \approx 2{,}73$

5. $x \approx 3{,}10$

6. a) Die som van die magte van dieselfde graad, is nie die mag van die som van die grondtalle nie

b) Die som van twee magte van dieselfde graad, is nie die mag van die som van die grondtalle nie

c) 'n Minus teken ontbreek. Wanneer 'n mag geskuif word van die noemer na die teller, verander die teken van die eksponent.

d) Ons kan nie grondtalle vermenigvuldig nie tensy hulle tot dieselfde mag verhef word

e) Die teken van 'n grondtal verander nie wanneer die eksponent geskuif word vanaf die teller van 'n breuk na die noemer, of andersom nie.

f) Die mag van 'n produk is die produk van al die grondtalle verhef tot dieselfde mag

7. 2015 syfers.

3 Getalpatrone

Exercise 3 – 1:

2. $T_{n-1} = -1$

3. $T_{n-4} = C$

4. a) geen gemene verskil

b) $d = 7$

c) nie 'n gemene verskil is nie

d) $d = -0{,}65$

5. a) 35, 45 en 55

b) 7, 12 en 17

c) 21, 18 en 15

d) $T_4 = -28{,}1$; $T_5 = -33{,}1$; $T_6 = -38{,}1$

e) $T_4 = -39x; T_5 = -49x; T_6 = -59x$

f) $T_4 = 44{,}2$; $T_5 = 64{,}2$; $T_6 = 84{,}2$

g) $T_4 = 42b; T_5 = 46b; T_6 = 50b$

6. T_6 is 28 en T_9 is 43

7. T_5 is G en T_8 is J

8. T_5 is 23 en T_8 is 35

9. a) 8

b) -1

c) -9 en -5

d) 28

e) 27

11. a) 13 driehoeke

b) $2n + 3$

c) 53

12. a) 47 ; 55 ; 63

b) $8n + 7$

c) $= 23$

13. a) 76 ; 106 ; 136

b) $30n - 74$

c) $= 16$

14. a) Geen gemene verskil

b) $T_1 = -3$ en $T_2 = 3$

15. a) $d = -2n - 3$

b) $T_1 = 2$ en $T_3 = 0$

16. a) $-\frac{5}{3}$

b) $-\frac{14}{9}$, $\frac{43}{9}$ en $\frac{100}{9}$

17. a) $-\frac{1}{2}$

b) $-2, -3$ en -4

18. O

Exercise 3 – 2:

2. $d = -3$

3. geen gemene verskil

4. $T_{n-3} = 7$

5. a) $T_4 = -67{,}2$; $T_5 = -86{,}2$; $T_6 = -105{,}2$

b) $T_4 = 38r$; $T_5 = 34r$; $T_6 = 30r$

6. $T_6 = 31$ en $T_8 = 41$

7. $T_6 = F$ en $T_{10} = J$

8. a) $T_6 = 49$

b) $T_6 = -11$

c) $T_6 = 18{,}9$

9. a) $T_n = -4n - 14, T_{10} = -54, T_{15} = -74, T_{30} = -134$

b) $T_n = -7n + 8, T_{10} = -62, T_{15} = -97, T_{30} = -202$

10. a) 12 en 16

b) -10

c) 23 en 53

11. a) $T_n = 4n - 1$

b) $T_n = 3n - 5$

c) $T_n = 4n + 7$

d) $T_n = \frac{1}{3}n$

12. a) -49 ; -63 ; 77

b) $= -14n + 7$

c) $= 66$

13. E

14. E

15. 111

16. a) 17 blokkies

b) $T_n = 3n - 1$

c) 89

17. a) $T_1 = 4$

b) 3

c) $T_n = 3n + 1$

d) 76 vuurhoutjies

18. 10^de^

19. a) $d = 3y + 3$

b) $T_1 = -7$ en $T_2 = -1$

20. a) $-\frac{1}{3}$

b) $-\frac{1}{6}$, $\frac{3}{2}$ en $\frac{19}{6}$

21. $T_{85} = 7227$ blokkies

22. a) 29

b) $T_n = (n+1)^2 + n$

c) $T_{14} = 239$ blokkies

23. 77 stukke

24. a) 7

b) 0

c) 4

4 Vergelykings en ongelykhede

Exercise 4 – 1:

1. 5
2. -8
3. -1
4. -3
5. 0
6. $-\frac{7}{8}$
7. 12
8. 11
9. $\frac{217}{20}$
10. 15
11. $\frac{9}{10}$
12. $-\frac{50}{13}$
13. 1
14. 3
15. 6
16. $\frac{17}{12}$
17. $\frac{20}{3}$
18. 26
19. 5
20. 4
21. $-\frac{36}{11}$
22. 8
23. 5
24. 24
25. 10
26. $-\frac{22}{6}$
27. 6
28. -2
29. $-12{,}5$
30. $\frac{280}{451}$
31. $\frac{223}{45}$
32. 12
33. $-\frac{17}{13}$
34. -19
35. $-\frac{1}{6}$

Exercise 4 – 2:

1. a) $5r^2 + 16r = 0$
   b) $6r^2 - 25r + 39 = 0$
   c) $2d^2 + 15d + 17 = 0$
2. a) $x = -5$ of $x = 3$
   b) $p = -2$ of $p = 9$
   c) $x = -\frac{2}{3}$ of $x = \frac{4}{3}$
   d) $x = \frac{9}{5}$ of $x = -6$
   e) $z = -2$ of $z = -1$
   f) $b = 3$ of $b = 4$
   g) $a = 3$ of $a = 6$
   h) $y = \frac{3}{2}$ of $y = -\frac{3}{2}$
   i) $x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{9}{2}$
   j) $\frac{3}{2}$
   k) $m = 0$ of $m = -\frac{4}{5}$
   l) $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 4$
   m) $x = \frac{6}{5}$ of $x = \frac{8}{3}$
   n) $x = 4$ of $x = 11$
   o) 2
   p) $x = \frac{3}{5}$ of $x = 3$
   q) $t = 0$ of $t = 3$
   r) 5
   s) $x = \sqrt{18}$ of $x = -\sqrt{18}$
   t) $p = 7$ of $p = -1$
   u) $x = -\frac{11}{4}$ of $x = 7$
   v) $x = -\frac{6}{7}$ of $x = \frac{1}{2}$
   w) $x = 3$ of $x = -2$
   x) $a = -\frac{1}{2}$ of $a = 3{,}5$
   y) $x = 11$ of $x = 1$
3. a) $y = 3$ of $y = -3$
   b) $z = -\frac{1}{5}$ of $z = \frac{1}{2}$
   c) $x = 3$ of $x = -6$
   d) $y = \frac{1}{4}$ of $y = 4$
   e) $b = -\frac{1}{3}b$ of $b = 4$
   f) $y = -\frac{4}{3}$ of $y = 1$
   g) $x = 4$ of $x = -4$
   h) $z = 1$ of $z = -1$
   i) $b = \pm 2$ of $b = \pm 3$
   j) $a = -\frac{43}{8}$ of $a = 1$
   k) $x = 3$
   l) $x = 4$
   m) $a = -2$
   n) $a = 0$ of $a = \frac{2}{3}$

Exercise 4 – 3:

1. $x = -2$ en $y = -3$
2. geen oplossing
3. $x = 2$ en $y = -3$
4. a) $x = \frac{1}{10}$ en $y = -\frac{43}{50}$
   b) $x = -7$ en $y = -\frac{3}{2}$
   c) $x = 5$ en $y = 3$
   d) $x = -1$ en $y = -1$
   e) $x = 13$ en $y = -1$
   f) $x = 11$ en $y = 5$
   g) $x = 9$ en $y = 2$
   h) $a = \frac{16}{3}$ en $b = \frac{4}{3}$
   i) $x = \frac{-1}{10}$ en $y = -2$
   j) $x = -\frac{7}{5}$ en $y = \frac{8}{5}$
   k) $x = \frac{1}{7}$ en $y = -\frac{1}{4}$
   l) x kan enige reële getal wees, $\frac{1}{2} \leq y < 2$
   m) a en b kan enige reële getal wees behalwe 0.
5. a) $x = -1$ en $y = 2$
   b) $x = 9$ en $y = -4$
   c) $x = -1$ en $y = -4$
   d) $x = 2$ en $y = 1$
   e) $x = 1{,}5$ en $y = 3{,}5$

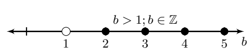
Exercise 4 – 4:

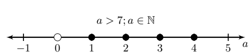
1. 2 uur
2. 1 uur
3. Zwelibanzi het 80 punte en Jessica 68 punte.
4. 18 groot hemde en 2 kleiner hemde
5.
6. -34
7. 'n Melkskommel kos R 34 en 'n pannekoek kos R 27.
8. 30° en 60°
9. breedte is 8 cm, en lengte is 16 cm
10. 7 of -3
11. lengte: 6 cm, breedte: 4 cm
12. $\frac{19}{50}$ liter
13. 9 en 11
14. $\frac{1}{2}$
15. 8 jaar oud
16. 7en 35 jare oud.
17. $x = -\frac{1}{2}$
18. $x = 2$ of $x = -3$
19. 15
20. 34
21. 48 blou krale, 96 rooi krale en 36 pers krale

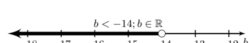
Exercise 4 – 5:

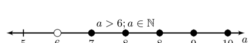
1. $x = 1 - 2y$
2. $\frac{2(s-ut)}{t^2} = a$
3. $\frac{pV}{RT} = n$
4. $x = \frac{-2b^2}{1-2b}$
5. $\pm\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = r$
6. $\frac{E\lambda}{c} = h$
7. $\frac{A-2\pi r}{2\pi r} = h$
8. $\lambda = \frac{D}{tf}$
9. $\frac{E}{gh+\frac{1}{2}v^2} = m$
10. $x = -a$ of $x = -b$
11. $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$
12. $U = \frac{VW}{W-V}$
13. $r = \pm\sqrt{\frac{A-\pi R^2}{\pi}}$
14. $C = \frac{5}{9}(F - 32°)$
15. $r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4}V}{\pi}}$
16. $x = a + 4$ of $x = -1$
17. $x = 2$ of $x = -2$
18. $x = 3{,}91$
19. $u = 2{,}6$
20. $h = \pm 16$
21. 6

Exercise 4 – 6:

1. a) $x < -1$ en $x \geq 6; x \in \mathbb{R}$
   b) $3 < x < 6; x \in \mathbb{R}$
   c) $x \neq 3; x \neq 6; x \in \mathbb{R}$
   d) $x > -10; x \in \mathbb{R}$
2.
3. a) $(-34; \infty)$
   b) $(-\infty; 5)$
   c) $x \in \left[\frac{29}{13}; \infty\right)$.
   d) $x \in \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.
   e) $\left(-\infty; -\frac{55}{13}\right)$
   f) $\left(-\infty; -\frac{21}{11}\right]$
   g) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
   h) $\left[-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right]$
4. a) 

   b) 

   c) 

   d) 

Exercise 4 – 7:

1. a) 1
   b) -1
   c) 1
   d) -8
   e) $\frac{1}{2}$
   f) $\frac{11}{54}$
   g) -2
   h) -2
   i) 10
   j) $-\frac{8}{3}$
   k) 42
   l) 5

m) $\frac{1}{3}$

2. a) $b = -9$ of $b = 3$
   b) $x = -1$ of $x = 6$
   c) $b = -5$ of $b = 2$
   d) $\frac{9}{7}$
   e) $x = -\frac{1}{5}$ of $x = 3$
   f) 1
   g) -32
   h) -23
   i) $x = 2$ of $x = 1$
   j) $y = -3$ of $y = 2$
   k) $x = -\frac{9}{2}$ of $x = 2$
   l) $d = 4$

3. $x = -1$ en $y = 1$

4. geen oplossing

5. $x = -1$ en $y = 3$

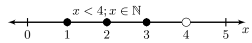
6. a) $x = 1$ en $y = 2$
   b) $x = 4$ en $y = 2$
   c) $x = 5$ en $y = -2$
   d) $x = 6$ en $y = -5$
   e) $x = -6$ en $y = 4$
   f) $x = 3$ en $y = 6$
   g) $x = -7$ en $y = 5$
   h) $x = 14$ en $y = 2$
   i) $x = -8$ en $y = -5$
   j) $x = 1$ en $y = -1$
   k) $x = \frac{5}{12}$ en $y = \frac{31}{12}$
   l) $x = -\frac{31}{38}$ en $y = \frac{41}{38}$
   m) geen oplossing
   n) a en b kan enige reële getal wees behalwe 0
   o) x en y kan enige reële getal wees behalwe 0
   p) $x = 48$ en $y = 7$
   q) $x = -3$ en $y = 4$

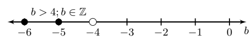
7. a) $\frac{120}{13}$
   b) Elke liniaal kos R 5 en elke pen R 3.
   c) Die prys van die worsbroodjie is R 31 terwyl 'n melkskommel R 25 kos.
   d) Lefu het 77 punte en Monique het 89 punte
   e) 0,56 km
   f) 1
   g) 8 km
   h) R 20
   i) 33
   j) 12
   k) $x = 5$

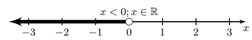
8. a) $x = \frac{a-c}{b}, b \neq 0$
   b) $\frac{P}{V} = I$
   c) $\frac{E}{c^2} = m$
   d) $\frac{v-u}{a} = t$
   e) $f = \frac{uv}{v+u}$
   f) $mx + c = y$
   g) As $(a+b+c) \neq 0$ dan is $x = 4-b$ as $a+b+c = 0, x \in \mathbb{R}$
   h) $r = \frac{13}{15}$
   i) $b = \pm 8$

9. a) $x < -1$ en $x \geq 4; x \in \mathbb{R}$
   b) $x \geq -2; x \in \mathbb{R}$
   c) $-1 < x \leq -2; x \in \mathbb{R}$

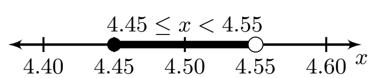
10. a) $\left(-\infty; \frac{-29}{2}\right)$
    b) $x \in \left(-\infty; \frac{-8}{5}\right]$.
    c) $\left[\frac{80}{31}; \infty\right)$
    d) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{17}{3}; \infty\right)$

11. a) 

    b) 

    c) 

12. a) $x = -\frac{317}{76}$
    b) $x = -2$ of $x = 10$
    c) $a = 5$ of $a = -11$
    d) $x = 2$ of $x = -2$
    e) $a = 4$ of $a = -3$
    f) $a = 2$ of $a = -3$
    g) $a = 2$ of $a = -9$
    h) $b = \pm\sqrt{3}$ of $b = \pm 1$
    i) $y = \pm\frac{2}{3}$ of $y = \pm 1$
    j) $b = 4$
    k) $a = 1$
    l) $x \geq 2$
    m) $x < -1$
    n) $x > \frac{588}{10}$
    o) $a \leq -7$
    p) $-3 \leq k < 2$
    q) $x = 7$ of $x = -6$
    r) $x = -1$ of $x = -2$
    s) $x = \frac{3}{8}$
    t) $x = \frac{a}{(a-b)}$ vir $a, b \neq 0$ en $a \neq b$
    u) $x = -\frac{2}{3}y$ of $x = y$
    v) $x = \frac{1}{2}y$ of $x = -1$
    w) geen oplossing
    x) geen oplossing
    y) $x > -13$

13. 

5 Trigonometrie

Exercise 5 – 1:

3. a) $\cos \hat{O} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{m}{o}$
   b) $\tan \hat{M} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{m}{o}$
   c) $\sin \hat{O} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{o}{n}$
   d) $\cos \hat{M} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{o}{n}$

5. $\cos \hat{P} = \frac{r}{q}$

6. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

Exercise 5 – 2:

1. a) 2,14
   b) 0,62
   c) 0,28
   d) 0,21
   e) 0,90
   f) 1,15
   g) −0,82
   h) −1,48
   i) 2,37
   j) 1,02
   k) 1,49
   l) 1,60
   m) 1,56
   n) −1,19
   o) −1,59
   p) −1,39
   q) 0,23
   r) 2,52

s) 0,67
t) 5,01
u) 0,91
v) ongedefinieerd
w) 2,13
x) 0,88
y) nie-reël
z) 0,21

2. a) waar
b) vals
c) waar
d) vals

3. 71,57

Exercise 5 – 3:

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{1}$
e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
g) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
h) $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

5. a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
b) $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$
c) -1
d) $\frac{\sqrt{2}}{1}$
e) 2
f) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
g) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Exercise 5 – 4:

1. a) 36,11
b) 8,91
c) 10,90
d) 21,65
e) 3,51
f) 33,43
g) 29,46
h) 10
i) 2,87
j) 9,06

2. a) $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}$
b) $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$
c) $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB}$

3. MN = 12,86 en NP = 15,32

4. $x = 29{,}82$ en $y = 31{,}98$

Exercise 5 – 5:

1. 23,96°
2. 35,23°
3. 39,40°
4. 26,31°
5. 36,87°
6. 45°
7. 30°

Exercise 5 – 6:

1. a) 59,5°
b) 53,1°
c) 71,3°
d) 76,6°
e) 80,1°
f) 41,8°
g) geen oplossing
h) 41,4°
i) 18,1°
j) 40,5°
k) geen oplossing
l) 18,4°
m) geen oplossing
n) 109,9°
o) 26,6°
p) 17,7°

2. a) −0,342
b) 0,827
c) −0,440
d) 1,770
e) 0,242
f) −2,924
g) 1,614
h) 0,625

3. a) 54,49°
b) 90°
c) 36,12°
d) 63,07°
e) −18,97°
f) 43°

Exercise 5 – 7:

1. a) $\sqrt{10}$
b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$
c) $\frac{\sqrt{10}}{-3}$
d) -3

2. a) $\frac{-\sqrt{21}}{5}$
b) -2

3. a) $\frac{\sqrt{t^2+4}}{2}$
b) $\frac{2}{t}$
c) $\frac{4}{t^2+4}$
d) -1

4. a) $\frac{-4}{5}$
b) $\frac{-82}{25}$

5. a) $\frac{-8}{17}$
b) $\frac{15}{8}$
c) 1

6. $\frac{7}{13}$

7. a) $\frac{8}{15}$
b) -45

8. a) $\sqrt{89}$
b) $\frac{8}{\sqrt{89}}$
c) $\frac{5}{\sqrt{89}}$
d) $\frac{8}{5}$
e) $\frac{\sqrt{89}}{8}$
f) $\frac{\sqrt{89}}{5}$
g) $\frac{5}{8}$
h) 1

9. a) $(-24; -7)$ en $(-48; -14)$
b) $a = 4(-24) = -96$ en $b = 4(-7) = -28$
c) $\frac{-7}{25}$

10. -13

Exercise 5 – 8:

1. a) nie korrek geskryf nie
b) korrek geskryf
c) nie korrek geskryf nie

2. a) 5,67
b) 0,29
c) 0,29
d) −1,07
e) −0,74
f) 1,79
g) 3,08
h) 1,66
i) −4,45
j) 1,79
k) 2,33
l) 7,73
m) −0,23
n) 0,99
o) 1,31
p) 0,05
q) 10,46
r) 2,12

3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) 1

5. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
f) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
h) $\frac{3}{8}$

6. $\frac{3}{2}$

7. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

8. $\sqrt{3}$

9. 9,96 mm en 8,36 mm

10. a) 35°
b) 4
c) 7
d) 6
e) 3
f) 45°
g) 55°
h) 65°
i) 5

12. a) 17,32 cm
b) 10 cm
c) 25,08°

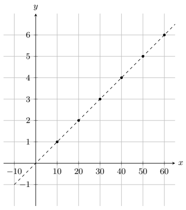
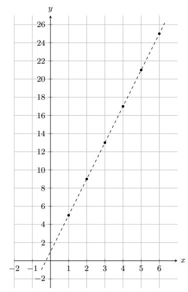
13. 44,44°

14. 11,88

15. a) $\sqrt{55}$
    b) $\frac{3}{\sqrt{55}}$
    c) $\theta = 67{,}976°$
16. 27,46 cm
17. a) 42,07°
    b) 63,43°
    c) 25°
    d) 56,25°
    e) 14,32°
    f) 30°
    g) 59,26
    h) 45°
18. a) 4,01
    b) 6,39
    c) 0,91
    d) 1,85
19. a) $\frac{-3}{\sqrt{34}}$
    b) -1
20. 33,69°
21. 23,96°
22. 97,12°
23. 5,65 cm en 8,7 cm
24. 16944 eenhede^2

6 Funksies

Exercise 6 – 1:

1. a) $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 7\}$
   b) $\{x : x \in \mathbb{R}, -13 \leq x < 4\}$
   c) $\{x : x \in \mathbb{R}, x > 35\}$
   d) $\{x : x \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \leq x < 21\}$
   e) $\{x : x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$
   f) $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x > -\sqrt{3}\right\}$
2. a) $(-\infty; 6]$
   b) $(-5; 5)$
   c) $(\frac{1}{5}; \infty)$
   d) $[21; 41)$
3. a) $y = 5x$
   b) $y = 5$
   c) $y = \frac{1}{2}x$
4. a) 
   b) 
5. a) 2
   b) -11
   c) -2
   d) 3
   e) 8
   f) 1
   g) 10
   h) 3
6. a) R 108,88
   b) R 199,36
   c) 22,043 L
   d) 22,071 L
   e) 1,15V
7. a) 7 m
   b) 0 m $\leq s(t) \leq$ 10 m
   c) Die gebied is 0 s $\leq t \leq$ 20 s. Dit verteenwoordig die totale tyd om die onderkant van die helling te bereik.
8. a) 5 m
   b) 10 m
   c) 5 m

Exercise 6 – 2:

1. a) x-afsnit $= 1$ en y-afsnit $= -1$
   b) x-afsnit $= -2$ en y-afsnit $= 2$
   c) x-afsnit $= 3$ en y-afsnit $= -3$
2. $m = 3$ en $c = -1$.
3. $m = 1$, en $c = -1$.
4. a) $(0; 1)$ en $(-1; 0)$. Die grafiek neem toe
   b) $(0; -1)$ en $(1; 0)$. Die grafiek neem toe
   c) $(0; 1)$ en $(\frac{-1}{2}; 0)$. Die grafiek neem toe
   d) $(0; 1)$ en $(\frac{1}{3}; 0)$. Die grafiek neem af
   e) $(0; 2)$ en $(-3; 0)$. Die grafiek neem toe
   f) $(0; -3)$. Die grafiek is horisontaal.
   g) $(0; 0)$. Die grafiek neem toe
   h) $(0; -3)$ en $(2; 0)$. Die grafiek neem toe
5. a) Vals
   b) Waar
   c) Waar
   d) Vals
   e) Vals
6. a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
   b) $y = -3x + 5$
   c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$
   d) $y = -2x + 4$
7. a) E
   b) A
   c) B
   d) F
   e) D
   f) C
8. a) $a(x) = -\frac{3}{4}x + 3$
   b) $b(x) = \frac{3}{2}x - 6$
   c) $c(x) = 3$
   d) $d(x) = -\frac{3}{4}x$

Exercise 6 – 3:

1. $a = -\frac{1}{3}$; $q = 4$
2. $a = 2$; $q = -3$
3. a) -2
   b) $(-0{,}63; 0)$ en $(0{,}63; 0)$
4. a) 1
   b) $(-0{,}71; 0)$ en $(0{,}71; 0)$
5. a) $h(x)$
   b) $g(x)$
   c) $f(x)$
   d) $k(x)$
6. a) $h(x)$
   b) $f(x)$
   c) $g(x)$
7. a) $a = 1$; $p = -9$
   b) $b = -1$; $q = 23$
   c) $x \leq -4$ of $x \geq 4$
   d) $x \geq 0$

Exercise 6 – 4:

1. $a = -1$ en $q = 2$
2. $a = -2$ en $q = 3$.
3. a) Daar geen y-afsnit.
   b) $-\frac{3}{2}$
4. a) Daar is geen y-afsnit nie.
   b) -1
5. a) $h(x)$
   b) $g(x)$
   c) $k(x)$
   d) $f(x)$
6. b) lê die punt wel op die grafiek
   c) -24
   e) $y = 0$ en $x = 0$
   f) $(-3; 2)$

Exercise 6 – 5:

1. a) $(0; 0{,}33)$
   b) $(0{,}4; 0)$
2. $a = -1$ en $q = 4$
3. $a = -1$ en $q = 5$
4. a) $(0; -0{,}75)$
   b) $(1; 0)$
5. a) $g(x)$
   b) $k(x)$
   c) $f(x)$
   d) $h(x)$
6. b) asimptote
   c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   d) $(0; 1)$
7. a) $f(x) = 3^x$
   b) $h(x) = -3^x$
   c) $(-\infty; 0)$
   d) $g(x) = 3^{-x}$
   e) $j(x) = 2 \cdot 3^x$
   f) $k(x) = 3^x - 3$

Exercise 6 – 6:

1. $a = \frac{3}{2}$ en $q = \frac{3}{2}$
2. $a = 4$ en $q = -2$
3. $a = \frac{1}{2}$, en $q = -1$
4. $a = \frac{1}{2}$, en $q = 0$
5. $a = 3$ en $q = \frac{1}{3}$
6. $a = 1$ en $q = 0$
7. a) $h(x)$
   b) $k(x)$
   c) $f(x)$
   d) $g(x)$
8. $g(x) = 4 \sin \theta$
9. a) $E(180°; -2)$ en $-2 \leq y \leq 0$
   b) $E(360°; 2)$ en $0 \leq y \leq 4$
   c) $E(90°; -0{,}5)$ en $-2{,}5 \leq y \leq -0{,}5$
   d) $E(180°; 0{,}5)$ en $0{,}5 \leq y \leq 4{,}5$
11. $E(180°; 1)$,terrein $y \in \mathbb{R}$ en gebied $0 \leq \theta \leq 360, x \neq 90, x \neq 270$
13. a) $y = -2 \cos \theta$
    b) $y = \sin \theta + 1$
14. $90° < \theta < 270°$
15. $0° < \theta < 210°$ en $330° < \theta < 360°$
16. $60° < \theta < 300°$
17. a) $A = (90°; 4)$, $B = (90°; -2)$, $C = (180°; 4)$en $D = (180°; -2)$
    b) 2
    c) 2
    d) 2
18. a) $A = (90°; 1)$, $B = (180°; -3)$, $C = (270°; -1)$ en $D = (360°; 3)$
    b) 2
    c) 3
    d) 1
19. a) $A = (90°; 3)$, $B = (90°; 2)$, $C = (180°; -4)$ en $D = (270°; 2)$
    b) 3
    c) 2
    d) -1

Exercise 6 – 7:

2. a) $y = x + 2$ en $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
   b) $y = 8x$ en $y = \frac{8}{x}$
3. a) (iii)
   b) (iv)
   c) (iii)
   d) (i)

Exercise 6 – 8:

1. a) $y = 3x$
   b) $y = x - 4$
4. a) x-afsnit $= -\frac{5}{3}$ en y-afsnit $= -5$
   b) x-afsnit $= -2$ en y-afsnit $= 4$
5. $m = 1$ en $y = x - 4$
6. a) E
   b) B
   c) A
   d) C
   e) F
   f) D
7. a) Waar
   b) Vals
   c) Vals
8. a) $y = \frac{5}{2}x + 3$
   b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$
10. a) 120 mL
    b) 600 mL
    c) $33{,}33s$
    d) 240 mL
11. a) 50km
    b) Die gebied is $0 \leq t \leq 120$ min.
    c) Die terrein is $0 \leq s \leq 100$ kmen dit verteenwoordig die totale afstand afgelê.
12. $a = -\frac{1}{3}$; $q = 6$
13. a) 3
    b) $(-0{,}77; 0)$ en $(0{,}77; 0)$
14. a) $k(x)$
    b) $g(x)$
    c) $h(x)$
    d) $f(x)$
15. a) $g(x)$
    b) $f(x)$
    c) $h(x)$
17. a) 8 m
    b) 6 m
    c) 3 m
    d) 1 m
18. $a = 2$ en $q = -3$
19. a) geen oplossing
    b) $\frac{3}{4}$

20. a) $k(x)$
b) $f(x)$
c) $g(x)$
d) $h(x)$

22. a) Translasie van 2 in die positiewe y-rigting.
b) Verkleining met 'n faktor 4
c) Translasie met 3 eenhede in die positiewe y-rigting.
d) Refleksie om die x-as

23. a) 2,50
b) 1,3

25. $a = 3$ en $q = -4$

26. a) $h(x)$
b) $f(x)$
c) $k(x)$
d) $g(x)$

27. a) -4
b) -2
c) $-\frac{323}{81}$
d) $-\frac{7}{10}$
e) $\frac{1}{27}$
f) 77
g) $-\frac{3}{2}$

28. a) Vals
b) Vals
c) Waar
d) Vals
e) Vals
f) Waar

29. b) $(-3; 12)$ and $(2; 2)$
d) $y = -2x^2 + 6$

30. 1,6 eenhede

31. a) $x + y = 15$; $y = x + 3$
b)
c) 6 R 5 munte en 9 R 2 munte

32. $a = \frac{3}{2}$ en $q = 3$

33. $a = 3$ en $q = 0$

34. $a = 1$ en $q = -3$

35. a) $g(x)$
b) $f(x)$
c) $k(x)$
d) $h(x)$

36. $f(x) = -3{,}5 \cos\theta$

40. a) $E = (270°; -2)$ en $-2 \leq y \leq 2$
b) $E = (360°; 2)$ en $-2 \leq y \leq 2$

41. $E = (45°; 0)$, terrein $y \in \mathbb{R}$ en gebied $0 \leq x \leq 360, x \neq 90, \theta \neq 270$

42. $0° < \theta < 180°$

43. $0° < \theta < 90°$ en $270° < \theta < 360°$

44. $0° < \theta < 360°$

45. a) $y = 3x$
b) $y = -2x^2 + 3$
c) $y = \frac{-3}{x}$
d) $y = x + 2$
e) $y = 5 \sin\theta + 1$
f) $y = 2 \times 2^x + 1$
g) $y = -\tan\theta - 2$

46. a) $A(90°; 1)$, $B(90°; -1)$, $C(180°; 2)$ en $D(360°; 1)$
b) 0
c) 1
d) 5

47. a) $A(90°; 1)$, $B(270°; 3)$, $C(270°; 1)$ en $D(360°; 2)$
b) 2
c) 3
d) 2

48. a) $M(0; 1)$ en $N(0; -1)$
b) 2
c) 1
d) $y = 2^{-x}$
e) Terrein $y = 2^x$: $(0; \infty)$
Terrein $y = -2^x$: $(-\infty; 0)$

50. a) $q = 1$
b) $BC = 3 + 4 = 7$ eenhede
c) $y = -4^x$
d) $y = 4^x + 1$
e) $y = 0$
f) Terrein $f(x)$: $(0; \infty)$, Terrein $g(x)$: $(-\infty; 1]$

51. c) $y = x^2 + 4$
d) Gebied h: $(-\infty; \infty)$. Terrein h: $[-4; \infty)$.

53. a) $A(\sqrt{8}; \sqrt{8})$ en $B(-\sqrt{8}; -\sqrt{8})$
b) $2\sqrt{8}$
c) 8
d) 2

54. a) $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 3)$
c) $D(2; -9)$
d) $y = -6x + 3$

55. a) $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$
b) 3

56. a) $y = -2x$ en $y = x^2 - 3$
b) $y = 4x + 1$ en $y = 3^x$

57. a) (iv)
b) (ii)

7 Eukliediese meetkunde

Exercise 7 – 1:

3. 70°

4. a) $\hat{x} = 55°$
b) 35°
c) $\hat{r} = 135°$
d) 45°
e) $\hat{p} = 45°$
f) EF is nie ewewydig aan CG

5. a) $\hat{a} = 50°$
b) 40°
c) $\hat{c} = 140°$
d) 40°
e) $\hat{d} = 40°$
f) $PQ \parallel NR$

6. a) geen ewewydige lyne nie
b) nie ewewydig
c) $\therefore TY \parallel MN$

Exercise 7 – 2:

1. a) 72°
b) 98°
c) $y = 112°$ en $x = 44°$
d) 29
e) 25
f) $x = 18$ en $y = 4$
g) $x = 12$ en $y = 13$

2. diagram A

3. diagram B

5. $\triangle PNM \equiv \triangle QSR$, rede: SHS

6. a) $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$
b) nie kongruent
c) nie genoeg inligting
d) nie genoeg inligting
e) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

Exercise 7 – 3:

1. a) $S\hat{R}O$ en $O\hat{R}Q$ b) $2x$ c) $28°$

Exercise 7 – 4:

Exercise 7 – 5:

Exercise 7 – 6:

1. reghoek
2. ruit of rombus
3. vierhoek
4. vlieër en vierhoek
5. vierkant, reghoek, ruit, parallelogram, vlieër, trapesium en vierhoek
6. 315

Exercise 7 – 7:

1. ED
2. TS
3. AC en ED
4. geen ewewydige lyne
5. a) $91°$
   b) $\triangle DEC \mid\mid\mid \triangle DAB$
6. a) $60°$
   b) $\triangle HKG \mid\mid\mid \triangle JKL$
7. 6
8. 3
9. 11
10. 4
11. a) 14
    b) 3,5
    c) 5
    d) $x = 28$ eenhede en $y = 100°$
    e) $x = 24°$ en $y = 13{,}93$
13. a) $MN = -4a + 8$
    b) $-\frac{5}{2}$
14. a) $\frac{a}{3} + 2$
    b) 18
15. a) $\hat{A} = -4q + 121°$
    b) $18°$
16. a) $\hat{K} = -9b + 122°$
    b) $\frac{16}{3}$

Exercise 7 – 8:

1. a) gestrekte hoek
   b) stomphoek
   c) skerphoek
   d) regte hoek
   e) Reflekse hoek
   f) stomphoek
   g) gestrekte hoek
   h) reflekse hoek
2. a) Vals
   b) Waar
   c) Waar
   d) Vals
   e) Waar
   f) Waar
   g) Waar
   h) Waar
   i) Vals
   j) Vals
3. a) $AB \parallel CD$
   b) $MN \parallel OP$
   c) $GH \parallel KL$ en $GK \parallel HL$
4. a) $a = 107°, b = 73°, c = 107°, d = 73°$
   b) $a = b = c = d = 80°$
   c) $a = 50°, b = 45°, c = 95°, d = 85°$
5. a) $\hat{x} = 45°$
   b) $45°$
   c) $\hat{r} = 135°$
   d) $45°$
   e) $\hat{p} = 45°$
   f) ewewydig
6. diagram B
7. diagram A
8. nie genoeg inligting
9. ($\triangle VWU \equiv \triangle YZX$), rede: SSS
10. a) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$
    b) $\triangle GHI \equiv \triangle JKL$
    c) $\triangle MNO \equiv \triangle RPQ$
    d) $\triangle QRS$ is nie kongruent aan $\triangle TUV$
11. a) 4,24 cm
    b) 12 cm
    c) 7,28 cm
    d) 40 mm
12. a) 25°
    b) 145°
    c) $x = 10$ en $y = 12{,}5$
    d) 60°
    e) 36°
    f) $x = 6$ en $y = 10$
14. $x = 2{,}75$ and $y = 30°$
15. 'n vlieër
16. ruit, parallelogram, vlieër, trapesium en vierhoek
17. $x = 15°$
18. a) $ACDF$, $ABEF$ en $BCDE$
    b) $ACDF$, $ABEF$, $BCDE$ en $BCEF$
    c) $ACEF$ en $BCDF$
    d) $ABEF$ en $BCDE$
19. TS
20. ZY en VX
21. a) $39°$
    b) $\triangle DEC \mid\mid\mid \triangle DAB$
22. a) $98°$
    b) $\triangle QMN \mid\mid\mid \triangle QRP$
23. 5
24. 9
25. geen oplossing
26. a) $PR = \frac{z}{4} - 1$
    b) $z = 12$
27. a) $-8b + 119°$
    b) $\frac{19}{2}$
28. a) $-24d + 180°$
    b) $\frac{20}{3}$
29. $a = 5$ and $b = 12$
33. b) rhombus
    c) 44°

8 Analytiese meetkunde

Exercise 8 – 1:

1. $(3; 3)$
2. $A(3; -4)$, $B(3; -3)$, $C(-3; -4)$, $D(5; -3)$ and $E(5; -4)$.
3. E
4. B
5. vorm Z
6. vorm Z

Exercise 8 – 2:

1. 6,71
2. 2,24
3. $x = 1$
4. $y = 3{,}5$
5. a) $\sqrt{29}$
   b) $\sqrt{52}$
   c) $\sqrt{17}$
6. a) $x = 3$ of $x = 9$
   b) $y = 3$ of $y = -5$
7. $p = 3$ of $p = -9$

Exercise 8 – 3:

1. a) $\frac{9}{11}$
   b) $\frac{11}{8}$
   c) $\frac{4}{3}$
2. $-0{,}5$
3. $1{,}5$
4. a) $\frac{-10}{3}$
   b) 5
5. 4
6. 3

Exercise 8 – 4:

1. a) ewewydig of parallel
   b) nie een van die twee nie
   c) loodreg
2. a) saamlynig
   b) saamlynig
   c) nie ko-lineêr
3. $y = -2x + 0{,}5$
4. $y = 0{,}5x - 0{,}5$
5. $\frac{1}{2}$
6. 6
7. $y = x - 2$
8. $y = -x + 1{,}5$
9. 4
10. -2
11. $y = -x + 2$
12. $y = 2x - 1{,}5$
13. 3
14. -2
15. 0,5
16. $-0{,}5$
17. 6
18. $\frac{-2}{3}$
19. b) 42,5 eenhede
20. b) $(3; 13)$
    c) $y = 2x + 12$

Exercise 8 – 5:

1. $M(1; 0)$
2. $M(-0{,}5; -1{,}25)$
3. a) $(-1; 6)$
   b) $(14; 32)$
   c) $\left(\frac{2x-3}{2}; \frac{2y-5}{2}\right)$
4. $(8; 13)$
5. $S(4; -5)$

Exercise 8 – 6:

1. $A(7; -4)$, $B(3; -3)$, $C(7; 7)$, $D(-2; -8)$ en $E(-5; 4)$
2. A
3. Vorm Z
5. 9,81
6. 3
7. 2
8. 4
9. 4
10. a) $y = \frac{1}{3}x + 3$
    b) $\sqrt{40}$
11. $y = -1{,}5x - 1$
12. 2
13. 0
14. $y = -x - 1{,}5$
15. -4
16. $(-0{,}5; 0{,}5)$
18. a) $y = -x + 10$
    b) $y = 3x + 12$
    c) $y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$
19. b) teenoorstaande sye is nie ewewydig nie
    c) nie halveer die hoeklyne mekaar nie
    d) gewone vierhoek
21. b) Gelykbenige trapesium
22. b) i. $\sqrt{10}$
       ii. 3
    c) Trapesium
23. $H(3; 3)$
24. a) $\sqrt{34}$
    b) $\frac{1}{3}$
    c) $\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$
25. c) $\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$
    d) $\frac{-2}{3}$
29. a) $\frac{1}{2}$
    c) $C(11; 8)$
30. a) 9,8
    b) $\frac{-2}{3}$
    d) $y = \dfrac{3}{2}x + 6$
31. a) $a = 1$ en $b = \frac{7}{2}$
    b) $y = \frac{4}{3}x$
    c) $\left(\frac{7}{2}; 1\right)$
    e) $C(7; 0)$
32. a) $-\frac{1}{3}$
    c) 9,49
    d) $y = -x + 6$
    e) 45
33. a) geen waarde van k
    b) $k = 1$
34. a) $5\sqrt{5}$
    b) $-\frac{1}{2}$
    c) $y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$
    d) 1
35. a) $M(1; 3)$
    b) 2
    c) $-\frac{1}{2}$
    d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
    e) $y = 2x + 6$
36. a) $N(3; 5)$
    b) ruit
37. a) $\frac{1}{4}$
    c) 4,1
    d) $\frac{1}{4}$
    e) $y = -\frac{1}{2}x - 4$
38. a) $\sqrt{41}$
    b) $M(1; 2)$
    c) $T\left(-1; \frac{1}{2}\right)$
    e) $S(1; 6)$
39. a) gelykbenige
    c) $\frac{3}{4}$
40. a) $Q(0; 2)$
    c) $m_{PR} = 1$
    d) 6
    e) $y = 2x - 3$
41. a) -1
42. a) $d_{AC} = d_{BD} = \sqrt{26}$
    b) $(-0{,}5; -4{,}5)$
    e) vierkant
43. a) $(1; -5)$
    b) 3
    c) $y = 3x - 8$
    d) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$
44. a) $E = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
    b) $ABCD$ is 'n parallelogram
    c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$
    d) $y = -3x$
    e) $m_{AC} = -\frac{15}{7}$
    f) nie 'n ruit nie
    g) 10
45. a) 5
    b) $7\frac{1}{2}$
    c) $8\frac{1}{3}$
46. a) $m_{MN} = -\frac{1}{3}$
    b) $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$
    c) $AB \parallel MN$
    d) 2
    e) $P(x; y) = (8; 12)$
47. a) -13
    b) $(8; 12)$

9 Finansies en groei

Exercise 9 – 1:

1. R 4025
2. R 5398,80
3. R 1700,00
4. R 7030,80
5. a) R 324
   b) R 3937,50
6. R 11 538,46
7. 19
8. 16,25%
9. 5,7% per annum
10. 3,8% per annum
11. 4,3% per annum
12. 20 jare
13. 32 jare

Exercise 9 – 2:

1. R 4044,69
2. R 5930,94
3. R 9327,76
4. R 59 345,13
5. R 24 002,00
6. R 17 942,00
7. 8,45% p.a
8. 4,3% per annum
9. 1,8% per annum

Exercise 9 – 3:

1. a) R 3960,00
   b) R 4316,40
   c) R 359,70
   d) R 4756,40
2. a) R 4760,00
   b) R 6092,80
   c) R 253,87
   d) R 6932,80
3. a) R 3825
   b) R 4743
   c) R 197,63
   d) R 5418
4. a) R 12 962,50
   b) R 4462,50
   c) R 360,07
5. a) R 10 240
   b) R 3840
   c) R 213,33
6. a) R 6324
   b) R 1224
   c) R 263,50
7. a) R 5400
   b) R 4251,97
8. winkel A
9. R 156,84
10. R 210,22

Exercise 9 – 4:

1. R 33,28
2. R 29,61
3. R 22,77
4. R 14,72
5. R 14,24
6. R 2174,77
7. R 38,64

Exercise 9 – 5:

1. 4 142 255
2. 4 217 645
3. 553

Exercise 9 – 6:

1. a) R 1400
   b) R 200
   c) R 100
2. a) R 1430
   b) R 260
   c) R 1040
3. a) R 1680
   b) R 600
   c) R 480
4. a) VSA
   b) Sollie
5. New York uitgewer
6. R 36 780
7. a) Brasiliaanse toeriste
   b) Japanese toeriste
8. 530 523 TZS

Exercise 9 – 7:

1. R 11 204,10
2. R 2470,80
3. R 35 087,72
4. 3,6% per annum
5. 3,6% per annum
6. 25 jare
7. 22 jare
8. R 938
9. R 7319,78
10. R 4158,88
11. R 44 872
12. R 18 731,00
13. a) R 205
    b) R 286,52
    c) R 128
14. 3,3% per annum
15. 5,5% per annum
16. a) R 534,25
    b) R 520
17. Bank B
18. a) R 200
    b) R 200
21. a) R 4800,00
    b) R 5232,00
    c) R 436,00
    d) R 6432,00
22. a) R 4320
    b) R 4838,40
    c) R 403,20
    d) R 5318,40
23. a) R 10 880
    b) R 2880
    c) R 302,22
24. a) R 13 860
    b) R 6160
    c) R 231,00
25. 8,5%
26. R 1106,04
27. R 24,53
28. R 27,49
29. R 12,60
30. R 8,06
31. a) 62,3 miljoen mense
    b) 1,7
32. 4 065 346
33. 4 083 001
34. a) R 2100
    b) R 840
    c) R 700
35. a) R 1960
    b) R 560
    c) R 840
36. R 1840
37. VK uitgewer
38. 3521,37 BRL
40. R 13 343,92

10 Statistiek

Exercise 10 – 1:

1. kwalitatief anekdoties
2. kwantitatief diskreet
3. kwantitatief diskreet

Exercise 10 – 2:

1. 9,7
2. 13
3. 6
4. a) gemiddelde: 13,2; mediaan: 11; modus: 8
   b) gemiddelde: 26; mediaan: 25; modus: 24
   c) gemiddelde: 11,2; mediaan: 11; modus: 11
   d) gemiddelde: 34,3; mediaan: 31; modus: 31
5. gemiddelde: 38,3; mediaan 38; modus 33 en 42.
6. 23
7. 26
8. 20
9. a) 5
   b) 7
10.
11. 36

Exercise 10 – 3:

1. 1
2. 1
3. 3
4. 5
5. E
6. B
7. Datastel C
8. Datastel C

Exercise 10 – 4:

1. Gemiddelde: 53; Modale groep: $50 < m \leq 55$; Mediaan groep: $50 < m \leq 55$
2. Gemiddelde: 70,66; Modale groep: $65 < t \leq 75$; Mediaan groep: $65 < t \leq 75$
3. a) $700 < x \leq 800$
   b) 33 600
   c) 700
   d) 750
   e) R 588 000

Exercise 10 – 5:

1. 10
2. 9
3. 9
4. $Q_1 = 6{,}5$; $Q_2 = 18$; $Q_3 = 29$

Exercise 10 – 6:

Exercise 10 – 7:

1. kwantitatief kontinu
2. kwalitatief diskreet
3. 10
4. 10
5. 44
6. 6
7. 10
8. 15
9. $x = 19$
10. $\bar{x} = p + 4$
11. 1
12. 4
13. 3
14. C
15. E
16. datastel C
17. datastel B
18. 18
19. 14
20. a) Gemiddelde en modus
21. a) 19,9
23. a) R 182 222,22
    b) R 100 000
    c) R 100 000
24. a) Die gemiddelde en die omvang is 89,2 en 27 onderskeidelik.
25. a) $x = 17$
    b) enige heelgetal met $x \neq \{1; 3; 4; 5; 9\}$
    c) $x = 7$
    d) $x = 10$
    e) $x = 4$
26. $\{2; 5; 7; 10; 10\}$
27. a) mediaan = 6,5; modus = 8; gemiddelde = 5,45
    b) $\phi_{21} = 4$
    c) $\{3; 3; 5; 5; 8; 8; 8\}$ of $\{3; 4; 4; 5; 8; 8; 8\}$
28. a) 22; 36,5; 50; 55; 64
    b) geen man kan afgedank word nie
    c) $\bar{x} = 42{,}643$
29. a) B
    b) mediaan
    c) 3
    d) tipe C

11 Trigonometrie

Exercise 11 – 1:

1. 5
2. 9
3. 53,13°
4. 35,30°
5. 26 m
6. 15 m

Exercise 11 – 2:

1. 19,47°
2. a) 18°
   b) 23°
3. 8
4. 44,99°
5. 8°
6. 10 m
7. b) 48,59°
8. b) 54,69 m
9. 7,71 m
10. die skip nie veilig nie
11. 473,52 m
12. 106,62° en 67,38°
13. 11,47 cm en 8,03 cm
14. 4,24 cm
15. a) 5 cm
16. a) 36,53°
    b) 34,82 m
17. b) 379,73 m
18. 793,77 m
19. a) 11,21 cm
    b) 56,4°
20. 167 m

12 Euklidiese meetkunde

Exercise 12 – 1:

1. a) $AECF$ is 'n parallelogram
   b) $ABCD$ is 'n parallelogram
2. $AD = EF$
6. b) 34°
   c) 105°
7. b) 36°
   c) 42°

Exercise 12 – 2:

6. b) 24 cm^2
7. a) (i) In $\triangle QRT$en $\triangle RST$ sy $RT = RT$, (ii) gemene sy, (iii) $\therefore$ $QR = TS$ en $QT = RS$ en (iv) tenoorstaande sye is gelyk
   b) 63°
   c) 79°

13 Meting

Exercise 13 – 1:

1. a) 25 cm^2
   b) 50 cm^2
   c) 78,54 cm^2
   d) 40 cm^2
   e) 60 cm^2
   f) 12 cm^2
   g) 43,30 cm^2
   h) 276 cm^2
2. a) $9\pi z^2 + 12\pi z + 4\pi$
   b) $-2hz - h$
3. a) $\pi x^2 + 8\pi x + 16\pi$
   b) $-hx + 2h$

Exercise 13 – 2:

1. a) 344 cm^2
   b) 277,82 cm^2
   c) 87,96 cm^2
   d) 471,24 cm^2
   e) 270
   f) 532,84 cm^2
2. a) 24 L
   b) 22 L

Exercise 13 – 3:

1. 420 cm^3
2. 500 cm^3
3. 785,4 cm^3
4. 32,06
5. 1056
6. 552,92

Exercise 13 – 4:

1. a) 282,7cm^2
   b) 45,6 cm^2
   c) 180 cm^2
   d) 1256,6 cm^2
2. 175,93
3. 804,25 vierkant eenhede
4. 189 vierkant eenhede

Exercise 13 – 5:

1. 2144,66 eenhede^3
2. 29,32 eenhede^3
3. 170,67 eenhede^3
4. a) 314,16 cm^3
   b) 52,0 cm^3
   c) 144 cm^3
   d) 4188,8 cm^3
5. buite-oppervlakte 393 cm^2 en die volume is 507 cm^3
6. a) 91,39 cm^2
   b) 29,39 cm^3
7. buite-oppervlakte is 175 cm^3 en die volume is 190 cm^2

Exercise 13 – 6:

1. $\frac{1}{9}$
2. 4
3. verdubbel
4. a) vermeerder die volume van die prisma met 'n faktor van 9
   b) toeneem met 'n faktor van 27
5. 64 keer
6. volume 31 552 cm^3 en die buite-oppervlakte is 96 112 cm^2

Exercise 13 – 7:

1. a) 75 cm^2
   b) 153,94 mm^2
   c) 252,76 cm^2
2. a) $15y^2 - 10y$
   b) $\frac{15y^2}{2} - 5y$
3. 420
4. 210
5. 640,88
6. 360
7. 300
8. 1847,26
9. 615,75
10. 88 vierkant eenhede
11. 103,67 vierkant eenhede
12. 113,10 eenhede^3
13. 183,26 eenhede^3
14. 130,67 eenhede^3
15. a) $A_{\text{keël}}$ = 126,67 cm^2 $A_{\text{vierkantige piramide}}$ = 437,26 cm^2 $A_{\text{halwe sfeer}}$ = 150,80 cm^2.
    b) $V_{\text{keël}}$ = 94,25 cm^3 $V_{\text{vierkantige piramid}}$ = 900 cm^3 $V_{\text{halwe sfeer}}$ = 134,04 cm^3
16. $\frac{1}{16}$
17. $\frac{1}{9}$
18. $\frac{1}{8}$
19. a) A_{silinder} = 351,9 cm^2 $A_{\text{driehoekige prisma}}$ = 384 cm^2 $A_{\text{reghoekige prisma}}$ = 76 cm^2.
    b) V_{silinder} = 502,7 cm^3 $V_{\text{driehoekige prisma}}$ = 240 cm^3 $V_{\text{reghoekige prisma}}$ = 40 cm^3
    c) A_{silinder} = 3166,7 cm^2 $A_{\text{driehoekige prisma}}$ = 3456 cm^2 $A_{\text{reghoekige prisma}}$ = 684 cm^2
    d) V_{silinder} = 13 571,9 cm^3 $V_{\text{driehoekige prisma}}$ = 6480 cm^3 $V_{\text{reghoekige prisma}}$ = 1080 cm^3
20. a) 460,64 cm^2
    b) 588 cm^3
21. 30 159,52 cm^2 and 301 592,88 cm^3
22. a) 3665,19 cm^3 en 1194,68 cm^2
    b) 2148,85 m^3 en 867,08 m^2
    c) 600 ft^3 en 600,37 ft^2
23. Ja
24. a) 90 cm
    b) 261,5 l
25. a) 47 123,89 cm^3 en 1570,80 cm^2
    b) 92,38 en 180,04
    c) 1200 en 886
26. a) 2412,743
    b) 645,07 cm^3
27. b) 28,57 eenhede^2
    c) 285,664 eenhede^3
28. b) 74,626 cm^3
29. a) $4a^2$
    b) 612,00538 voet
    c) 1,620
    d) 91 661 532,5 voet^3 en 1 551 425,432 voet^2

14 Waarskynlikheid

Exercise 14 – 1:

1. gebeurtenisversameling = $\{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$
2. $\{1;2;3;4;5;6\}$
3. $= \frac{1}{3}$
4. 0,50
5. $\frac{1}{5}$
6. a) $\frac{1}{2}$
   b) $\frac{1}{3}$
   c) $\frac{5}{6}$
   d) $\frac{1}{3}$
7. a) $\frac{1}{52}$
   b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{3}{13}$
   d) $\frac{1}{13}$
   e) $\frac{3}{13}$

Exercise 14 – 2:

1. 0,11
2. 0,57
3. 0,22

Exercise 14 – 3:

1. $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
2. $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$
3. a) $\{1; 2; \ldots; 12\}$
   b) $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
   c) $\{2; 3; 5; 7; 11\}$
5. b) 6
   c) 29
   d) 2

Exercise 14 – 4:

1. $\{7; 10\}$
2. $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$

Exercise 14 – 5:

1. 0,83
2. 0,17

Exercise 14 – 6:

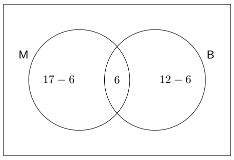
1. wedersyds uitsluitend
2. wedersyds uitsluitend
3. nie wedersyds uitsluitend nie
4. wedersyds uitsluitend

Exercise 14 – 7:

1. $\{2; 3; 4; 6; 10; 11; 12\}$
2. $\{2; 4; 9; 11; 13; 15\}$
3. wedersyds uitsluitend
4. nie wedersyds uitsluitend

Exercise 14 – 8:

1. die dobbelsteen land op die getal 5
2. $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
3. $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
4. wedersyds uitsluitend
5. $\{1; 3; 6; 12; 14; 15\}$
6. 0,08
7. 0,1
8. 0,50
9. 0,18
10. a) $\frac{1}{6}$
    b) $\frac{8}{21}$
11. a) 0,21
    b) 0,56
    c) 0
    d) 0,72
12. a) 0,5
    b) 0,23
    c) 0,67
    d) 0
    e) 0,67
    f) 0,56
13. a) 0,11
    b) 0,33
    c) 0,16
    d) 0,01
    e) 0,80
    f) 0,55
    g) 0,16
    h) 0,01
14. a) $\frac{1}{6}$
    b) $\frac{1}{2}$
    c) $\frac{1}{3}$
15. $\frac{5}{12}$
16. a) $\frac{19}{30}$
    b) $\frac{11}{30}$
17. a) $\frac{4}{9}$
    b) $\frac{5}{9}$
    c) $\frac{1}{9}$
    d) $\frac{8}{9}$
    e) $\frac{5}{9}$
    f) $\frac{4}{9}$
18. a) $\frac{11}{21}$
    b) $\frac{11}{14}$
19. a) $\frac{3}{56}$
    b) $\frac{53}{56}$
20. a) 103
    c) $\frac{14}{19}$
21. b) 10
    c) 4
22. a) $P = \frac{1}{3}$
    b) $P = \frac{2}{3}$
    c) $P = \frac{1}{2}$
    d) $P = \frac{1}{6}$
23. a) (i) $P = \frac{1}{52}$; (ii) $P = \frac{7}{26}$ (iii) $P = \frac{4}{13}$
    b) $\frac{13}{17}$
24. 0,17
27. e) Wedersyds uitsluitend en komplementêr.
29. a) 50%
    b) 31,25%
    c) 6,25%
30. 31
31. a)



    b) 13
    c) (i)$P = \frac{1}{6}$; (ii)$P = \frac{1}{6}$; (iii)$P = \frac{2}{3}$
32. a) $w = 4$, $x = 2$, $y = 6$ en $z = 1$
    b) (i)$P = \frac{4}{15}$; (ii)$P = \frac{1}{10}$

1 Wiskunde, Vraestel 1, Model 2012

PUNTE: 100
TYD: 2 hours

Instruksies en inligting

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 7 vrae.
2. Beantwoord AL die vrae.
3. Dui ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy in die bepaling van jou antwoorde gebruik het, duidelik aan.
4. Volpunte sal NIE noodwendig aan antwoorde alleen toegeken word NIE.
5. Jy mag 'n goedgekeurde, wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmeerbaar en nie-grafies) gebruik, tensy anders vermeld.
6. Indien nodig, rond antwoorde tot TWEE desimale plekke af, tensy anders vermeld.
7. Diagramme is NIE noodwendig volgens skaal geteken NIE.
8. Nommer die antwoorde korrek volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
9. Skryf netjies en leesbaar.

Exercise 1 – 1:

1. a) Vereenvoudig die volgende uitdrukkings volledig:
   i. $(m-2n)(m^2-6mn-n^2)$ (3 punte)
   ii. $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}-\frac{4x^2-3x-1}{4x+1}$ (5 punte)

   b) Faktoriseer die volgende uitdrukkings volledig:
   i. $6x^2-7x-20$ (2 punte)
   ii. $a^2+a-2ab-2b$ (3 punte)

   c) Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle $\sqrt{51}$ lê.
   (2 punte)

   d) Bewys dat 0,$\dot{2}4\dot{5}$ rasionaal is.
   (4 punte)

   [TOTAAL: 19 punte]

2. a) Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van x in elk van die volgende:
   i. $x^2-4x=21$ (3 punte)
   ii. $96=3x^{\frac{5}{4}}$ (3 punte)
   iii. $R=\frac{2\sqrt{x}}{3S}$ (2 punte)

   b) Los p en q gelyktydig op as:

$$
\begin{aligned}
6q+7p&=3\\
2q+p&=5
\end{aligned}
$$

   (5 punte)

   [TOTAAL: 13 punte]

3. a) $3x+1\ ;\ 2x\ ;\ 3x-7\ ;\ \ldots$ is die eerste drie terme van 'n lineêre getalpatroon.
   i. Indien die waarde van x drie is, skryf die EERSTE DRIE terme neer.
   (3 punte)
   ii. Bepaal die formule van T_n, die algemene term van die ry.
   (2 punte)
   iii. Watter term in die ry sal die eerste wees met 'n waarde kleiner as -31?
   (3 punte)

   b) Die veelvoude van drie vorm die getalpatroon: $3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ \ldots$
   Bepaal die 13^{de} getal in die ry wat 'n ewe getal is.
   (3 punte)

   [TOTAAL: 11 punte]

4. a) Thando het R 4500 in sy spaarrekening. Die bank betaal hom 'n saamgestelde rentekoers van 4,25% p.j. Bereken die bedrag wat Thando sal ontvang indien hy besluit om die geld na 30 maande te onttrek.
   (3 punte)

   b) Die volgende advertensie is gepubliseer vir die aankoop van 'n fiets deur van 'n huurkoopkontrak vir die lening gebruik te maak:

Koopprys R 5999
Deposito benodig R 600
Terme van lening slegs 18 maande, teen 8% p.j. enkelvoudige rente

i. Bereken die maandelikse bedrag waarvoor 'n persoon moet begroot om die fiets te betaal.
(6 punte)

ii. Wat is die totale bedrag wat aan rente betaal sal word vir die volle termyn van die lening?
(1 punt)

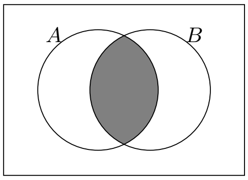
c) Die volgende inligting word gegee:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ons} &= 28{,}35 \text{ g} \\ \$1 &= \text{R } 8{,}79 \end{aligned}$$

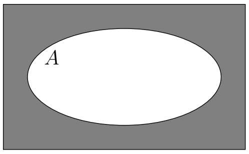
Bereken die randwaarde van 'n 1 kg goudstaaf, as 1 ons goud \$978,34 werd is.
(4 punte)

[TOTAAL: 14 punte]

5. a) Watter uitdrukking verteenwoordig die ingekleurde gedeeltes in die volgende Venn-diagramme, die BESTE?

i. 

(1 punt)

ii. 

(1 punt)

b) Noem watter van die volgende stel gebeurtenisse onderling uitsluitend is:

A Gebeurtenis 2: Die leerders in graad 10 in die debatspan	Gebeurtenis 1: Die leerders in graad 10 in die swemspan
B Gebeurtenis 2: Die leerders in graad 12	Gebeurtenis 1: Die leerders in graad 8
C Gebeurtenis 2: Die leerders wat Fisiese Wetenskappe in graad 10 neem	Gebeurtenis 1: Die leerders wat Wiskunde in graad 10 neem

(1 punt)

c) In 'n klas van 40 leerders is die volgende inligting WAAR:

- 7 leerders is linkshandig
- 18 leerders speel sokker
- 4 leerders speel sokker en is linkshandig
- Al 40 leerders is linkshandig or regshandig

Laat L die stel van al die linkshandig leerders wees, en S die stel van al die leerders wat sokker speel.

i. Hoeveel leerders in die klas is regshandig en speel nie sokker nie?
(1 punt)

ii. Teken 'n Venn-diagram om die gegewe inligting voor te stel.
(4 punte)

iii. Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder:

A. Linkshandig is of sokker speel (3 punte)

B. Regshandig is en sokker speel (2 punte)

[TOTAAL: 13 punte]

6. Gegee: $f(x) = \frac{3}{x} + 1$ en $g(x) = -2x - 4$

a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel. (4 punte)

b) Skryf die vergelykings van die asimptote van f neer. (2 punte)

c) Skryf die definisieversameling van f neer. (2 punte)

d) Los op vir x as $f(x) = g(x)$. (5 punte)

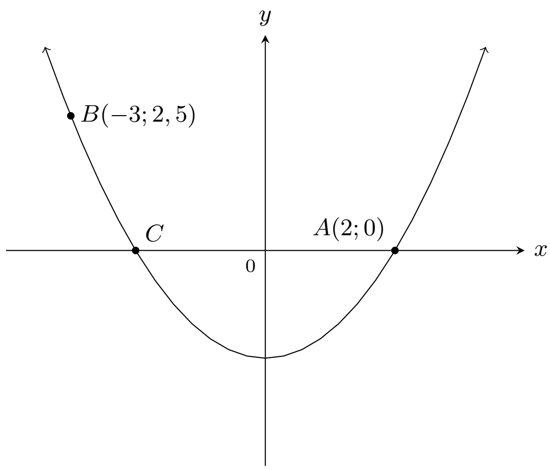
e) Bepaal die waardes van x waarvoor $-1 \leq g(x) \leq 3$. (3 punte)

f) Bepaal die y-afsnit van k as $k(x) = 2g(x)$. (2 punte)

g) Skryf die koördinate van die x- en y-afsnitte van h neer as h die refleksie van die grafiek van g om die y-as is.
(2 punte)

[TOTAAL: 20 punte]

7. Die grafiek van $f(x) = ax^2 + q$ is hieronder geteken.
Punte $A(2; 0)$ en $B(-3; 2{,}5)$ lê op die grafiek van f.
Punte A en C is die x-afsnitte van f.



a) Skryf die koördinate van C neer. (1 punt)

b) Bepaal die vergelyking van f. (3 punte)

c) Skryf die waardeversameling van f neer. (1 punt)

d) Skryf die waardeversameling van h neer, indien $h(x) = -f(x) - 2$. (2 punte)

e) Bepaal die vergelyking van 'n eksponensiële funksie, $g(x) = b^x + q$, met waardeversameling $y > -4$ en wat deur die punt A gaan. (3 punte)

2 Wiskunde, Vraestel 2, Model 2012

PUNTE: 100
TYD: 2 hours

Instruksies en inligting

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 9 vrae.
2. Beantwoord AL die vrae.
3. Dui ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy in die bepaling van jou antwoorde gebruik het, duidelik aan.
4. Volpunte sal NIE noodwendig aan antwoorde alleen toegeken word NIE.
5. Jy mag 'n goedgekeurde, wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmeerbaar en nie-grafies) gebruik, tensy anders vermeld.
6. Indien nodig, rond antwoorde tot TWEE desimale plekke af, tensy anders vermeld.
7. Diagramme is NIE noodwendig volgens skaal geteken NIE.
8. EEN diagramvel vir die beantwoording van VRAAG 6.1.1 en VRAAG 9 is aan die einde van hierdie vraestel aangeheg. Skryf jou sentrumnommer en eksamennommer op hierdie bladsy in die ruimtes voorsien en plaas die bladsy agterin jou ANTWOORDEBOEK.
9. Nommer die antwoorde korrek volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
10. Skryf netjies en leesbaar.

Exercise 2 – 1:

1. 'n Bakker hou rekord van die getal botterbroodjies wat hy elke dag verkoop. Die data vir 19 dae word hieronder aangedui.

31	36	62	74	65	63	60	34	46	56
37	46	40	52	48	39	43	31	66	

a) Bepaal die gemiddeld van die gegewe data.
(2 punte)

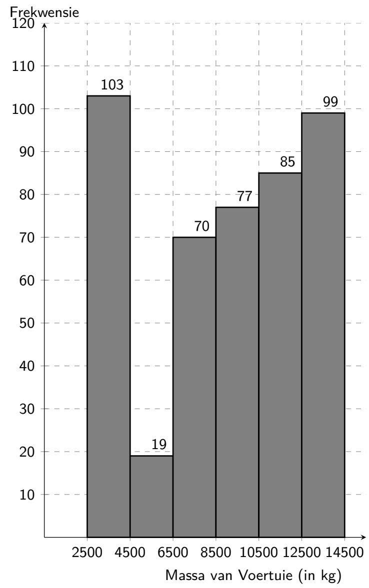
b) Herrangskik die data in stygende orde en bepaal dan die mediaan.
(2 punte)

c) Bepaal die onderste en boonste kwartiele van die data.
(2 punte)

d) Teken 'n mond-en-snordiagram om die data voor te stel.
(2 punte)

[TOTAAL: 8 punte]

2. Die verkeersafdeling is bekommerd dat swaarvoertuie (trokke) baie keer oorlaai is. Ten einde hierdie probleem te hanteer, is 'n aantal weegbrûe langs die hoofroetes in Suid-Afrika gebou. Die bruto (totale) voertuigmassa word by hierdie weegbrûe gemeet. Die histogram hieronder dui die data vir 'n maand aan wat by 'n weegbrug versamel is.



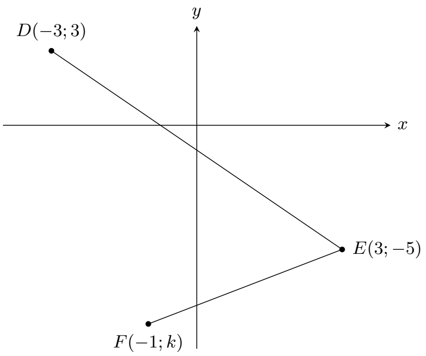
a) Skryf die modale klas van die data neer.
(1 punt)

b) Skat die gemiddelde bruto voertuigmassa vir die maand.
(5 punte)

c) Watter maatstaf van sentrale verspreiding, die modale klas of die geskatte gemiddelde, sal die beste beskrywing van die gegewe data gee? Verduidelik jou keuse.
(1 punt)

[TOTAAL: 7 punte]

3. a) In die diagram hieronder is, $D(-3\ ;\ 3)$, $E(-3\ ;\ -5)$ en $F(-1\ ;\ k)$ drie punte in die Cartesiese vlak.



i. Bereken die lengte van DE.
(2 punte)

ii. Bereken die gradiënt van DE.
(2 punte)

iii. Bepaal die waarde van k indien $D\hat{E}F = 90°$.
(4 punte)

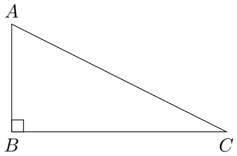
iv. Indien $k = -8$, bepaal die koördinate van M, die middelpunt van DF.
(2 punte)

v. Bepaal die koördinate van punt G sodanig dat die vierhoek $DEFG$ 'n reghoek sal wees.
(4 punte)

b) C is die punt $(1\ ;\ -2)$. Die punt D lê in die tweede kwadrant en die koördinate van D is $(x\ ;\ 5)$. Indien die lengte van CD gegee word as $\sqrt{53}$ eenhede, bereken die waarde van x.
(4 punte)

[TOTAAL: 18 punte]

4. a) In die diagram hieronder is $\triangle ABC$ met 'n regte hoek by B.



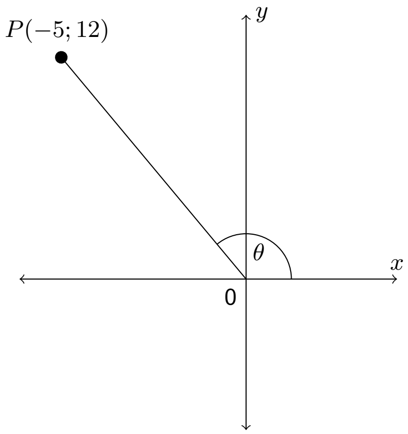
Voltooi die volgende stellings:

i. $\sin C = \frac{AB}{?}$
(1 punt)

ii. $?A = \frac{AB}{BC}$
(1 punt)

b) **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, bepaal die waarde van $\dfrac{\sin 60° \ . \ \tan 30°}{\sec 45°}$
(4 punte)

c) In die diagram is $P(-5;12)$ 'n punt in die Cartesiese vlak en $R\hat{O}P = \theta$.



Bepaal die waarde van:

i. $\cos\theta$
(3 punte)

ii. $\text{cosec}^2\theta + 1$
(3 punte)

[TOTAAL: 12 punte]

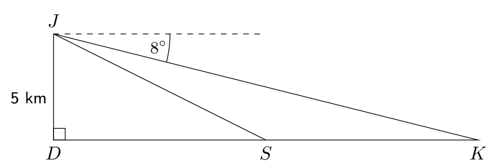
5. a) Los op vir x, korrek tot EEN desimale plek, in elk van die volgende vrae waar $0° \leq x \leq 90°$.

i. $5\cos x = 3$
(2 punte)

ii. $\tan 2x = 1{,}19$
(3 punte)

iii. $4\sec x - 3 = 5$
(4 punte)

b) 'n Vliegtuig by J vlieg op 'n hoogte van 5 kilometer direk oor 'n punt D op die grond. Die vliegtuig is oppad om by punt K te land. Die dieptehoek van J na K is 8°. S is 'n punt langs die pad van D na K.



i. Skryf die grotte van $J\hat{K}D$ neer.
(1 punt)

ii. Bereken die afstand DK, korrek tot die naaste meter.
(3 punte)

iii. Indien die afstand SK, 8 kilometer is, bepaal die afstand DS.
(1 punt)

iv. Bereken die hoogtehoek van punt S na J, korrek tot EEN desimale plek.
(2 punte)

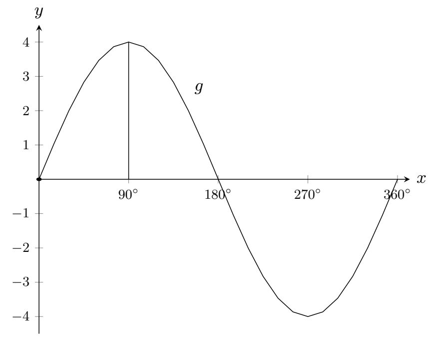
[TOTAAL: 16 punte]

6. a) Beskou die funksie $y = 2\tan x$.

i. Maak 'n netjiese skets van $y = 2\tan x$ vir $0° \leq x \leq 360°$ op die assestelsel wat op DIAGRAMVEL 1 voorsien is. Dui duidelik op jou skets die snypunte met die asse en die asimptote aan.
(4 punte)

ii. Indien die grafiek van $y = 2\tan x$ gereflekteer word in die x-as, skryf die vergelyking van die nuwe grafiek neer wat as gevolg van hierdie refleksie verkry word.
(1 punt)

b) Die diagram hieronder dui die grafiek van $g(x) = a\sin x$ vir $0° \leq x \leq 360°$ aan.

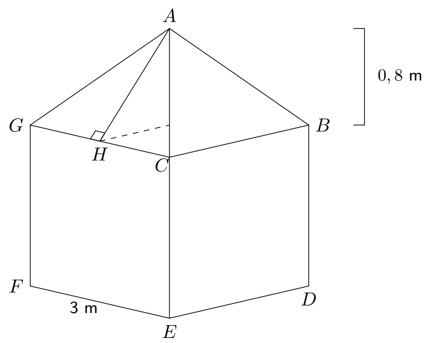


i. Bepaal die waarde van a.
(1 punt)

ii. Indien die grafiek van g opwaarts met 2 eenhede getransleer word om 'n nuwe grafiek h te verkry, gee die waardeversameling van h.
(2 punte)

[TOTAAL: 8 punte]

7. a) Die dak van 'n seiltent is in die vorm van 'n regte piramide op 'n vierkantige basis, met 'n loodregte hoogte van 0,8 meter. Die lengte van een sy van die basis is 3 meter.



i. Bepaal die lengte van AH.
(2 punte)

ii. Bereken die buite-oppervlakte van die dak.
(2 punte)

iii. Indien die hoogte van die mure van die tent 2,1 meter is, bereken die totale hoeveelheid seil benodig om die tent te maak indien die vloer nie ingesluit is nie.
(2 punte)

b) 'n Metaalbal het 'n radius van 8 millimeter.

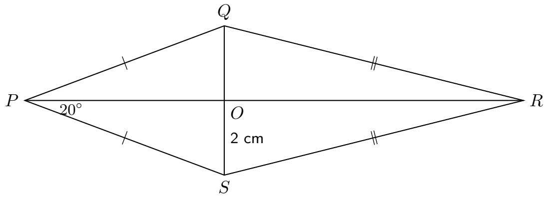
i. Bereken die volume metaal gebruik om hierdie bal te maak, korrek tot TWEE desimale plekke.
(2 punte)

ii. Indien die radius van die bal verdubbel word, gee die verhouding van: die nuwe volume : die oorspronklike volume.
(2 punte)

iii. Jy wil graag hierdie bal met silwer plateer tot 'n dikte van 1 millimeter. Watter volume silwer word benodig? Gee jou antwoord korrek tot TWEE desimale plekke.
(2 punte)

[TOTAAL: 12 punte]

8. $PQRS$ is 'n vlieër sodanig dat die diagonale mekaar by O sny.
$OS = 2$ cm en $O\hat{P}S = 20°$.



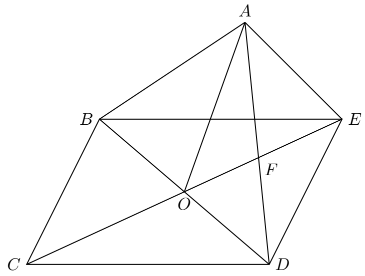
a) Skryf die lengte van OQ neer.
(2 punte)

b) Skryf die grootte van $P\hat{O}Q$ neer.
(2 punte)

c) Skryf die grootte van $Q\hat{P}S$ neer.
(2 punte)

[TOTAAL: 6 punte]

9. In die diagram is $BCDE$ en $AODE$ parallelogramme.



a) Bewys dat $OF \parallel AB$
(4 punte)

b) Bewys dat $ABOE$ 'n parallelogram is.
(4 punte)

c) Bewys dat $\triangle ABO \equiv \triangle EOD$.
(5 punte)

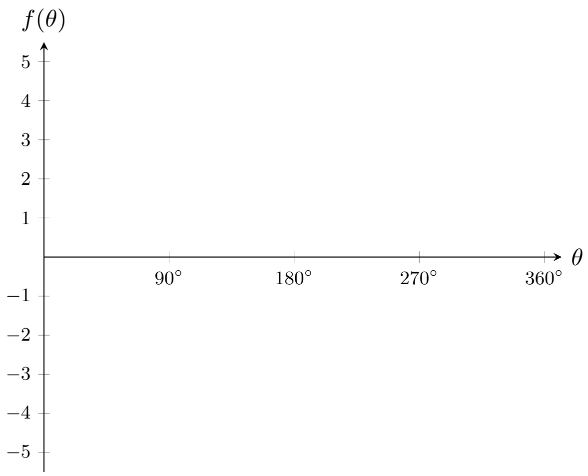
[TOTAAL: 13 punte]

2.0 Diagramvel 1 EMD85

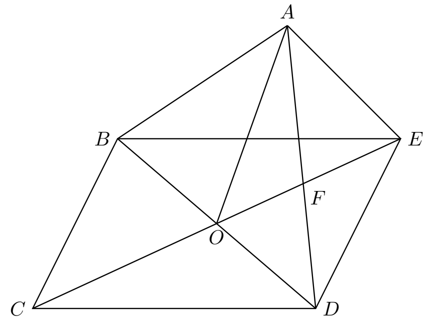
Sentrumnommer:

Eksamennommer:

Vraag 6.1.1



Vraag 9



Lys van definisies

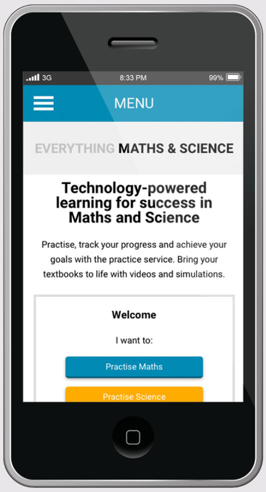
Erkennings vir beelde

KABV WEERGAWE 1.1

GRAAD 10
WISKUNDE

GESKRYF DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

HIERDIE HANDBOEK IS BESKIKBAAR OP JOU SELFOON



Hierdie handboek is beskikbaar op die web en mobi.
Less, sien oplossings en oefen slim by www.everythingmaths.co.za

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

ISBN 978-1-928208-39-6
9 781928 208396